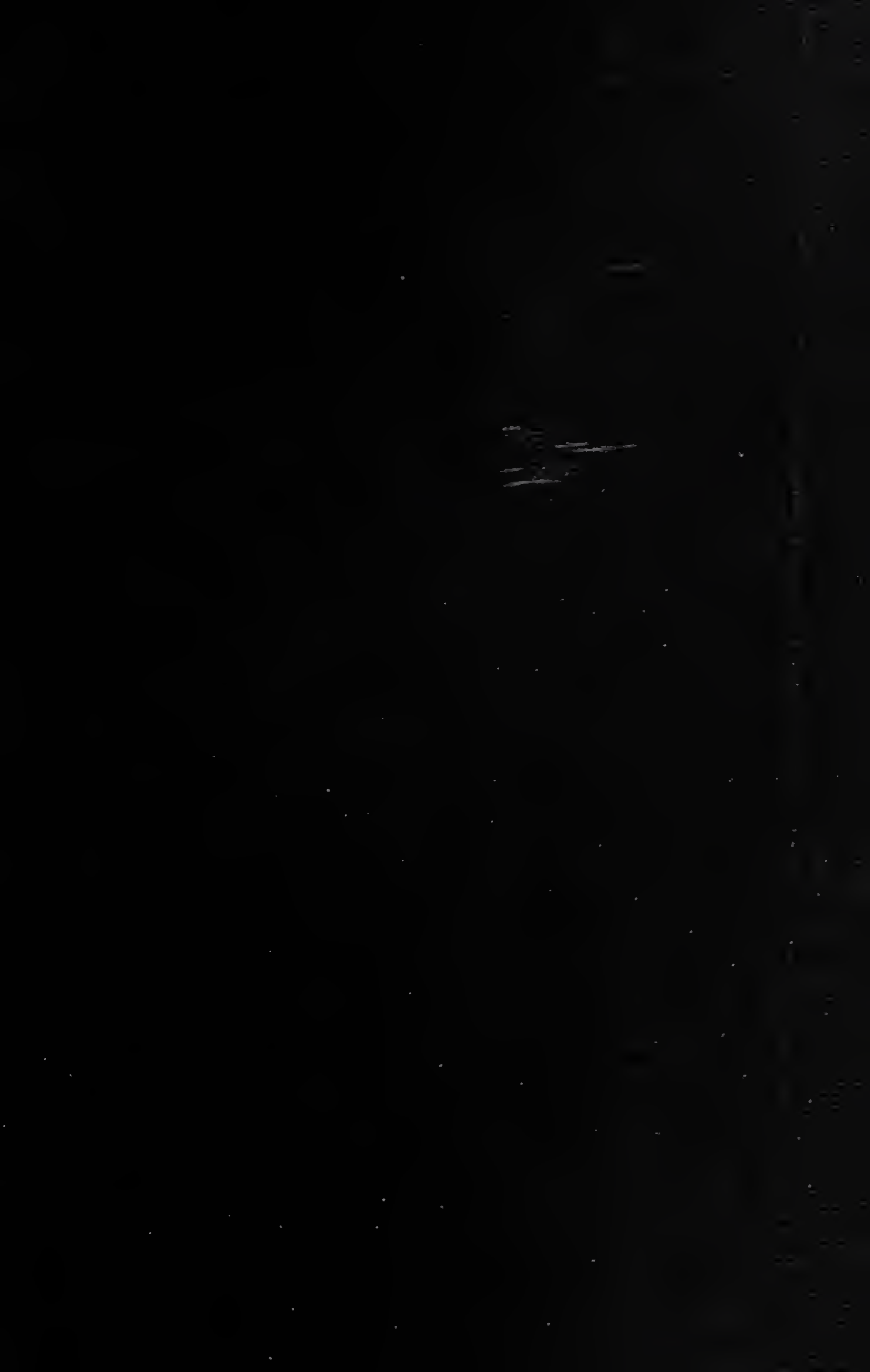
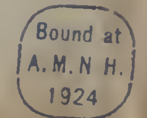



Bound at
A. M. N. H.
1924

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1913

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

II. Abhandlungen.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1913.

Sitzung am 11. Januar.

1. Herr E. v. Drygalski macht Mitteilungen über die ersten Ergebnisse der Persien-Expedition von Leutnant O. Niedermayer und Dr. Diez nach Berichten, die aus Teheran eingetroffen sind. Die Reisenden sind seit September 1912 in und in der Umgebung von Teheran tätig gewesen. Leutnant Niedermayer untersuchte die Gebirge östlich der Stadt und entwarf dort eine Übersichtskarte im Maßstab 1 : 100000. Danach handelt es sich um ein System ostwestlich bis südost-nordwestlich ziehender Ketten, die in Gipfeln von über 2000 m kulminieren. Die tieferen Teile liegen in mächtigen, durch trockene Verwitterung erzeugten Schuttmassen begraben, die höheren haben oft schroffe, schwer zu ersteigende Formen. Sie bestehen teils aus oberem Kohlenkalk, der von Muschelkalk in typisch kontinentaler Facies und cenomanen Kalken mit Exogyra überlagert ist, teils aus anscheinend fossilfreien roten und grauen Kalksandsteinen mit obercretacischen Schichten darüber. Mehrfach treten auch eruptive Porphyre und geschichtete Tuffe in bedeutender Mächtigkeit auf. Ein Bericht Niedermayers hierüber mit Skizzen, Profilen und Photographien sowie eine Sammlung von über 200 Gesteinen und Fossilien ist bereits bei Professor Lenk in Erlangen eingetroffen, dessen vorläufigem Bericht darüber die obigen Angaben entnommen

sind; ferner sind meteorologische Aufzeichnungen vom 28. September bis zum 7. November 1912 bei Professor Hartwig in Bamberg eingegangen, in denen die Gleichmäßigkeit des Luftdrucks und der Temperatur in dieser Jahreszeit sowie die lange Dauer des wolkenlosen Himmels auffällt, wie Professor Hartwig mitteilt. Auch ethnographische und archäologische Sammlungen sind abgesandt worden, doch noch nicht eingetroffen, wohl aber eine entomologische Sammlung bei Professor Lehmann in Würzburg, die etwa 200 Stück persische Insekten enthält.

Alle bisherigen Nachrichten zeigen die Expedition in reger und verständnisvoller Tätigkeit und lassen weitere günstige Erfolge erhoffen. Mitte November wollte Niedermayer von Teheran aufbrechen, um sich über Firuskuh nach Asterabad und dann nach Meschhed zu begeben.

2. Herr M. v. Gruber berichtet über:

Forschungen über Vererbung von krankhaften Anlagen beim Menschen.

Das Bekanntwerden der Mendelschen Vererbungsregeln hat auch der Erblichkeitsforschung beim Menschen eine mächtige Anregung gegeben. Es ist von größter Wichtigkeit für die menschliche Gesellschaft, daß exakt festgestellt wird, in welchem Umfange die Vererbung von krankhaften Anlagen stattfindet, ob diese Vererbung nach den Mendelschen Regeln vor sich geht und ob die einzelnen abnormen Anlagen den zugehörigen normalen Anlagen gegenüber dominant oder rezessiv sich verhalten. Da das Experiment beim Menschen ausgeschlossen ist, bleibt nur der Weg der statistischen Forschung offen. Sie hat bereits bezüglich einiger Abnormitäten zu sicheren Ergebnissen geführt. So hat z. B. Farabee bewiesen, daß die Anlage zu Brachydaktylie dominant vererbt wird; Nettleship, daß dasselbe für die stationäre Nachtblindheit gilt. Die größte praktische Bedeutung haben die vererblichen Krankheitsanlagen des Nervensystems. Hier scheint der Typus der rezessiven Vererbung vorzuherrschen. In einwandfreier Weise

ist dies in neuester Zeit von H. Lundborg in Uppsala für die Myoclonus-Epilepsie nachgewiesen worden. Mit größtem Eifer und unter Aufgebot großer Mittel, die insbesondere von Carnegie beigestellt worden sind, wird die Vererbung der psychopathischen Anlagen in Nordamerika studiert. Die zahlenmäßigen Ergebnisse des „Eugenics Record Office“ in Cold Springs Harbour, N. Y., welche von Rosanoff und Orr veröffentlicht worden sind, entsprechen ebenfalls in überraschender Weise der Erwartung unter der Annahme rezessiver Vererbung. Privatdozent Dr. E. Rüdin, Oberarzt der psychiatrischen Klinik in München, betreibt schon seit mehreren Jahren in ausgedehntem Maße die Erforschung der Vererbung der Dementia praecox. Über 800 Familien wurden bisher schon untersucht. An einem Beispiele werden seine Ergebnisse besprochen, die für diese Krankheit ebenfalls die „rezessiv mendelnde“ Vererbung höchst wahrscheinlich machen. Derartige Forschungen haben mit außerordentlich großen Schwierigkeiten zu kämpfen und sind sehr kostspielig. Sie verdienen ausgiebige Unterstützung.

3. Herr S. Finsterwalder legt vor und bespricht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung von Ludwig Föppl

Über Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder.

4. Herr Rückert legt drei Abhandlungen vor, in welchen ein Teil des von der Merzbacherschen Tian-Schan-Expedition gesammelten zoologischen Materials bearbeitet ist. Es sind dies

1. Beiträge zur Avifauna des Tian-Schan-Gebirges von Dr. C. Laubmann.
2. Wissenschaftliche Ergebnisse der Reise von Professor Dr. G. Merzbacher im zentralen und östlichen Tian-Schan 1907/08, Fische von Dr. Erich Zugmayer.
3. Beiträge zur Kenntnis der zentralasiatischen Mollusken von Alois Weber.

Die MERZBACHERsche Expedition brachte aus dem Tian-Schan von einigen Arten der in deutschen Museen selten vertretenen zentralasiatischen Schnecken eine solche Fülle, daß wahrscheinlich nach Europa noch nie eine größere derartige Sammlung kam. Die Reichhaltigkeit des Materials machte es möglich, neue Einblicke in früher beschriebene Arten zu gewinnen, insbesondere was Größe, Farbe und Wachstum des Gehäuses anlangt. Auch zwei neue Arten von Landschnecken sind in der Sammlung vertreten. Die in den Lößablagerungen gefundenen Arten sind durchweg solche, welche auch heute noch lebend vorkommen.

Sitzung am 1. Februar.

1. Herr W. C. RÖNTGEN legt eine Mitteilung von Dr. A. JOFFÉ in St. Petersburg vor:

Beobachtungen über den photoelektrischen Elementareffekt.

Dem Verfasser ist es gelungen, an zwischen Kondensatorplatten mitunter stundenlang schwebend erhaltenen, elektrisch geladenen Metallteilchen das durch ultraviolette Bestrahlung hervorgebrachte Abspalten einzelner Elektronen zu beobachten. Es werden Beobachtungen mitgeteilt insbesondere über die zur Abspaltung nötige Bestrahlungszeit, außerdem noch einige über den Einfluß der Wellenlänge der wirksamen Strahlen, überdas Grenzpotential der photoelektrischen Ladung usw.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. GÜNTHER legt eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung vor:

Die geschichtlich erste grundsätzliche Unterscheidung zwischen Schichtvulkanen und Quellkuppen.

Allenthalben wird diese wichtige Trennung der beiden morphologisch wichtigsten Vulkanformen auf v. SEEBACH (1866)

zurückgeführt, aber in Wahrheit hat sich darüber bereits 1791 J. E. v. Fichtel mit voller Bestimmtheit ausgesprochen. Es wird gezeigt, daß dieser hervorragende Geograph der Karpatenländer überhaupt so zutreffende Vorstellungen vom Wesen des Vulkanismus besaß, wie sie teilweise erst nach langer Zeit von der Allgemeinheit wieder gewonnen wurden.

3. Herr S. Finsterwalder bespricht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Arbeit von Herrn Professor R. Emden:

Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung, ein Beitrag zur Theorie der oberen Inversion.

Zur Erklärung der relativ warmen Schicht unserer Atmosphäre oberhalb 10 Kilometer sind schon früher, insbesondere von E. Gold die Verhältnisse der Aus- und Einstrahlung herangezogen worden. Die hierauf bezüglichen Entwicklungen werden nun nach der Richtung verbessert und vertieft, als zwischen einer kurzwelligen, hochtemperierten Strahlung, wie sie von der Sonne ausgeht, und einer langwelligen Strahlung der kalten Erde und ihrer Lufthülle unterschieden und deren durchaus ungleichen, vom Wasserdampfgehalt der durchstrahlten Schicht beeinflußten Absorption Rechnung getragen wird. Es wird gezeigt, daß eine unter Berücksichtigung dieser Umstände im Strahlungsgleichgewicht befindliche Atmosphäre in den höheren Schichten die beobachtete Inversionstemperatur haben kann, während in den tieferen Schichten infolge der Strahlung allein konvektive Instabilität herrschen würde, die im Verein mit der ungleichmäßigen Temperaturverteilung in horizontaler Richtung eine ausgiebige Durchmischung derselben veranlaßt und damit die beobachtete vertikale Temperaturverteilung in ihnen herbeiführt. Zum Schlusse wird die Strahlung der wirklichen Atmosphäre auf Grund der getroffenen Unterscheidung untersucht und die Rolle unserer Lufthülle als Wärmeschutz der Erdoberfläche in den verschiedenen Jahreszeiten dargelegt.

4. Herr A. Voss teilt mit eine Abhandlung von Herrn Ludwig Berwald:

Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefen Minimalgeraden.

In dieser Arbeit leitet der Verfasser zunächst die wichtigsten bekannten Eigenschaften der im Titel genannten Flächen geometrisch ab. Im zweiten Abschnitt werden analytische Darstellungen dieser Flächen gegeben, die insbesondere die Bestimmung aller unter diesen enthaltenen algebraischen Flächen gestatten. Mit den einfachsten dieser algebraischen Flächen beschäftigt sich der dritte Abschnitt; der vierte handelt von einer speziellen Gattung von Flächen der betrachteten Klasse. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr v. Linde legt einen Bericht des Herrn Noell über Versuche vor, welche in dem Laboratorium für technische Physik hier durchgeführt wurden und die Ermittlung der Temperaturänderungen zum Gegenstand hatten, welche bei dem Übergang eines Gases von höherem zu niedrigerem Drucke ohne Leistung von äußerer Arbeit stattfinden. Schon vor längerer Zeit war durch Thomson und Joule innerhalb enger Druck- und Temperaturgrenzen bei atmosphärischer Luft eine geringe Temperaturabnahme festgestellt, welche sie mit einem konstanten Werte für die Einheit der Druckdifferenz angaben, während dieselbe mit abnehmender Temperatur rasch anwachse. Nach einem früher vorgelegten ersten Berichte aus dem Laboratorium für technische Physik hat Herr Vogel bei Erweiterung der Druckgrenzen gefunden, daß jener Wert für die Einheit der Druckdifferenz nicht konstant ist, sondern mit wachsendem Drucke proportional abnimmt. Die neueren Versuche des Herrn Noell hatten nun den Zweck, innerhalb weiterer Temperaturgrenzen den Einfluß der Temperatur auf die Temperaturänderungen zu untersuchen. Von — 55° C. bis zu 250° C. fand sich das Vogel'sche Ergebnis bestätigt, wobei aber der Inversionsdruck, bei welchem die Abkühlung den Wert

Null erreicht, mit abnehmender Temperatur abnimmt. Die von Thomson und Joule angegebene Abhängigkeit der Abkühlung von den Temperaturen bei gegebenem Drucke bedarf einer Korrektur, welche indessen nur bei hohen und tiefen Temperaturen von Bedeutung ist. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

6. Herr J. Ranke macht im Anschluß an seine Untersuchung über „Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldaches“ Mitteilungen über die embryonale Entwicklung des Schädeldaches einiger Affen: Macacus cynomolgus und Hylobates. Es ergibt sich, speziell auch für die Bildung des Interparietale, eine prinzipielle Übereinstimmung der Entwicklung zwischen Mensch und Affe.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 1. März.

1. Herr Burkhardt macht eine Mitteilung über Bewegung eines Punktes unter Einfluß einer zum Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung.

2. Herr W. v. Dyck berichtet über eine einfache Methode, den Verlauf der Integralkurven im reellen Gebiet übersichtlich zu diskutieren. Zugleich gestattet die Methode, jeweils die typischen Beispiele für die verschiedenen Möglichkeiten von singulären Stellen in ihrer einfachsten Form zu gewinnen und gewisse Fragen über sogenannte Schließungsprobleme zu beantworten.

3. Herr S. Mollier bespricht und legt für die Sitzungsberichte vor eine Untersuchung von Dr. Adele Hartmann, Assistentin am histol.-embryolog. Institut der Universität, über:

Verkalkungsvorgänge im gesunden und rhachitischen Knorpel.

Sitzung am 3. Mai.

1. Herr L. Burmester sprach über

Die konstruktive Bestimmung der ruckweisen Filmbewegung in den Kinematographen.

Die Bilder auf dem bandförmigen Film in den Kinematographen müssen behufs ihrer Projektion je eine sehr kurze Zeit, gewöhnlich $\frac{1}{20}$ Sekunde, im Stillstand sein; dann schnell, in $\frac{1}{60}$ Sekunde, fortbewegt werden, bis wieder das folgende Bild im Stillstand erscheint, so daß in einer Sekunde 15 Bilder zur Projektion gelangen. Dies wird hauptsächlich in zweierlei Weise bewirkt: Erstens vorzugsweise vermittelst des Eingriffes eines Einzahnrades in ein nach seiner Form benanntes Malteserkreuzrad, das auf der Achse einer mit Zäckchen versehenen Trommel befestigt ist; und durch diese Zäckchen, die in entsprechende Löcher des Films eingreifen, wird der Film ruckweise weiter bewegt. Zweitens vermittelst eines Schlägers, der während der Filmbewegung innerhalb einer Sekunde etwa 15 mal auf den Film schlägt und ihm dadurch je eine ruckweise Bewegung erteilt; und während der durch jeden Schlag entstehende Bausch des Films wieder straff gezogen wird, ist das Bild so lange im Stillstand, bis der nächste Schlag erfolgt.

Der Zahn des Einzahnrades, der aus einem zylindrischen Zapfen mit einer auf ihm befindlichen Rolle besteht, greift während ein Viertel der Umdrehung des Einzahnrades in einen der vier Schlitze des Malteserkreuzrades und treibt dieses um ein Viertel seiner Umdrehung und den Film um eine Bildstrecke weiter. Dann aber bleibt das Malteserkreuzrad nebst dem zur Projektion gelangten Bild so lange im Stillstand, bis das Einzahnrad eine ganze Umdrehung vollendet und wieder in den bereitstehenden folgenden Schlitz eingreift. Dieses aus dem Einzahnrad und dem Malteserkreuzrad bestehende Getriebe, welches den wichtigsten Teil des für die Kinotheater verwendeten Kinematographen bildet, ist, wenn jene Rolle

durch ein in dem Schlitz gleitendes Gleitstück ersetzt gedacht wird, ein zentrisches Schleifkurbelgetriebe, das in verschiedener Gestalt bei der Dampfmaschine mit schwingendem Zylinder, bei den Motoren der Flugzeuge, bei Feilmaschinen mit langsamerem Arbeitsgang und schnellerem Leergang angewendet ist. Hiermit ist ein Beispiel gegeben, wie so verschiedenartig angewendete und gestaltete Getriebe unter einem kinematischen Gesetz stehen. Demnach wird die Konstruktion der Diagramme der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Filmbewegung, die durch das aktuell und international gewordene Malteserkreuzrad entsteht, ebenso leicht ausgeführt, wie der Vortragende es für die Bewegung bei dem Schleifkurbelgetriebe schon vor 25 Jahren in seinem Lehrbuch der Kinematik mitgeteilt hat. Durch diese Diagramme wurde die schnelle Veränderung der Geschwindigkeit, sowie die verhältnismäßig groß werdende, sehr schnell zu- und abnehmende Beschleunigung des Films graphisch veranschaulicht. Bei dem Getriebe mit dem Schläger, das durch die Verbindung eines zentrischen und eines exzentrischen Schleifkurbelgetriebes kinematisch ersetzt werden kann, ergibt sich aus dem einfach konstruierbaren Diagramm der Geschwindigkeit und dem weniger einfach konstruierbaren Diagramm der Beschleunigung des Films, daß die Geschwindigkeit sowie die Beschleunigung, deren Anfangsgröße von der Anordnung abhängig ist, sich in geringerem Maße verändern als bei dem Malteserkreuzrad.

2. Herr A. Sommerfeld legt eine Arbeit von Herrn Fritz Nöther vor:

Über die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung.

Dem Verfasser gelingt der theoretische Nachweis für die Instabilität der Strömung zwischen zwei ebenen Platten bei hinreichend großer Strömungsgeschwindigkeit, indem er von einer endlichen (nicht unendlich kleinen) Störung der zu untersuchenden Strömung ausgeht.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Derselbe legt sodann eine Experimentaluntersuchung von Herrn Johannes Stark vor:

Ein-, zwei- und dreiwertige Linien des Argons in Kanalstrahlen.

In dieser wird gezeigt, daß die Linien des „roten Argonspektrums“ positiv einwertige, diejenigen des „blauen Argonspektrums“ zwei- oder dreiwertige Ionen zu Trägern haben.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung des Herrn Perron:

Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt.

Das vorliegende Problem wurde kürzlich von Herrn Nörlund unter der Voraussetzung rationaler Funktionen als Koeffizienten der Differentialgleichung behandelt, und zwar nach einer Methode, welche auf der Anwendung der sogenannten Laplaceschen Transformation beruhend eine Scheidung der Untersuchung in eine verhältnismäßig große Anzahl von Spezialfällen erforderlich macht. Herr Perron gibt eine neue, wesentlich kürzere und alle möglichen Fälle in einheitlicher Weise umfassende Methode, welche zugleich die bei Anwendung der Laplaceschen Transformation nicht zu umgehende Beschränkung auf rationale Koeffizienten überflüssig macht, und knüpft daran Anwendungen auf die Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung und die Herleitung gewisser Kettenbruch-Entwicklungen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr Burkhardt teilt eine konvergente Entwicklung der γ-Funktion für große Werte des Arguments mit.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

6. Herr v. Seeliger legt einige von Professor R. Emden aufgenommene Registrierkurven vor, welche die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe zur Darstellung bringen. Sie wurden mit Hilfe einer Elster- und Geitelschen Kaliumzelle in Verbindung mit einem Edelmannschen Saitengalvanometer gewonnen. Dies Verfahren besitzt vor den bisher benutzten Methoden die Vorzüge ungleich größerer Raschheit, Einfachheit und Exaktheit.

7. Herr v. Dyck berichtet über die auf der Kaiserlichen Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften von Johannes Kepler, die nur zum Teil erst veröffentlicht sind. Im besonderen legt er eine Reihe von Urkunden und Briefen aus den Jahren 1600 bis 1629 vor, welche sich auf die Herausgabe der Tabulae Rudolphinae und der Observationes Tychonis Brahe beziehen und bespricht weiter die in Wien befindlichen Abhandlungen Keplers zur Frage der Einführung des Gregorianischen Kalenders.

Sitzung am 7. Juni.

1. Herr J. Ranke macht im Anschluß an seinen Vortrag am 1. Februar 1913 weitere Mitteilungen zur vergleichenden Anatomie des Menschen- und Affenschädels, welche unter dem Titel: Über Schädelnähte und basale Fugen bei Menschen und Menschenaffen in den Sitzungsberichten gedruckt werden sollen.

2. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung von Edmund Landau:

Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale.

Der Verfasser gibt eine neue, verhältnismäßig einfache und weittragende Bedingung dafür, daß ein Integral mit unendlicher oberer Grenze konvergiert und zwar gegen denselben

Wert, wie der für lim $s = 0$ resultierende Grenzwert desjenigen Integrals, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn man dem Integranden einen Konvergenzfaktor von der Form x^{-s} (wo x die Integrationsvariable, $s > 0$) hinzufügt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr R. v. Hertwig legte eine gemeinsame Arbeit der Herren Haas und Schwarz vom Senckenbergischen Museum in Frankfurt a. M. vor. Diese behandelt auf Grund eines umfangreichen zum größten Teil selbstgesammelten, zum anderen Teil in naturwissenschaftlichen Sammlungen aufbewahrten Materials die Verbreitung der Süßwassermuscheln in den bayerischen Flüssen und Bächen. Durch Kobelt war bewiesen worden, daß unter anderen Arten für das Rheingebiet die Unio batavus, für das Donaugebiet die Unio cytherea charakteristisch sei. Diese Angaben fanden durch die neuen Erhebungen im allgemeinen Bestätigung; doch ergaben sich im einzelnen Abweichungen, welche aber so charakteristischer Art waren, daß sie nur durch die Annahme einer in prähistorischer Zeit erfolgten Veränderung der Flußläufe zu erklären sind. So fand sich im Oberlauf des Neckars und seinem Quellgebiet Unio cytherea als ein Zeichen, daß dieses Gebiet, wie es auch von geologischer Seite angenommen wird, früher einmal seine Wasser der Donau zusandte. Das gleiche stellt sich für den Oberlauf der Regnitz heraus, für welche der besondere Charakter der Funde es weiterhin wahrscheinlich machte, daß sie auf dem Wege der Altmühl ihr Wasser der Donau zuführte. Der Mittellauf des Neckars stimmt im Charakter seiner Muschelfauna (Unio batavus pseudocrusentaneus) mit der Tauber und ihren Zuflüssen überein, was es wahrscheinlich macht, daß der Mittellauf des Neckars früher in die Tauber mündete und sein Unterlauf erst später durch einen Durchbruch nach dem Rhein entstanden ist. Zu einem überraschenden Resultat führte die genaue Untersuchung des Donau-Mainkanals. Dieser hat auf die Durchmischung der Faunengebiete einen sehr untergeordneten Einfluß ausgeübt. Es erklärt sich diese Erschei-

nung daraus, daß der Kanal durch zahlreiche Schleusen abgeteilt ist und daher meist stehendes Wasser und einen zähen, für Muscheln ungeeigneten Schlamm birgt. Das Gesagte gilt nicht für Muscheln der Gattungen Dryssemia und Sphaercum, welche daher auch den Kanal, wahrscheinlich angeheftet an Schiffen, passiert haben. Für Main und Naab ergab die Untersuchung der Muschelfauna im Gegensatz zu neueren geologischen Auffassungen das Resultat, daß keine erhebliche Veränderung im Stromgebiet eingetreten ist.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

Sitzung am 5. Juli.

1. Herr R. v. Hertwig legt vor eine Abhandlung des wissenschaftlichen Hilfsarbeiters an der Zoologischen Sammlung, Herrn Dr. E. Zugmayr:

Über die Fischfauna von Balutschistan.

Diese liefert eine möglichst erschöpfende Zusammenstellung der marinen Küstenfische und der Süßwasserfische, außerdem eine systematische Beschreibung des Fischmaterials, welches der Verfasser auf seiner von der Akademie unterstützten Reise für die Zoologische Staatssammlung mitgebracht hat. Von besonderem Interesse sind die tiergeographischen Resultate. Balutschistan ist ein Land, in welchem die indische und afrikanische Tierwelt zusammentreffen, so daß Vertreter beider Faunen in der Fauna von Balutschistan vertreten sind. Auffallend groß ist die Zahl neuer Arten, welche offenbar dort endemisch sind. Der Verfasser faßt sie als vikariierende Arten auf, welche durch geographische Isolation entstanden sind, und erklärt ihr Vorkommen aus den eigentümlichen klimatischen Verhältnissen des Landes. Balutschistan hat äußerst wenig Niederschläge, so daß die Flüsse durch weite Sandwüsten voneinander getrennt sind. Auch wird die Kontinuität der Flußläufe durch große Dürre oft unterbrochen, was abermals die Isolation von Formen begünstigt. Auf diesen letzteren Faktoren sowie die allmäh-

liche Hebung der Küste führt der Verfasser auch die Erscheinung zurück, daß manche marine Fische sich dem Süßwasserleben angepaßt haben. (Erscheint in den Abhandlungen.)

2. Herr A. Rothpletz legt vor eine Arbeit von Dr. Krenkel:

Fossilien aus dem Unterkarbon des südlichen und östlichen Thian-Schan.

Sie gehört zu der Reihe von Publikationen, welche unter dem Titel: „Aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacherschen Thian-Schan-Expedition“ in den Publikationsorganen der Akademie Veröffentlichung gefunden haben.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Fossilien stammen aus einer Gegend, aus welcher solche bisher nicht bekannt waren, wenn man absieht von den schlecht erhaltenen Resten, die von Stolicza gefunden und irrtümlich als Stringocephalus Burtini beschrieben wurden. Von Forschungsreisenden sind diese Fundorte überhaupt bisher noch nicht besucht worden. Alle dort gefundenen und in dieser Arbeit beschriebenen Versteinerungen haben sich als dem Unterkarbon angehörig ergeben. Merkwürdigerweise sind es aber nur Arten, die eine Parallelisierung mit der oberen Abteilung des Unterkarbons Europas zulassen und zwar speziell mit der Dibunophyllum-Zone Englands und der Visé-Stufe Belgiens. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Sitzung am 8. November.

1. Herr P. v. Groth legte eine Arbeit des korrespondierenden Mitgliedes E. v. Fedorow vor, deren Titel lautet:

Die Grundformeln der sphärischen und ebenen Tetragonometrie.

Die Formeln zu kristallographischen Berechnungen beruhen im wesentlichen auf der sphärischen Trigonometrie, erweisen sich aber als nicht hinreichend zu den vom Verfasser eingeführten „zonalen Berechnungen“, da sie nicht auf die für kristallographische Komplexe gültige Gesetzmäßigkeit, daß aus einer Ebene des Komplexes alle übrigen berechnet werden können, Bezug nehmen. Wenn auf der Kugelfläche vier solche Flächen durch ihre Pole a, b, c, d, welche ein sphärisches Viereck bilden, repräsentiert werden, so sind diese gegeben durch die Seite ab und die sphärischen Koordinaten von c und d (für welche ab als Nullrichtung dient); diese vier Pole bestimmen das vollständige geometrische Netz der Pole des gesamten Flächenkomplexes, deren jeder den Schnittpunkt zweier Großkreise bildet, welche durch je zwei Pole des Netzes gehen. Es werden nun die Formeln hergeleitet, welche gestatten, aus den nach der Universalmethode gemessenen Winkeln einer beliebigen Fläche, d. h. aus den sphärischen Koordinaten ihres Poles, deren Indizes, und umgekehrt aus den Indizes die Winkel, zu berechnen.

Diese Formeln vereinfachen sich beträchtlich für den (bereits von Möbius behandelten) Fall des ebenen geometrischen Netzes. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Richard v. Hertwig legte eine Arbeit des Herrn Dr. A. Laubmann, Hilfsarbeiters an der zoologischen Staatssammlung, vor. Diese behandelt die Vögel, welche Herr Professor Zugmayer von seiner Forschungsreise in Baluchistan mitgebracht hat, 300 Exemplare, die sich auf 89 verschiedene Arten verteilen. Baluchistan ist der Treffpunkt dreier faunistischer Gebiete; von Osten aus ist es durch die indisch-tropische Tier-

welt besiedelt, deren charakteristischer Vertreter der Halsbandsittich Palaeornis torquatus ist, von Norden aus durch zentralasiatisch paläarktische Formen, von denen eine Elsterart, Pica pica bactriana, zu nennen ist. Von Westen aus sind mediterrane Formen wie die Rabenart Corvus corax umbrinus eingedrungen. Innerhalb Baluchistans lassen sich die Verbreitungsgebiete der drei Faunen noch einigermaßen abgrenzen. Manche Arten haben eine Anpassung an ihre Umgebung erfahren, so daß man sie als besondere Unterarten bezeichnen kann, so eine Krähe Corvus splendens Zugmayeri und ein Kiebitz Sarkogrammus indicus aigneri, welche beide in Anpassung an das von ihnen bewohnte Wüstengebiet eine Abblassung und fahle Verfärbung ihres Kolorits erkennen lassen.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

3. Herr Günther legte einen für die Sitzungsberichte bestimmten Aufsatz vor:

Die Glazialhypothese und der Mond.

Bei schärferem Zusehen zeigte sich, daß die Vorstellung, unser Trabant sei von einem Eismantel umhüllt, schon verhältnismäßig alt ist, wie denn z. B. der Philosoph Schopenhauer entschieden für sie eintritt. Die von den verschiedensten Schriftstellern für diese Anschauung beigebrachten Gründe werden geprüft und als mit den Beobachtungstatsachen unvereinbar gekennzeichnet.

4. Herr A. Pringsheim legt folgende drei Abhandlungen für die Sitzungsberichte vor:

a) Von Georg Faber in Straßburg i. E.:

Die Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte.

Über die Identität gewisser Grenzwerte, die man als die Cesàroschen und die Hölderschen Mittelwerte bezeichnet, lagen bisher nur sehr weitläufige und verwickelte Beweise vor. Der Verfasser gibt einen sehr einfachen Beweis eines viel allgemeineren Satzes.

b) Von Georg Faber in Straßburg i. E.:

Über arithmetische Eigenschaften gewisser ganzer Funktionen.

Der Verfasser gibt zuerst einen sehr einfachen Beweis der Transzendenz von π; sodann zeigt er, wie die gleiche Methode zur zahlentheoretischen Erforschung zahlreicher ganzer Funktionen brauchbar ist und gelangt so teils zu neuen Ergebnissen teils zu viel einfacheren Beweisen bekannter Sätze.

c) Von Harald Bohr:

Ein Satz über Dirichletsche Reihen.

Der Verfasser zeigt, daß eine analytische Funktion, welche zunächst für eine gewisse Halbebene durch eine daselbst absolut konvergierende Dirichletsche Reihe definiert ist, in einer umfassenderen Halbebene regulär und beschränkt ist, sobald sie diese Eigenschaften in einer entsprechenden Viertelebene besitzt.

Sitzung am 6. Dezember.

Herr Sommerfeld legt eine Abhandlung vor von Professor O. Blumenthal in Aachen:

Zum Turbulenzprobleme.

Dieselbe knüpft an eine kürzlich in den Sitzungsberichten erschienene Arbeit von Dr. Fritz Nöther an und kommt zu dem Ergebnis, daß auch der so erfolgverheißende Nöthersche Ansatz zur Berechnung einer kritischen Geschwindigkeit bisher nicht führe. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Verzeichnis der im Jahre 1913 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 34, Halbbd. 1, 2, 1912.
— Meteorologisches Observatorium:
— — Deutsches meteorol. Jahrbuch, Jahrg. 12—16 (1906—1910), Karlsruhe 1912.
Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:
— — Argovia, Bd. 35, 1913.
— — Taschenbuch für 1912.
Abbeville. Société d'Émulation:
— — Bulletin trimestriel 1912, No. 3, 4; 1913, No. 1, 2.
— — Mémoires, in 4^0, tom. 5, 1912.
Aberdeen. University:
— — Studies, No. 52—62, 4^0.
Acireale. Accademia:
— — Rendiconti e Memorie, Classe di scienze, vol. 6, 1908—11.
Adelaide. Royal Geographical Society of Australasia:
— — Proceedings, Sess. 1910—12, vol. 12 und 13.
Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. X.
— — Grada, Kniga 7.
— — Ljetopis 27, 1913.
— — Rad, Kniga 193—198.
— — Zbornik, Kniga XVII, 2; XVIII, 1.
— — Rječnik 31.
— — Monumenta spectantia historiam Slavorum, vol. 33.

Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Opera Acad. scient. et artium Slav. merid., vol. 22—24.
— — Mazuranio, vol. 3, 1913.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. XIV, Heft 1, 2; Bd. XV, Heft 1—3.
— Kroat. archäologische Gesellschaft:
— — Vjestnik, Bd. XII, 1912.
— Kroat. Naturwissenschaftl. Gesellschaft:
— — Glasnik, Bd. 24, No. 4; Bd. 25, No. 1—3.
Aix. Société d'études Provençales:
— — Annales de Provence, 8e année, No. 3-6; 9e année, No. 3—6; 12e anné, No. 1, 2.
— Bibliothèque de l'Université:
— — Annales de la faculté de droit, tom. 5, No. 1—4.
Alabama. Geological Survey:
— — Bulletin 5—13.
— — 20 verschiedene Schriften.
Albi. Société des sciences, arts etc. du Tarn:
— — Revue du département du Tarn, année 37, No. 5, 6.
Albuquerque. University of New Mexico:
— — Bulletin, Whole No. 71.
Alençon. Société historique et archéologique de l'Orne:
— — Bulletin tom. 32, No. 1—4.
Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. III, No. 4—6.
— — Miscell. scient. papers, N. Ser. vol. 2, No. 2; vol. 3, No. 1—3.
Altenburg. Geschichts- und altertumsforschender Verein des Osterlandes:
— — Mitteilungen, Bd. 12, Heft 3.
Amani. Biologisch-landwirtschaftliches Institut:
— — Der Pflanzer, 8. Jahrg., No. 12; 9. Jahrg., No. 1—11 und Beiheft 1.
— — Düngungsversuche in den deutschen Kolonien, Heft 1.
Amiens. Société des Antiquaires de Picardie:
— — Bulletin trimestriel, année 1912, trim. 2—4; année 1913, trim. 1.
— — La Picardie, tom. 4.
Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie, deel XVII, 2—6; I. sectie, deel XI, 5, 6.
— — Verslagen en vergaderingen, deel 21, No. 1, 2.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XIII, No. 2; deel XIV, No. 1.
— — Verslagen en mededeelingen, 4. Reeks, deel 11.
— — Jaarboek 1912.

Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Prijsvers, 1913, 1 Stück.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 30, No. 1—6.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 10, stuk 3, 4.
— — Wiskundige opgaven; Register zu deel 11, stuk 4, 5.
— — Revue des publications mathém., tom. 21, partie 1, 2; Register zu tom. 16—20.
— Zoologisch Genootschap:
— — Bijdragen, tom. 19, 1913.
Ann Arbor. Detroit Observatory:
— — Publications, vol. 1, p. 1—72.
— University:
— — University Bulletin, vol. 14, No. 16.
Antwerpen. Société d'Astronomie d'Anvers:
— — Gazette astronomique, No. 63—73.
— — Rapport 1912.
— — Paedologisch Jaarboek, 8. Jahrg. 1913.
Aschaffenburg. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912 und Programm von Günther.
Athen. Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Athena, tom. 24, Heft 4.
— Universität:
— — La Célébration du 75e anniversaire, 1912.
— — Xenia. Hommage International 1912.
— Observatoire National:
— — Annales, tom. 4, 1906.
Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 39. Jahrg., 1913.
Aurillac. Société des lettres, sciences et arts:
— — Revue de la Haute-Auvergne, 14e anné, 1912, fasc. 4; 15e année, 1913, fasc. 1, 2.

Baltimore. Peabody Institute:
— — 46th Annual Report, 1913.
— Chemical Society:
— — American Chemical Journal, vol. 47. No. 3—6; vol. 48, No. 1—6; vol. 49, No. 1—6; vol. 50, No. 1.
— Johns Hopkins University:
— — Circulars 1912, No. 3—7, 9, 10; 1913, No. 1—6.
— — American Journal of Mathematics, vol. 34, No. 2—4; vol. 35, No. 1—3.

Baltimore. Johns Hopkins University:
— — American Journal of Philology, No. 129—134.
— — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, No. 263—274.
— — Studies in historical and political Science, vol. 30, No. 2, 3; vol. 31, No. 1, 2.

Bamberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Brosius.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.
— K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1912/13.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 70, 1912.

Barbados. Imp. Commissioner of agriculture:
— — Agricultural News, No. 279—302.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Boletin, vol. 3, No. 4.
— — Memorias, vol. 10, No. 13—23.
— — Nomina del personal 1912/13.
— Club Montanyenc:
— — Bulletti, any 1, No. 8-10.
— Institut d'Estudis Catalans:
— — L'arquitectura Romanica, vol. 2, 1912.

Bar-le-Duc. Société des lettres, sciences et arts:
— — Mémoires, IV. sér., tom. 10, 1912.

Basel. Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. XII, Heft 2; Bd. XIII, Heft 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 23.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.
— — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1912/13.

Bastia. Société des sciences historiques et naturelles:
— — Bulletin, fasc. 343—351.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 54, afl. 5, 6; deel 55, afl. 1—6.
— — Notulen van de vergaderingen, deel 50, afl. 1—4; deel 51, afl. 1, 2.
— — Verhandelingen, deel 59, afl. 4: deel 60, afl. 1.
— — Rapporten van de commissië in Nederlandsch-Indie 1912.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Commissië in Niederlandsch Indie von oudheidkundig ondetzock 1912, 4.
— — Oudheidkundig verslag 1912; 1913, 1—3.
— — Dagh-Register 1680.
— R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Regenwaarnemingen, vol. 32, No. 2.
— Kon. Natuurkundige Vereenigung in Nederlandsch-Indie:
— — Tijdschrift, deel 70, 71.
Bayreuth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Gottanka.
— Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 25, Heft 2.
Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:
— — Spomenik, vol. 51.
— — Zbornik Srpski Etnografski, vol. 18, 20.
— — Zbornik istorijski, Sect. II, vol. 4.
— — Glas, vol. 87, 89, 90, 92.
Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarsberetning for 1912.
— — Aarbog 1912, Heft 3; 1913, Heft 1, 2.
— — Sars G. O., Crustacea, vol. VI, 1, 2.
Bergzabern. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.
Berkeley. University of California:
— — Bulletin, third Serie, vol. IV, No. 10—12; vol. V, No. 12—15; vol. VI, No. 2, 3, 5—7, 9—11.
— — Chronicle, vol. 14, No. 3. 4; vol. 15, No. 1, 2.
— — Prize Essays, vol. 1, 1912.
— — Publications, American Archaeology etc., vol. 10, No. 4; vol. 11, No. 1; Botany, vol. 4, No. 11, 15—18; vol. 5, No. 1—5; Education, vol. 3, No. 3, 4; Engineering, vol. 1, No. 2; Geology, vol. 6, No. 8 bis 19; vol. 7, No. 4—12; History, vol. 1, No. 2; Mathematic, vol. 1, No. 3; Pathology, vol. 2, No. 1—3, 9, 10; Class. Philology, vol. 2, No. 6, 7; Modern Philology, vol. 2, No. 2; vol. 3, No. 1; Semitic Philology, vol. 3, No. 1; Philosophy, vol. 2, No. 5; Physiology, vol. 4, No. 6, 16, 17; Zoology, vol. 7, No. 7, 8; vol. 8, No. 2—7; vol. 9, No. 6—8; vol. 10, No. 9; vol. 11, No. 1, 3, 4.
— — Academy of Pacific Coast history, vol. 2, No. 1—5; vol. 3, No. 1.
— Library of University:
— — Contents — Index, vol. 1, 1889/90.

Berkeley. College of Agriculture:
— — Bulletin 212—214, 229—236.
Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1912, 1913, 1—7, 4⁰.
Physikal.-math. Klasse, 1912, 1913, 1, 4⁰. }
— — Sitzungsberichte 1912, No. 29—53; 1913, No. 1—40.
— — Acta Borussica, Münzwesen, münzgeschichtlicher Teil, Bd. 4.
— — Inscriptiones Graecae, vol. XI, fasc. 2 = (Inscr. Deli); vol. V, fasc. 1, 2.
„ „ Editio minor, Pars I, fasc. 1.
— Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft:
— — Geschäftsberichte 1907/08 bis 1912/13.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 21, No. 2—4; Bd. 22, No. 1.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 46. Jahrg., No. 1—17.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 64, Heft 4; Bd. 65, Heft 1—7.
— — Monatsberichte 1912, No. 7—12; 1913, No. 1—3.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 43, 1913.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 68. Jahrg., 1912, 1—3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 15, No. 1—22.
— Physiologische Gesellschaft:
— — Zentralblatt für Physiologie, Bd. 26, No. 20—26a; Bd. 27, No. 1—19.
— — Bibliographia physiologica, III. Serie, Bd. 8, No. 1—4.
— K. Technische Hochschule:
— — Rede von Josse, 1913.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd. 41, Heft 3; Bd. 42, Heft 1, 2.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 27, Heft 3, 4; Bd. 28, Heft 1, 3.
— — Antike Denkmäler, Bd. 3, Heft 2, 1912/13.
— Kaiser Wilhelms-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie:
— — 1. Jahresbericht.
— K. Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen, No. 255—269.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Potonié, Lief. 7—9.
— — Abhandlungen, N. F., Heft 68.

Berlin. Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Jahrbuch 1912 I 1, 2; II 1, 2.
— — Beiträge zur geologischen Erforschung der deutschen Schutzgebiete, Heft 4.

— Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
— — 31. Bericht, 1912.

— Motorluftschiff-Studiengesellschaft:
— — Jahrbuch 1907/08 bis 1912/13.

— Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1915.

— K. Sternwarte:
— — Beobachtungsergebnisse No. 15.

— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1913, No. 2—24.

— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 25, 2. Hälfte; Bd. 26, 1. und 2. Hälfte.

— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1913, No. 1—12.

— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift, 33. Jahrg., No. 1—12.

— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. II, Heft 1—3.

Bern. Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
— — Actes de la 95. Session, tom. 1, 2.
— — Neue Denkschriften, Bd. 47, 1913.

— Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Quellen zur Schweizer Geschichte, N. F., Bd. 2, 2 und 4 I, 1.
— — Jahrbuch, Bd. 38.

— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 22, 1 und Register zu Bd. 1—20.

— Universitätskanzlei:
— — Schriften der Universität, 1912/13.

Besançon. Société d'Emulation du Doubs:
— — Mémoires, sér. VIII, vol. 6, 1911.

Béziers. Société archéol., scientif. et littéraire:
— — Bulletin, 3. sér., tom. 9, livr. 2.

Bistritz. Deutsches Gewerbelehrlingsinstitut:
— — Jahresbericht 37 und 38.

Bologna. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto:
— — Classe di scienze morali: a) Sezione di scienze storico-filologiche, Memorie, ser. I, tom. 7; b) Sezione di scienze giuridiche, Memorie, ser. I, vol. 7. Classe di scienze fisiche: Memorie 9, 1911/12.
— — Rendiconto, Classe di scienze morali, vol. 6, 1912/13.
— — Rendiconto, Classe di scienze fisiche, N. S., vol. 16, 1911/12.
— R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna:
— — Atti e Memorie, ser. IV, vol. 2, fasc. 4—6; vol. 3, fasc. 1—3.
— — Documenti e Studi, vol. 3.
— Osservatorio astronomico e meteorologico:
— — Osservazioni dell' annata 1912.
Bombay. Government:
— — Rainfall, vol. 2, 1912.
— Meteorol. department siehe Simla.
— Archaeological Survey of India:
— — Progress report of 1911/12.
Bonn. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13.
— Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 122, 1—3.
— — Bericht der Kommission für Denkmalpflege 1910/11.
— Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande:
— — Verhandlungen, 69. Jahrg., 1. und 2. Hälfte.
— — Sitzungsberichte 1912, 1. und 2. Hälfte.
Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles:
— — Procès-verbaux 1911/12.
— Société de géographie commerciale:
— — Bulletin 1912, année 38, No. 8—12; 1913, année 39, No. 1—5.
— Société Linnéenne:
— — Actes, vol. 66, 1912.
Boston. American Academy of Arts and Sciences:
— — Memoirs, XIV, 1.
— — Proceedings, vol. 48, No. 8, 11—21; vol. 49, No. 1—7.
— American Urological Association:
— — Transactions, vol. 7, 1913.
— Museum of Fine Arts:
— — Bulletin, No. 61—66.
— — Annual Report 37, 1912.
Bourg. Société d'émulation:
— — Annales 45, 1912, April—Sept.
Braunschweig. Archiv der Stadt:
— — Quellen und Forschungen, Bd. 5.

Braunschweig. Verein für Naturwissenschaften:
— — 17. Jahresbericht, 1911/13.
— — Geitel, Radioaktivität.
Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Jahrbuch, 23. Jahrg., 1912.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 21, Heft 2; Bd. 22, Heft 1.
Breslau. Technische Hochschule:
— — Diplomprüfungsordnung 1913.
— — Personalverzeichnis, W.-S. 1913/14.
— — 3 Dissertationen.
Brisbane. Queensland Museum:
— — Annals, 2, 3, 7—10.
— Geographical Society:
— — Geographical Journal, vol. 26/27.
Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):
— — Jahresbericht 11.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 5, No. 1—3.
— Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 5, Heft 3—5; Bd. 6, Heft 1.
Brooklyn. Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences:
— — Science Bulletin, vol. 2, No. 1, 2.
Brünn. Mährisches Landesmuseum:
— — Časopis, Bd. 13, Heft 1, 2.
— Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 17. Jahrg, Heft 1—4.
— Naturforschender Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 50.
— — Bericht der meteorologischen Kommission 26, 1907.
Brüssel. Académie Royale de médicine:
— — Mémoires couronnés, Collection in 8^0, tom. 21, fasc. 1, 3.
— — Bulletin, IVe sér., tom. 26, No. 10, 11; tom. 27, No. 1—9.
— Académie Royale des sciences:
— — Annuaire 1913.
— — Bulletin: a) Classe des lettres, 1912, No. 12; 1913, No. 1—8; b) Classe des sciences, 1912, No. 12; 1913, No. 1—8.
— — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 8^0, IIe sér., tom. 3, fasc. 6.
— — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 8^0, tom. 8, fasc. 2; tom. 9, fasc. 2, 3; tom. 10, fasc. 1, 2; tom. 11, fasc. 1.

Brüssel. Académie Royale des sciences:
— — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 4⁰, IIe sér., tom. 6, fasc. 1.
— — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 4⁰, IIe sér., tom. 4, fasc. 1, 2.
— — Programme des concours, Classe des sciences, 1914.
— — Croniques Liégeoises, tom. I.
— — Cartulaire de l'eglise S. Lambert, tom. 5, 1913.
— Jardin botanique:
— — Bulletin, vol. 3, fasc. 3, 1912.
— Ministère des Colonies:
— — Annales du Musée du Congo Belge, sér. III, tome 1, fasc. 1.
— Musée R. d'Histoire naturelle de Belgique:
— — Mémoires, 1912, Le Riche.
— Observatoire Royal siehe Uccle.
— Société d'archéologie:
— — Annales 1912, No. 3, 4; 1913, No. 1.
— — Annuaire, tom. 24. 1913.
— — Table des publications 1887—1911.
— — 25 Années d'activité 1887—1912.
— Société des Bollandistes:
— — Analecta Bollandiana, tom. 32, fasc. 1—4.
— Société R. botanique de Belgique:
— — Bulletin, tom. 49, fasc. 1—4; tom. 51, fasc. 1.
— Société chimique:
— — Bulletin, année 27, No. 1—12.
— Société entomologique de Belgique:
— — Annales, tom. 56, 1912.
— — Mémoires, tom. 21, 1912.
— Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie:
— — Bulletin: a) Mémoires, tom. 26, No. 3; tom. 27, No. 1; b) Procès-verbal, tom. 26, No. 9, 10; tom. 27, No. 1—6.
— Société Royale zoologique et malacologique:
— — Annales, tom. 47, 1912.
— Bryn Mawr College:
— — Monograph Series, vol. 11—13.
Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 26, Heft 4; Bd. 27, Heft 1—4; Bd. 28, Heft 1—4.
— — Almanach 1913.
— — Rapparten 1912.
— — Ungarische Rundschau, Jahrg. 1, No. 4; Jahrg. 2, No. 1—3.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Regi magyar Költök tara (Magazin alter ungarischer Dichter), Bd. 7, 1912.
— — Nyelvtudományi (Sprachwissenschaft), Bd. 4, No. 2, 3.
— — Monumenta Hungariae Historica, vol. 36, 37.
— — Értekezések, Nyelvtudományi (sprachwissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 21, No. 10; Bd. 22, No. 4—6.
— — Értekezések, Farsadalomtudomanyi (sozialwissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 14, No. 6.
— — Értekezések, Történettudományi (geschichtswissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 23, No. 4, 5.
— — Közlemények, Nyelvtudományi (sprachwissenschaftliche Mitteilungen, Bd. 41, No. 3, 4.
— — Közlemények, Mathemat. es termeszetted, Bd. 31, No. 1, 2.
— — Értesitö, Archaeologiai N. F., Bd. 31, No. 4, 5; Bd. 32, No. 1—5; Bd. 33, No. 1—3.
— — Értesitö, Mathemat., Bd. 30, No. 3—5; Bd. 31, No. 1, 2.
— — Értekezések Philosophiae es Farsadalomtudományi (philosophische und sozialwissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 1, No. 1, 2.
— — Történeti Szemle (geschichtswissenschaftliche Rundschau), Bd. I, No. 1—4; Bd. II, No. 1—3.
— — Einzelwerke, 1912, 11 Bände.
— Statistisches Bureau:
— — Publikationen, No. 49.
— — Jahrbuch 10, 1907—08.
— Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 23, Heft 6; Jahrg. 24, Heft 1—5.
— K. Ungarische Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, vol. 39, livr. 7—10; vol. 40, livr. 9, 10; vol. 41, livr. 1—5.
— K. Ungarische Gesellschaft für Naturwissenschaften:
— — Steiner, Anjeszky.
— — Botanikai Közlemények 1912, Bd. 11, No. 1—6.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 49, Heft 1—6; Bd. 50, Heft 1—5.
— — Bibliographie 1912, Dezember; 1913, Januar, Februar.
— Landesrabbinerschule:
— — Jahresbericht 36, 1912/13.
— Ungarisches Nationalmuseum:
— — Ertesitöje, XIII. Jahrg., 3, 4; XIV. Jahrg., 1, 2.
— K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Földtani Közlöny, Bd. 42, 1912, Heft 9/10, 11/12; Bd. 43, Heft 1—3.
— — Jahrbuch, Bd. 20, No. 6, 7; Bd. 21, No. 1—6.

Budapest. K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. 20, Heft 2—7; Bd. 21, Heft 1.
— — Jahresbericht 1910 und 1911.
— Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus:
— — Verzeichnis der erworbenen Bücher, No. 9, 1911.
— — Jahrbücher, vol. 38, No. 2, 3; vol. 39, No. 1—4.
— K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 19, 1912.

Buenos Aires. Museo nacional publico:
— — Anales, ser. III, tom. 23, 1913.
— Instituto geografico militar.:
— — Anuario 1912.
— Sociedad cientifica:
— — Anales, tom. 73, No. 6; tom. 74, No. 1—6; tom. 75, No. 1—6; tom. 76, No. 2, 3.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Bulletin, No. 47, 4⁰.
— — Mededeelingen, No. 17.
— — Mededeelingen van het agricultur-chemisch laboratorium, No. 3—5.
— — Mededeelingen van de afdeeling voor planten ziekten, No. 1—6.
— — Mededeelingen voor thee, No. 24—27.
— — Mededeelingen uit den kulturtuin, No. 1.
— — Jaarboek 1911.
— — Bulletin du jardin botanique, II. sér., No. 9—12.

Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section scientific de l'Académie Roumaine 1912/13, No. 1—6; 1913/14, No. 1—3.
— Meteorologisches und Astronomisches Institut:
— — Analele inst. meteorologic al Romanici, tom. 18, anul 1902, tom. 19, anul 1903, part 3.
— Société des Sciences:
— — Bulletin, anul 21, No. 6; anul 22, No. 1—5.

Burghausen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Zacher.

Burma (India). Archaeological Survey:
— — Report of the superintendent, 1911/12.

Caen. Société Linnéenne de Normandie:
— — Bulletin, sér. VI, vol. 3, 4, 1910/11.
— — Mémoires, vol. 24, 1.

Cairo. Institut Égyptien:
— — Bulletin, sér. V, tom. 6, fasc. 2; tom. 7, fasc. 1.

Calcutta. Indian Association for the Cultivation of Science:
— — Bulletin No. 7, 8.
— Board of Scientific Advice for India:
— — Annual Report 1911/12.
— Imp. Department of agriculture:
— — Report on the progress of agricultura in India 1911/12.
— Meteorological Department of the Government of India siehe Simla.
— Indian Museum:
— — Memoirs, vol. 3, part 3.
— — Records, vol. 7, No. 1—5; vol. 8, No. 1, 2; vol. 9, No. 1, 2.
— — Annual Report 1911/12.
— — Echinodermata of the Indian Museum, part 7.
— Mathematical Society:
— — Bulletin, vol. 1, No. 4.
— Royal Asiatic Society of Bengal:
— — Journal, vol. 74; vol. 75, No. 1, 2.
— — Journal and Proceedings, 1909, vol. 5; 1910, vol. 6; 1911, vol. 7, No. 1—11; 1912, vol. 8, No. 1—10.
— — Memoirs, vol. 3, No. 5—7.
— Archaeological Survey:
— — Annual Report 1911/12.
— — „ „ in 4⁰, 1908/09.
— Geological Survey of India:
— — Memoirs, vol. 39, part 2; vol. 40, part 1; vol. 41.
— — Records, vol. 43, part 1, 2.
— Survey of India:
— — Professional paper, No. 12, 13.
Cambridge (Engl.). Antiquarian Society:
— — Proceedings, No. 62/63 = 16, 2, 3; No. 64 = 17, 1.
— — List of members 1913.
— — Publications in 8⁰, No. 37, 46.
— Philosophical Society:
— — Proceedings, vol. 17, No. 1 3.
— — Transactions, vol. 22, No. 2, 3.
Cambridge (Mass.). Peabody Museum of American Archaeology and Ethnology:
— — Memoirs, vol. 6, 1913.
— Museum of comparative Zoology at Harvard College:
— — Bulletin, vol. 54, No. 15—21; vol. 55, No. 2; vol. 57, No. 2.
— — Memoirs, vol. 36; vol. 40, No. 5—7.
— Astronomical Observatory of Harvard University:
— — 67th Annual Report 1912, 1912/13.

Cambridge (Mass.). Astronomical Observatory of Harvard University:
— — Annals, vol. 56, No. 8; vol. 61, No. 4, 5; vol. 63, No. 6, 7; vol. 67; vol. 74; vol. 75, No. 1, 2.
— — Circular, No. 175—179, 4⁰.
Capetown. South African Association of Science:
— — Journal, vol. 9, No. 5—13; vol. 10, No. 1—3.
— — Report of the 11th meeting 1913.
— — Circular, No. 2.
— Geological Commission:
— — Annual Report 16, 1911.
— South African Museum:
— — Annals, vol. 12, p. 1.
— R. Society of South Africa:
— — Transactions, vol, 3, No. 1, 2.
Catania. Accademia Gioenia di scienze naturali:
— — Atti, ser. V, Anno 89, vol. V, 5.
— — Bollettino, fasc. 24—27.
— Società degli spettroscopisti:
— — Memorie, ser. II, vol. 2, disp. 1—12.
— Società di storia patria per la Sicilia Orientale:
— — Archivio storico, anno 10, No. 1—3.
Chalons s. S. Société d'histoire et d'archéologie:
— — Catalogue des collections de la Société, partie 1.
Charkow. Société mathématique:
— — Communications, tom. 13, fasc. 1—6; tom. 14, fasc. 1, 2.
— Université Imperiale:
— — Sapiski 1912, No. 4; 1913, No. 1—3; Register zu 1893—1912.
Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1912.
Château-Thierry. Société historique et archéologique:
— — Annales, année 1911 und 1912.
Chicago. Academy of sciences:
— — Bulletin, vol. 2, No. 3, 4; vol. 3, No. 1—5.
— — Special Publication, No. 3.
— John Crerar Library:
— — 18th Report for the year 1912.
— Field Museum of Natural History:
— — Publications, No. 151, 159, 161—168.
— University Library:
— — The astrophysical Journal, vol. 37, No. 1—5; vol. 38, No. 1—4.
Christiania. Norske geografiska Selskab:
— — Aarbok 23, 1911/12.

Christiania. Videnskabs Selskabet:
— — Forhandlinger, Aar 1912.
— — Skrifter, 1912, I, 1, 2, II.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Hundretaarsjubiläum 1911.
Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 41. und 42. Jahresbericht, 1911 und 1912.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — 54. Jahresbericht, 1912/13.
Cincinnati. Lloyd Library:
— — Mycological writings, No. 38.
— — Bibliographical contributions, No. 9—12.
— Society of Natural History:
— — Journal, vol. 21, No. 3.
— University:
— — University Studies, vol. 8, No. 1, 2.
Claremont. Pomona College:
— — Journal of entomology, vol. 4, No. 4; vol. 5, No. 1—3.
Clermont. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts:
— — Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne, sér. II, 1912.
Cleveland. Archaeological Institute of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 16, No. 4; vol. 17, No. 1, 2.
— — Bulletin, vol. 3, No. 4.
— Physical Laboratory:
— — Abstract Bulletin, vol. 1, No. 1.
Colmar. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 12, 1913.
Colombo. Department of agriculture:
— — Bulletin, No. 2—6.
— Museum:
— — Spolia Zeylonica, vol. VIII, part 32, 33.
Columbia. Laws Observatory:
— — Bulletin, No. 20.
Como. Società storica:
— — Periodico, No. 79, 80.
— — Raccolta Storica, vol. 6, No. 10.
Concarneau. Laboratoire maritime:
— — Travaux scientifiques, tom. 4, fasc. 3—5.
Czernowitz. K. K. Franz Josephs-Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1913.
— — Personalstand 1912/13.
— — Inauguration des Rektors 1912/13.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 12, No. 1—4.
— — Zeitschrift, Heft 55.
— — Quellen und Darstellungen, Bd. 9, 1913.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. XIII, Heft 1, 2.
— Technische Hochschule:
— — Schriften des Jahres 1911/12.
— — Personalverzeichnis S.-S. 1913; W.-S. 1913/14.
— — Programm 1913/14.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — Bericht 34.

Darmstadt. Historische Kommission für Hessen:
— — 5. Hauptversammlung 1913.
— Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, Ergänzungsband 4, Heft 4, N. F., Bd. 8, 1—3.
— — Quartalblätter; Titel und Register zu 1901—05.

Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1912, Dezember; 1913, Januar—November.
— — Jahresübersicht der Beobachtungen 1912.

Dehra Dún (India). Trigonometrical Survey:
— — Account of the operations, vol. 19, 1910.

Delft. Technische Hoogeschool:
— — 6 Dissertationen, 1912/13.

Denver (Colorado). Colorado Scientific Society:
— — Proceedings, vol. X, pag. 211—414.

Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 1 und Beiheft 1.

Dijon. Société Bourguignonne de géographie et d'histoire:
— — Mémoires, tom. 27, 1912.

Dillingen. Historischer Verein:
— — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 3, Lief. 3/4; Bd. 4, Lief. 3/4.

Disko. Danske arktiske station:
— — No. 6.

Donaueschingen. Verein für Geschichte und Naturgeschichte der Baar:
— — Schriften, 13, 1913.

Douai. Union géographique du Nord de la France:
— — Bulletin, année 33, trim. 3, 4; année 34, trim. 1—4.

Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 34, 1913.
— — Jahresbericht 1912.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1910, 1. Hälfte; 1911, 1. Hälfte.
— — Dekaden-Monatsberichte 1911, Jahrg. 14.
— Flora, K. Sächsische Gesellschaft für Botanik und Gartenbau:
— — Jahrg. 17, 1912/13.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1913, No. 3—24.
— Verein für Erdkunde:
— — Mitteilungen, Bd. II, Heft 5—7.
— — Mitgliederverzeichnis 1912 und 1913.
— Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 21, 1—4, 1912; Register zu Bd. 18—21.
— — Mitteilungen, Heft 23, 1912.
Drontheim. Norske Videnskabens-Selskab:
— — Skrifter 1912.
Dublin. Royal Irish Academy:
— — Proceedings, vol. 29, sect. A, No. 5; sect. B, No. 7—9; sect. C, No. 9; vol. 30, sect. A, No. 5, 6; sect. C, No. 12—21; vol. 31, No. 3, 25, 32—34, 42, 45, 48—50, 55, 61, 62; vol. 32, sect. A, No. 1; sect. B, No. 1, 2; sect. C, No. 1—4.
— Royal Dublin Society:
— — The Economic Proceedings, vol. 2, No. 5, 6.
— — The Scientific Proceedings, vol. 13, No. 27—39; vol. 14, No. 1—7.
Dürkheim. Pollichia:
— — Mitteilungen, No. 27/28, 1911/12.
— Progymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.

Edinburgh. R. College of Physicians:
— — Reports from the laboratory, vol. 12, 1913.
— R. Botanic Garden:
— — Notes, No. 21—25, 34, 36.
— Botanical Society:
— — Transactions and Proceedings, vol. 26, No. 1.
— Royal Society:
— — Proceedings, vol. 32, part 5; vol. 33, part 1—3; vol. 48, part 3, 4; vol. 49, part 1, 2.

Edinburgh. Royal Physical Society:
— — Proceedings, vol. 19, No. 1—4.

Einbeck. Verein für Geschichte und Altertümer:
— — 9. Jahresbericht 1902—1912.

Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1912/13.

Emden. Naturforschende Gesellschaft:
— — 96. und 97. Jahresbericht.
— — Upstalsboom-Blätter, Jahrg. 2, No. 1—6.
— Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Jahrbuch, Bd. 18, 1.

Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 38.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 33 und 34.

Erlangen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Wendler.
— K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus den Jahren 1911/12 und 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.

Ferrara. Accademia di scienze mediche:
— — Atti, Anno 85, fasc. 1, 2; 86, fasc. 1, 2; 87, fasc. 1, 2.

Fiume. Deputazione Fiumana di storia patria:
— — Bulletino, vol. 3.

Florenz. Reale Accademia dei Georgofili:
— — Atti, ser. V, vol. 10, disp. 1—4.
— Biblioteca Nazionale Centrale:
— — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane, No. 145—156.
— Società Asiatica Italiana:
— — Giornale, vol. 25, 1912.
— R. Istituto di studi superiori practici e di perfezionamento:
— — Mattiolo. — de Stefani. — Baduel. — Lemni. — Gabrieli.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 31, 2, 3; Bd. 34, 3.
— — 43. Bericht, Heft 1—4.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1911/12.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde:
— — Archiv für Frankfurts Geschichte, 3. Folge, Bd. 11.

Frankfurt a. M. Römisch-germanische Kommission des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — 6. Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung, 1910/11.

Frankfurt a. O. Naturwissenschaftlicher Verein für den Regierungsbezirk Frankfurt a. O.:
— — Helios, Bd. 27.

Frauenfeld (Schweiz). Thurgauische Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 20, 1913.

Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land":
— — „Schau ins Land", 40. Jahrlauf, 1. und 2. Hälfte.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 20, Heft 1.
— Universität:
— — Schriften aus den Jahren 1911/12 und 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.

Friedberg i. H. Geschichtsverein:
— — Dreher, Friedberg einst und jetzt.

Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 41, 1912.

Fürth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Helmreich.

Geestemünde. Männer vom Morgenstern:
— — Jahresbericht 14 und 15, 1911—13.

Geneva. U. St. Agricultural Experimental Station:
— — Bulletin, No. 349—353, 355—365.
— — Technical Bulletin, No. 22—31.

Genf. Conservatoire et jardin botanique:
— — Annuaire 15/16 = 1911/12.
— Institut National Genevois:
— — Bulletin, tom. 40, 1913.
— — Mémoires, tom. 21, 1910.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tom. X, No. 4, 5; tom. XI, No. 1—4.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin, tom. 3, livr. 6, 7.
— — Mémoires, vol. 32, No. 1.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 37, fasc. 3.
— — Compte rendu des séances 29, 1912.

Genf. Universität:
— — Thèses 1911/12.

Gent. Vlaamsche Academie van tal- en letterkunde:
— — Verslagen 1912, 11, 12; 1913, 1—11.
— — Jaarboek 1913.
— Het Vlaamsch Natuur- en geneeskundig Congres:
— — Handelingen van het 16. Congres 1912.

Genua. Museo civico di storia naturale:
— — Annali. Ser. III. Bd. 45, 1913.

Giessen. Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 20.
— Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht, medizinische Abteilung. N. F., Bd. 7 uud 8; naturwissenschaftliche Abteilung. Bd. 5.

Glasgow. Geological Society:
— — Transactions, vol. 14. part 2, 3.

Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 89.

Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1912, No. 11, 12; 1913, No. 1—9.
— — Abhandlungen. N. F., a) Philol.-hist. Klasse, Bd. 14, No. 3—5; b) Math.-phys. Klasse, Bd. 8, No. 5; Bd. 9, No. 4.
— — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse 1912, Heft 3, 4; 1913, Heft 1 und Beiheft; b) Math.-phys. Klasse 1913, Heft 1—3; c) Geschäftliche Mitteilungen 1912, Heft 2; 1913, Heft 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1912/13.

Granville (Ohio). Scientific Association of Denison University:
— — Bulletin, vol. 17, articles 5—7.

Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1913, W.-S. 1913/14.
— — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1913/14.
— Historischer Verein für Steiermark:
— — Zeitschrift, Jahrg. 10, Heft 1—4; Jahrg. 11, Heft 1/2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Mitteilungen, Bd. 49.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 13 und 14.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern:
— — Mitteilungen, 43. Jahrg., 1912.

Grenoble. Académie Delphinale:
— — Bulletin, V. sér., tom. 5, 1911; tom. 6, 1912.

Grenoble. Société de statistique des sciences naturelles et des arts industriels:
— — Bulletin, Supplément III (Pilot de Thorey).
— Université:
— — Annales, tom. 24, 1912, trim. 4; tom. 25, trim. 1, 2.

Grimma. Fürsten- und Landesschule:
— — Jahresbericht 1912/13, 4⁰.

Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 11, Heft 5—8; Bd. 12, Heft 1—4.

Gunzenhausen. K. Realschule:
— — Jahresbericht 20, 1912/13.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1913.
— — K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, VII. Reeks, deel 67, afl. 4; deel 68, afl. 1—4; deel 69, afl. 1.
— — Naamlijst der leden, 1913.

Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III A, tom. 3, livr. 1, 2.

Habana. Sociedad economica de Amigos del Pais:
— — Revista bimestre Cubana, vol. 7, No. 5, 6; vol. 8, No. 1, 4, 5.

Halifax. Nova Scotian Institute of Science:
— — Proceedings and Transactions, vol. 12, part 4, 1909/10.

Hall. K. K. Franz Joseph-Gymnasium:
— — Programm 1912/13.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Leopoldina, Heft 49, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 67, Heft 1—4.
— — Abhandlungen, Bd. 13, Heft 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen, N. F., No. 2, 1912.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1913, W.-S. 1913/14.
— — Amtliches Verzeichnis des Personals etc., 183 = 1913; 184 = 1914.
— — Akademische Preisverteilung, 1911 und 1912.
— — Rektoratsrede 1913.

Halle. Universität:
— — Chronik 1912/13.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Jahresbericht für 1893/94; 1912/13.
— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 2, Heft 2; Bd. 3, Heft 1, 2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
— — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 84, No. 1—6.

Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 29, 1911 und Beiheft 1, 2, 4—10.
— — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden 1911, 4⁰.
— — Staatshaushaltsberechnung 1911, 4⁰.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1913, 4⁰.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1912, 4⁰.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 2.
— Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Mitteilungen 1913, No. 1—43.
— Deutsche Seewarte:
— — Aus dem Archiv, Bd. 35, No. 1, 2; Bd. 36, No. 1, 2.
— — 35. Jahresbericht für das Jahr 1912, 4⁰.
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 41, No. 2—12.
— — Dekadenberichte 1912, No. 32—36; 1913, No. 1—29.
— — Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen, Heft 21.
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, Jahrg. 34.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 30. Jahrg., 1912.
— — Zeitschrift, Bd. XVII und XVIII, 1.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 20, Heft 1.
— — Verhandlungen III, 19 = 1911.

Hannover. Naturforschende Gesellschaft:
— — 60./61. Jahresbericht, 1912.
— Technische Hochschule:
— — 4 Dissertationen von 1912/13.
— Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 16. Jahrg., Heft 1—4.
— — Bericht über das Kestner-Museum 1888—93.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1912, Heft 1—4.

Hanoi. École Française d'Extrême Orient:
— — Bulletin, tom. 12, No. 5–9; tom. 13, No. 1, 2.

Hartford. Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin, No. 20, 21.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philologisch-philosophischen Klasse, 1912, No. 1.
— — Abhandlungen der math.-naturw. Klasse, 1912, No. 2.
— — Sitzungsberichte, a) philol.-histor. Klasse, 1912, No. 14—19; 1913, No. 1—12; b) math.-naturw. Klasse, 1912, A 17—19, B 8, 9; 1913, A 1—18, 20, 21, B 1–9.
— — Jahresheft 1912.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 6, No. 8.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus den Jahren 1911/12 und 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.
— — Gottlieb, Arzneibehandlung, 1913.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 17, Heft 1.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 12, Heft 2, 3.

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 10, Abt. Helgoland, Heft 2; Bd. 15, Abt. Kiel.

Helsingfors. Finnische Akademie der Wissenschaften:
— — Annales, ser. A, vol. 3; ser. B, vol. 1; vol. 5, No. 1—3; vol. 6–8.
— — Documenta historica, Bd. 3, 4.
— — Communications 1—12.
— Finnische Altertumsgesellschaft:
— — Suomen Museo XIX, 1912.
— — Tidskrift 26, 1912.
— — Finlands Kyrken 1, 1912.
— Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Acta, tom. 41, No. 9, 11; tom. 42, No. 1—4; tom. 43, No. 2; tom. 44, No. 1; tables générales 1838—1910.
— — Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, Heft 75, 1; Heft 76, 1.
— — Finnländische hydrologisch-biologische Untersuchungen, No. 10.
— Svenska litteratursallskapet i Finland:
— — Skrifter 110—112.
— Sällskapet för Finlands geografi:
— — Fennia, Bd. 31, 1909/10; Bd. 32, 1911/12.

Helsingfors. — Senatsdruckerei:
— — Meddelanden fran Industristyrelsen, Heft 57 und 58.
— Societas pro fauna et flora Fennica:
— — Acta 36.
— — Meddelanden, 38, 1911—12.
— Schwedische Literaturgesellschaft:
— — Skrifter 110—112.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.

Hendaye. Observatoire d'Abbadia:
— — Observations, tom. 11, 1912.

Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Archiv, N. F., Bd. 38, Heft 3; Bd. 39, Heft 1.
— — Jahresbericht 1912.
— Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften:
— — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 62, 1912, 1—6.

Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:
— — Schriften, Heft 66—68.

Hobart Town. R. Society of Tasmania:
— — Papers and proceedings 1912.

Hohenleuben. Voigtländ. altertumsforschender Verein:
— — Reussische Forschungen, Festschrift für Berthold Schmidt.

Homburg i. Pf. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 40. Jahrg., 1913.

Indianopolis. Academy of sciences:
— — Proceedings 1910 und 1911.

Innsbruck. Ferdinandeum:
— — Zeitschrift, Heft 56, 1912.

Ithaca. Journal of Physical Chemistry:
— — The Journal, vol. 17, No. 1—9, gr. 8⁰.

Jassy. Societatea de stinti:
— — Annales scientifiques, tom. 7, fasc. 4.
— Société des médecins et naturalistes:
— — Bulletin, année 26, No. 9—12; année 27, No. 1—4.

Jefferson. Missouri Bureau of geology and mines:
— — Bulletin, vol. X.
— — Biennial Report, No. 45 und 46.

Jekaterinburg. Oural.-Société d'amateurs des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 32, 1, 2.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 48, Heft 4; Bd. 49, Heft 1—4; Bd. 50, Heft 1—4.
— — Denkschriften, Lief. 34.
— Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Zeitschrift, N. F., Bd. 21, Heft 1, 2 und Suppl.-Heft 5.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1913, No. 3—52; 1914, No. 1, 2.

Johannesburg. Union Observatory:
— — Circular of Transvaal Observatory, Titel und Register zu No. 1—13.
— Union of South Africa:
— — Circular, No. 2—9.
— — Map of Natal 1910.
— Geological Society of South Africa:
— — Transactions, vol. 15, No. 2; vol. 1, No. 1; vol. 2, No. 1—11; vol. 5, No. 1—4.

Jurjew (Dorpat). Naturforschende Gesellschaft bei der Universität:
— — Sitzungsberichte, vol. 21, No. 1—4; vol. 22, No. 1, 2.
— — Schriften, Bd. 21.
— Observatorium:
— — Meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 41—46, 1906—1911.
— Universität:
— — Acta et commentationes, vol. 19, No. 1—12; vol. 20, No. 1—12; vol. 21, No. 1—6.
— — Schriften aus dem Jahre 1911/12 (5 Nummern); 1912/13 (7 Nummern) in 4^0 und 8^0.
— — Vorlesungsverzeichnis 1912, I, II; 1913, I.
— — Personenstand 1911 und 1912.

Kahla. Verein für Geschichte und Altertumskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 7, Heft 2, 3.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Schriften 1912/13.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 28, Heft 1—4, Heidelberg.
— — Neujahrsblätter, N. F., Bd. 7, 1914, Heidelberg.
— — Bericht über die 30., 31. und 32. Plenarversammlung 1911—1913.

Karlsruhe. Badische Historische Kommission:
— — Geschichte der badischen Verwaltungsorganisation, Bd. 1, 1913.
— Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
— — Jahresbericht für das Jahr 1912.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 25, 1911/12.
Kasan. Physikalisch-mathematische Gesellschaft:
— — Bulletin, IIe sér., tom. 18, No. 3—4; tom. 19, No. 1, 2.
— Universität:
— — Učenija Zapiski, Bd. 79, Heft 12; Bd. 80, Heft 1—12.
Kassel. Verein für Naturkunde:
— — Abhandlungen und Bericht 53, 1909—12.
Kaufbeuren. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.
— Verein „Heimat":
— — Deutsche Gaue, Heft 261—280 und Sonderheft 88, 89, 91, 93.
Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 und Programm von Bitterauf.
Kew bei London. R. Botanical Garden:
— — Bulletin 1913, No. 1—10.
— — Appendix 1913, No. 2—4; 1914, No. 1.
Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 43, Leipzig 1913.
— — Quellensammlung, Bd. 7.
— K. Universität:
— — Schriften aus den Jahren 1911/12 und 1912/13 in 4^0 und 8^0.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
— — Schriften, Bd. 15, Heft 2.
Kiew. Gesellschaft der Naturforscher:
— — Zapiski, tom. 23, No. 1, 2.
— Polytechnisches Institut Kaiser Alexander II.:
— — Chemisch-agronomische Abteilung, 12e année, livr. 4; 13e année, livr. 1.
— — Ingenieur-mechanische Abteilung, année 12, livr. 4; année 13. livr. 1, 2.
— Universität:
— — Izvěstija, Bd. 52, No. 11, 12; Bd. 53, No. 1—10.
Kischineff. Naturforschende Gesellschaft:
— — Trudy, tom. III, 1911/12.
Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia I, 103. Jahrg., No. 1—6.
— — Carinthia II, 103. Jahrg., No. 1—3.

Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Jahresbericht des Historischen Museums 1912.

Köln. Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 32. Jahresbericht, 1912.

Königsberg i. Pr. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. 53, 1915.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13.

Konstantinopel. Institut d'histoire Ottomane:
— — Revue historique 1910, No. 17—23.

Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Översigt 1912, No. 4—6; 1913, No. 1—5.
— — Mémoires, Section des sciences, sér. 7. tom. 9, No. 2; tom. 10, No. 1—4; tom. 11, No. 1.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 71, 72.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 9, No. 4; vol. 10, No. 2, 3.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Mémoires sur les travaux, 1902—1912.
— — Rapports et Procès-verbaux, vol. 14—16; 17a—19.
— — Bulletin statistique des pêches maritimes, vol. 6, 1909.
— — Bulletin hydrographique, année 1910/11 und 1911/12.
— — Bulletin planktonique, part. 1.
— — Publications de circonstance, No. 62—65.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, III. Raekke, Bd. 2.
— Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Middelser, Serie Fiskeri, Bd. IV, 2—4.
— — „ „ Fiskeri-Statistik, Bd. 1.
— — „ „ Hydrografi, Bd. II, No. 2, 3.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser frä, No. 12—15.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— — Anzeiger (Bulletin international), 1. Classe de philologie, 1912, No. 7—10; 2. Classe des sciences mathématiques, 1913, A, No. 1—3; 1913, B, No. 1, 2.
— — Materialy antropol., tom. 12, 1912.
— — „ i prace komis. . . ., tom. 5.
— — Rocznik 1911/12.
— — Sprawozdania komisyi fizyograficzny, tom. 46.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— — Sprawozdania komisyi do badania historyi, tom. 8, fasc. 3/4.
— — Rozprawy, philolog.-philozoph. Kl., ser. II, tom. 30; ser. III, tom. 1, No. 4, 5.
— — Rozprawy, mathem. Abh., ser. 3, tom. 12, A und B.
— — Biblioteka pisazow-polskich, No. 63.
— Historische Gesellschaft:
— — Biblioteka, No. 45.
— — Rocznik, tom. 15.
— Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1913, No. 3—12.

Kyoto. Imperial University:
— — Memoirs of the College of Science and engineering, vol. 4, No. 1, 2; vol. 5, No. 1—4, 6—8.

Lahore. Archaeological Survey:
— — Annual Progress-Report 1911/12.

Laibach. Musealverein für Krain:
— — Carniola, Bd. 4, No. 1—4.

Landau (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.

Landsberg a. L. K. Realschule:
— — 35. Jahresbericht 1912/13.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 49.

Langres. Société historique et archéologique:
— — Bulletin, No. 87, 88.

Lausanne. Institut agricole:
— — Observationes météorologiques, année 13—22, 1899—1908.
— Redaction d. Bulletin d'astronomie:
— — Bulletin 3, 1910; 4, 1912.
— Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 177—180.

Laval. Commission historique et archéologique:
— — Bulletin, 2e sér., tom. 28, No. 95—97.
— — Laurain, Les Croisés de Mayenne, 1912.

Le Havre. Société Havraise d'études diverses:
— — Recueil des publications, 78e année, 1911, trim. 1—4.

Leiden. s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen. No. 8—14 (1912).

Leiden. Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 20, No. 5—12; Jahrg. 21, No. 1—4.
— Redaktion der „Mnemosyne“:
— — Mnemosyne, Bd. 41, No. 1—4; Bd. 42, No. 1.
— Physikalisches Laboratorium der Universität:
— — Commentationes, No. 1—138.
— — Supplement, No. 1—32.

Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter 1911, Bd. 36; 1912, No. 24; 1913, Bd. 37, No. 1—23.
— — K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 29, No. 8, 9; Bd. 30, No. 1, gr. 8^{0}.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 32, No. 7.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 64, No. 4, 5; Bd. 65, No. 1, 2.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 64, No. 5—7; Bd. 65, No. 1—3.
— Gesellschaft für Erdkunde:
— — Mitteilungen für das Jahr 1912.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften, Bd. 43.
— — Jahresbericht 1913.

Le Mans. Académie de géographie botanique:
— — Bulletin, tom. 21, No. 287—289.

Lemberg. Sevčenko-Gesellschaft:
— — Mitteilungen 112—115.
— — Sammelschriften der math.-naturw.-med. Sektion, tom. 16.
— — Sammlung, ethnographische, tom. 33, 34.
— — Sbirnik, filol. sektii, tom. 14, 15.
— — „ Istorično-filos. sektii, tom. 14.
— — Archiw ukrainsko-russkie, tom. 8.
— — Chronik 45, 46, 52, 54.
— — Matériaux d'ethnologie ukraino-ruthène, tom. 15.
— Towarzystwo dla popierania nauki polskiej:
— — Bulletin 12.
— — Études sur l'histoire du droit polonais, Bd. 5, No. 3, 4.
— K. K. Franzens-Universität:
— — Programm der Vorlesungen 1913/14.
— — Sktad 1912/13, 1913/14.

Lille. Commission historique du Nord:
— — Bulletin, tom. 28.

Lima. Cuerpo de ingenieros de minas del Peru:
— — Boletin, No. 78.

Lincoln. University of Nebraska library:
— — Bulletin of agr. Experim. Station, No. 121, 122, 131 - 138.
— — Press Bulletin, No. 34, 38—43.
— — University studies, vol. 11, No. 1—4; vol. 12, No. 1—3.
— — Annual Report, vol. 24—26.
— — Research Bulletin, No. 1—3.

Lindenberg. K. Preuß. Aëronautisches Observatorium:
— — Ergebnisse der Arbeiten, Bd. 8, 1913, 4⁰.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 71. Jahresbericht, 1913.

Lissabon. Sociedade de geographia:
— — Boletim, vol. 18 und 19; vol. 30, No. 11, 12; vol. 31, No. 1—9.
— Société Portugaise des sciences naturelles:
— — Archivos, vol. 4, fasc. 1.

Liverpool. School of Tropical Medecine:
— — Bulletin of Yellow Fever Bureau, vol. 2, No. 3, 4; vol. 3, No. 1.

Loewen. Université Catholique:
— — Annuaire 1913.
— Redaction von „La Cellule":
— — Cellule, tom. 27, fasc. 2; tom. 28, fasc. 1.
— Société scientifique de Bruxelles:
— — Annales 37, fasc. 3, 4.

Lohr. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Schnatz.

London. British Astronomical Association:
— — Journal XXIII, No. 3—10; XXIV, No. 1, 2.
— — Memoirs, vol. 19, part 2, 3; Appendix zu 15 und 18.
— — List of members, Sept. 1913.
— Redaktion der Zeitschrift: Illuminating Engineer:
— — Illuminating Engineer 1913 (= vol. 6), No. 2—12.
— R. Institution of Great Britain:
— — Proceedings, vol. 20, 1.
— Redaktion der Zeitschrift „Nature":
— — Nature, No. 2255—2304.
— India Office:
— — District Gazetteers, 21 und 238 Bde.
— — Burma District Gazetteers, 13 Bde.
— — Punjab „ „ 22 Bde.

London. Meteorological Office:
— — Geophysical Memoirs, No. 1—4.
— — Geophysical Journal 1911.
— R. Patent Office Library:
— — No. 4, 2d edit.
— Royal Society:
— — Proceedings, ser. A, 600—612; ser. B, 585—594.
— — Philosophical Transactions, ser. A, No. 212; ser. B, No. 203.
— — Year-Book 1913.
— — National Antarctic Expedition 1901—04. Meteorology, part 2.
— — 150. Anniversary of the R. Society.
— R. Society of Arts:
— — Journal, No. 3140—3189.
— R. Astronomical Society:
— — Monthly Notices, vol. 73, No. 1—9.
— — Memoirs, vol. 60, part 3, 4⁰.
— Chemical Society:
— — Journal, No. 602—614.
— — Proceedings, No. 408—422.
— Faraday Society:
— — Transactions, vol. 9, part 1, 2.
— Geological Society:
— — Quarterly Journal, vol. 68, 4; vol. 1—3 (= No. 272—275).
— — Geological literature for the year 1911.
— — List of members 1913.
— Society of Chemical Industry:
— — Journal, vol. 32, No. 1—24.
— — List of members 1913.
— Linnean Society:
— — Proceedings, vol. 7.
— — Transactions, a) Botany, vol. 7, part 19, 20; vol. 8, part 1, 2; b) Zoology, vol. 11, part 11, 12; vol. 15, part 1—4; vol. 16, part 1.
— — List of members 1913/14.
— — Catalogue of papers 1911.
— Mathematical Society:
— — Proceedings, vol. 11, part 7; vol. 12, No. 1—7; vol. 13, No. 1.
— Royal Microscopical Society:
— — Journal 1913, part 1—6.
— Zoological Society:
— — Proceedings 1913, part 1—4.
— — Transactions, vol. 20, part 4.

Ludwigshafen a. Rh. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.

Ludwigshafen a. Rh. K. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1912/13.

Lübeck. Naturhistorisches Museum:
— — Mitteilungen, 2. Reihe, Heft 26.

Lüttich. Institut archéologique Liégeois:
— — Bulletin, tom. 42, 1, 2.
— Société géologique de Belgique:
— — Annales, tom. 39, No. 4 mit Annexes 3; tom. 40, No. 1, 2 mit Annexes 1, 2.
— Société de littérature wallone:
— — Annuaire, No. 26, 1913.
— — Bulletin, tom. 55, part 1.
— — Bulletin du dictionnaire général, 8e année, 1913, No. 1, 2.
— Kulturhist. förening och Museum:
— — Redogrelse för 1912/13.

Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser":
— — Notiser, 1913, No. 1—6.
— Universität:
— — Acta Universitatis Lundensis, N. Ser., aft. I, 8, 1912; aft. II, 8, 1912.
— — Bibelforskaren 1912, 1—5.
— — Arskrift, Kyrkohistorisk 13, 1912.

Luxemburg. Société des naturalistes Luxembourgeois:
— — Bulletins, N. F., Jahrg. 6, 1912.

Luzern. Historischer Verein der fünf Orte:
— — Geschichtsfreund, Bd. 68.

Lyon. Académie des sciences, belles lettres et arts:
— — Mémoires, sér. III, tom. 13.
— Comité du Bulletin historique:
— — Bulletin historique, année 12, No. 78, 79, 81—83.
— Museum des sciences naturelles:
— — Archives 11.
— Société Linnéenne:
— — Annales, année 19, 1912.
— Société litteraire, historique et archéologique:
— — Bulletin trimestr., 1913, Januar—Juni.
— Université:
— — Annales, I. Sciences, Médecine, fasc. 32, 33.
— — „ II. Droit, lettres, fasc. 24, 25.

Madison. Wisconsin Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin, No. 26 = educ.-sér. No. 3.
— — Map of Wisconsin, 1912.

Madras. Archaeological Department:
— — Annual Report 1911/12.
— Madras Government:
— — Government Order No. 919.
— Kodaikanal and Madras Observatories:
— — Annual Report for 1912.
— — Bulletin, No. 27, 28, 29, 31—33, 4⁰.

Madrid. R. Academia de ciencias exactas:
— — Revista, vol. 11, No. 1—12.
— — Anuario 1913.
— — Memorias, Suppl.-Bd. 15.
— R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 62, No. 1—6; tom. 63, No. 1—5.
— Sociedad española de fisica y quimica:
— — Annales, No. 99—108; Index zu anno 1—10.

Mailand. Archivio storico civico:
— — Raccolta Vinciana, tom. 8.
— R. Istituto Lombardo di scienze:
— — Rendiconti, ser. II, vol. 45, No. 16—20; vol. 46, No. 1—15.
— — Memorie, Classe di lettere, vol. 22, fasc. 9.
— R. Osservatorio di Brera:
— — Pubblicazioni, No. 50.
— Società Italiana di scienze naturali:
— — Atti, vol. 51, fasc. 3, 4; vol. 52, fasc. 1.
— Società Lombarda di scienze mediche e biologiche:
— — Atti, vol. II, fasc. 1—4.
— Società Storica Lombarda:
— — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 38, fasc. 36; anno 40, fasc. 37—39.

Mainz. Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 7, 1912.

Manchester. Literary and philosophical Society:
— — Memoirs and Proceedings, vol. 57, part 1, 2.
— Victoria University-Library:
— — Publications, Classical series, No. 2.
— — „ Economic series, No. 14.
— — „ English series, No. 4—6.
— — „ Historical series, No. 16—18.
— — „ Educational series, No. 7.

Manchester. Victoria University Library:
— — Publications, Theological series. No. 2.
— — Manchester University Lectures, No. 15—17.

Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 14. Jahrg., 1913, No. 1—12, 4°.

Mantua. R. Accademia Virgiliana:
— — Atti memorie, N. Ser., vol. 5, parte 1, 2.

Marbach. Schwäbischer Schillerverein:
— — Rechenschaftsbericht 17, 1912/13.

Marburg. Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:
— — Sitzungsberichte 1912.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13 in 4° und 8°.

Maredsous. Abbaye:
— — Revue Bénédictine, année 30, No. 1—4.

Marienwerder. Historischer Verein für den Regierungsbezirk Marienwerder:
— — Zeitschrift, Heft 50, 51.

Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1912/13.

Marseille. Faculté des sciences:
— — Annales, vol. 21, No. 1—3.

Meissen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis:
— — Zusammenstellung der Wetterwarte, 1912.
— — Mitteilungen 1911/12.
— Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1912/13, 4°.
— Verein für Geschichte der Stadt Meissen:
— — Mitteilungen, Bd. 8, Heft 1—3.

Melbourne. Mines Department:
— — Bulletins, No. 23—28, 31; Maps Sheet 42b.
— — Memoirs of the geological Survey of Victoria, No. 9—12.
— — Records, vol. III, part 2.
— Royal Society of Victoria:
— — Proceedings, N. Ser., vol. 25, fasc. 2; vol. 26, fasc. 1.

Metten. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Kolmer.

Mexiko. Biblioteca Nacional:
— — Boletín, anno 10, No. 1—5; anno 11, No. 1—4.

Mexiko. Instituto geológico:
— — Parergones, tom. 4, No. 1.
— — Boletín, No. 29 (Atlas und Text); No. 30.
— Escuela Nacional Preparatoria:
— — Boletín, tom. IV, No. 3.
— Museo Nacional:
— — Anales, tom. IV, No. 5—12; tom. V, Juli—August.
— — Boletín 1913, No. 1—6.
— — La arquitectura en México, 1913.
— Observatorio astronomico Nacional:
— — Boletín, No. 2, 3.
— Observatorio meteorológico-magnético central:
— — Boletín mensual 1912, Mai—Dezember; 1913, Januar, Februar.
— Sociedad cientifica „Antonio Alzate":
— — Memorias y revista, tom. 30, No. 7—12; tom. 31, No. 1—12; tom. 32, No. 1—8; tom. 33, No. 1—8.
— Sociedad geológica Mexicano:
— — Boletín, tom. VIII, 1.

Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Archief 1912.

Milwaukee. Public Museum:
— — Bulletin of Wisconsin Natural History Society, vol. 10, No. 3/4.

Minneapolis. University of Minnesota Library:
— — Experiment Station, Bulletin No. 1.
— — Studies in economics, No. 1.
— — „ in chemistry, No. 1.
— — Zoological Series, No. 5.

Missoula. University Library of Montana:
— — Bulletin, No. 55, 56, 59, 68, 70, 74, 77, 78, 80, 81, 83, 84, 87, 88.

Mitau. Kurländische Gesellschaft für Literatur und Kunst:
— — Sitzungsberichte 1911.

Modena. Società dei Naturalisti:
— — Atti, IV. ser., vol. 14, 1912 = 45.

Monaco. Musée et Institut océanographique:
— — Bulletin, No. 253—273, 275.
— — Resultats des camp. scient. . . ., No. 38—41, 43, 44.

Montecassino. Bibliothek des Klosters:
— — Regesto dell' antica etc., 1914.

Montpellier. Académie de sciences et lettres:
— — Bulletin mensuel 1913, No. 1—12.

Montpellier. Académie des sciences et lettres:
— — Mémoires, sect. des sciences, tom. 4, 4.
— — „ sect. des lettres, tom. 5, 3.
— Société de géographie:
— — Bulletin, tom. 35, trim. 4.

Montreal. Numismatic and Antiquarian Society:
— — The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal, ser. III, vol. 9, No. 3, 4; vol. 10, No. 1—4.

Moskau. Archäologische Gesellschaft:
— — Trudy 13, 1, 2; 14; 15, 1, 2; 16—18; 19, 1—3; 20, 1, 2; 21, 1, 2; 22, 1, 2; 23, 1.
— Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Stenja 242—247.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Matematčeskij Sbornik, vol. 28, No. 4; vol. 29, No. 1.
— Öffentliches und Rumanzewsches Museum:
— — Otčet, Jahrg. 1912.
— Société des amis d'histoire naturelle, d'anthropologie et ethnographie:
— — Izvěstija, tom. 123, 2; tom. 124, 2.
— Société Impériale des Naturalistes:
— — Bulletin, année 1911, No. 4; 1912.

Mount Hamilton (California). Lick Observatory:
— — Bulletin, No. 223—249.

Mülhausen i. E. Historisches Museum:
— — Bulletin 36, année 1912.

München. Statistisches Amt:
— — Mitteilungen, Bd. 24, Heft 3.
— — Jahresübersichten 1911.
— K. Armee-Bibliothek:
— — Bücherverzeichnis 1913.
— K. Hydrotechnisches Bureau:
— — Jahrbuch 1911, Heft 2—4; 1912, Heft 1. 2.
— — Flächenverzeichnis, Heft 6.
— — Atlas der bayerischen Flußgebiete, Blatt 3.
— — Wasserkräfte.
— — Fischer, Wasserführung.
— — Pegnitzgebiet — Gewitterregen 11. V. 1910.
— Ornithologische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 11, 1—3.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Mederle.

München. K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Emminger.
— K. Maximilians-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Löwe.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Steinberger.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Belzner.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Eichhorn.
— K. Realgymnasium:
— — 49. Jahresbericht, 1912/13.
— K. Technische Hochschule:
— — Bericht über das Studienjahr 1911/12.
— — Programm für das Studienjahr 1913/14.
— — Personalstand im S.-S. 1913.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1913.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising 1913 mit Register.
— K. Oberbergamt:
— — Geognostische Jahreshefte, 25. Jahrg., 1912.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — 6. Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Krell.
— K. Maria Theresia Kreisrealschule:
— — 14. Jahresbericht, 1912/13.
— K. Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1913; W.-S. 1913/14.
— — Schriften aus dem Jahre 1913 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1913; W.-S. 1913/14.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 22, 1912.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 57 und $58^1/_2$.
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 11, Heft 3—6; Jahrg. 12, Heft 1, 2.
— K. Meteorologische Zentralstation:
— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern 1913, 1—11.
— — Veröffentlichungen: Deutsches meteorol. Jahrbuch (Bayern) für 1912.

Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 40, 1911/12.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 70, 1.

Nancy. Académie de Stanislas:
— — Mémoires, année 162, VI. sér., tom. 9.
— Société d'archéologique Lorraine et du Musée Historique Lorrain:
— — Bulletin 1913, No. 1—11.
— — Mémoires, tom. 62, 1912.
— Société des sciences:
— — Bulletin, tom. 13, fasc. 2, 3.
Nantes. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France:
— — Bulletin, tom. 2, trim. 1—4.
Narbonne. Commission archéologique:
— — Bulletin 1913, sem. 1, 2.
Neapel. Biblioteca ed ufficio di statistica:
— — Annuario, parte 2, 1913.
— — Bulletino Anno 37, No. 10—12.
— — Haec est illa Neapoli, 1912.
— R. Istituto d'incoraggiamento:
— — Atti 64, 1912.
— Städtische archäologische Kommission:
— — Neapolis, Anno 1, fasc. 1, 2.
— Società Reale di Napoli:
Accademia delle scienze fisiche e matematiche:
— — Rendiconto, vol. 19, fasc. 1—5.
— Stazione zoologica:
— — Mitteilungen, Bd. 20, Heft 4; Bd. 21, Heft 1—3.
Neisse. Philomathie:
— — 36. Bericht, 1910/13.
Neuburg a. D. Historischer Verein:
— — Neuburger Kollektaneen-Blatt, 74. Jahrg., 1910.
Neuchâtel. Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin, tom. 21, 1911/12; tom. 22, 1912/13.
— Société des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 39, 1911/12.
New Castle (upon-Tyne). Institute of mining and mechanical engineers:
— — Transactions, vol. 62, part 8; vol. 63, part 1—5, 7; vol. 64, part 1.
— — Report of the committee . . . carboniferons limestone formation, 1912.
New Haven. American Oriental Society:
— — Journal, vol. 332, part 1—3.
— Connecticut Academy of arts and sciences:
— — Transactions, vol. 17, No. 213—361, 363—538; vol. 18, No. 1—207.

New Haven. Yale University Library:
— — Yale Review, N. S., vol. 2, No. 3, 4; vol. 3, No. 1, 2.
— — American Journal of Science, No. 205—217.
— — Report of the librarian 1909/10—1912/13.

New Orleans. Louisiana State Museum:
— — 3. Biennial-Report, 1912.

New York. Academy of Sciences:
— — Annals, vol. 22, part 160—423.
— American Philological Association:
— — Transactions and Proceedings, vol. 42 und 43.
— American Museum of Natural History:
— — Annual Report 44, 1912.
— — Anthropological Papers, vol. 7, part 2; vol. 9, part 2; vol. 10, part 1—3; vol. 11, part 1—3; vol. 12, part 3.
— — Journal, vol. 12, No. 8; vol. 13, No. 1—8.
— — Bulletin, vol. 31, 1912.
— — Memoirs, N. S., vol. 1, part 1—4.
— — Guide Leaflet, No. 36, 37.
— — Handbook Series, No. 1, 2.
— — Monograph Series, No. 1—3.
— Botanical garden Library:
— — Bulletin, vol. 8, No. 29.
— American Geographical Society:
— — Bulletin, vol. 44, No. 12; vol. 45, No. 1—12.
— Rockefeller Institute for medical research:
— — Studies, vol. 6—17 und Index zu 1—15.
— Theol. Seminary of America:
— — Texts and Studies, vol. 1, 2 und 3, 1.
— Geological Society of America:
— — Bulletin, vol. 23, No. 4; vol. 24, No. 1—3.
— American Mathematical Society:
— — Bulletin, No. 214—223.
— — Transactions, vol. 14, No. 1—4.
— — Annual Register 1913.
— Zoological Society:
— — Zoologica, No. 11.

Nijmwegen. Nederl. botan. Vereenigung:
— — Recuel des travaux botan. Néerlandais, vol. 9, No. 1—4.
— — Archief, Nederl. kruidkundig 1912.

Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 20 und Beilage.
— — Jahresbericht, 3. Jahrg., No. 2; 4. Jahrg., No. 1.

Nürnberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Keller.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1911, 1—4; 1912, 1—4.
— — Mitteilungen 1912.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — 35. Jahresbericht, 1912.

Oberlin (Ohio). Oberlin College Library:
— — The Wilson Bulletin, vol. 25, No. 1—3.
Odessa. K. Gesellschaft für Geschichte und Altertümer:
— — Zapiski 31, 1913.
— — Otschet 1912/13.
Orléans. Société archéologique de l'Orléanais:
— — Bulletin, tom. XV, No. 168—197, 202, 203.
— — Mémoires, tom. 3—7, 9—15, 17, 20, 22, 23, 25, 27; 5 voll. Atlanten.
Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 37, 1912.
Ottawa. Department of Mines (Geological Survey Branch):
— — Memoir, No. 17 E, 33, 35, 37.
— Department of Mines (Mines branch):
— — Bulletin, No. 4 (2. Ausgabe).
— — Publications, No. 100, 145, 156, 167, 170, 198, 207, 216, 226, 230, 231, 256.
— — Summary Report 1912.
— Royal Society of Canada:
— — Proceedings and Transactions, ser. III, vol. 6.
Oxford. English Historical Review:
— — Review, vol. 28, No. 109—112.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 70, 2.
Padua. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Atti e memorie, anno 371 = 28.
— Museo civico:
— — Bollettino, anno 13, fasc. 4—6; anno 14, fasc. 1—6.
Palermo. Circolo matematico:
— — Rendiconti, tom. 35, fasc. 1—3; tom. 36, fasc. 1—3.
Supplemento, vol. 7, No. 5, 6; vol. 8, No. 1—6.

Pará (Brasilien). Museo Goeldi:
— — Boletin, vol. 7, 1910.
Parenzo. Società Istriana di archeologia e storia patria:
— — Atti e memorie, vol. 28, 1912.
Paris. Académie de médecine:
— — Bulletin 1913, No. 1—19, 21—42.
— — Rapport sur les vaccinations etc. 1911.
— Académie des Sciences:
— — Annuaire 1913.
— — Comptes rendus, tom. 156, No. 1—21, 23—26; tom. 157, No. 1—26; tables zu 154.
— — Oeuvres de Laplace, tom. 14.
— — Procès-verbaux, tom. 2.
— Comité international des poids et mesures:
— — Procès-verbaux des séances, tom. 6.
— Redaction „Cosmos":
— — Cosmos, No. 1460—1511.
— Institut général psychologique:
— — Bulletin, année 12, No. 5, 6; année 13, No. 1—4.
— Ministère de l'instruction publ. et des beaux-arts:
— — Bulletin de la commission archéologique de l'Indochine, année 1912, livr. 1, 2.
— Moniteur Scientifique:
— — Moniteur, No. 854—865, 4⁰.
— Musée Guimet:
— — Annales, Bibliothèque d'études, tom. 34.
— Muséum d'histoire naturelle:
— — Archives, 5e sér., tom. 4, fasc. 1, 2.
— — Bulletin, année 1912, No. 1—7.
— Redaction „La paix et le droit":
— — La paix, année 23, No. 1—11, 13—22.
— — Almanach 1913.
— Revue des études d'histoire:
— — Revue, année 78, No. 83; année 79, No. 85—89.
— Revue historique:
— — Revue, tom. 112, No. 2; tom. 113, No. 1, 2; tom. 114, No. 1, 2; tom. 115, No. 1.
— Revue des questions historiques:
— — Revue, No. 185—188.
— Société d'anthropologie:
— — Bulletins et mémoires 1912, No. 1—6; 1913, No. 1.
— Société astronomique de France:
— — Bulletin 1913, No. 2—12.

Paris. Société de géographie:
— — La Géographie, année 26, No. 2—6; année 27, No. 1—5.
— Société mathématique de France:
— — Bulletin, tom. 41, fasc. 1—3.
— Société météorologique de France:
— — Annuaire, tom. 61, No. 1—3.
— Société de philosophie:
— — Bulletin, année 12, No. 7, 8; année 13, No. 1—5.
— Société zoologique de France:
— — Bulletin, tom. 37, 1912, 1—10.
— — Mémoires, tom. 25, 1912.

Parma. R. Deputazione di storia patria:
— — Archivio storico, N. Ser., vol. 12, 1912; vol. 13, 1913.

Pasing. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Sandkühler.

Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1912/13.

Pavia. Società Pavese di storia patria:
— — Bolletino, anno XII, fasc. 2—4; anno XIII, fasc. 1, 2.

Peradeniya. R. Botanic gardens:
— — Annals, vol. 5, part 5.

Perth. Western Australian Geological Survey:
— — Bulletin, No. 42—47, 50.
— — Annual Report for 1912.
— — Meekhatara Map.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:
— — Bulletin 1913, No. 1—18.
— — Byzantina Chronika, Bd. XIV, XV, 1—4; Bd. XVII und Beilage.
— — Izvěstija, tom 17, No. 3—4; tom 18, No. 1, 2.
— — Mémoires, Classe physico-mathémat., vol. 30, No. 9—11; vol. 31, No. 1.
— — Mémoires, Classe historico-philol., vol. 11, No. 2—5.
— — Travaux du Musée botanique, vol. 10.
— — Travaux du Musée géologique, vol. 6, No. 4—7; vol. 7, No. 1—3.
— — Annuaire du Musée zoologique, tom 17, No. 1, 2; tom 18, No. 1, 2.
— — Faune de la Russie, a) Poissons, vol. 3, 1; b) Hydraires, vol. 2, 1; c) Insecta Hemiptera, vol. 3, 1; vol. 6, 1.
— — Monumenta Sinaitica f. 2, 1912.
— Berginstitut:
— — Annales de l'Institut des Mines, vol. 4, No. 1—5.
— Archäologische Kommission:
— — Izvěstija, No. 31—46.

St. Petersburg. Archäologische Kommission:
— — Materialy, No. 33.
— — Otčet 1907, 1908.
— Commission sismique permanente:
— — Comptes rendus des séances, tom 5, No. 2, 3; tom 6, No. 1.
— — Bulletin 1911.
— Comité géologique:
— — Bulletins 1912, vol. 31, No. 3—8.
— — Mémoires, N. Sér., No. 62, 1, 2, 72, 74, 76, 79, 86.
— — Explorations scientifiques dans les regions de la Sibérie, Amour, livr. 13—16; Jénissei, livr. 7, 8; Donetz VII, 27.
— Botanischer Garten:
— — Acta horti Petropolitani, vol. 31, fasc. 1, 2; vol. 32, fasc. 1.
— Kais. Russische Geographische Gesellschaft:
— — Izvěstija, tom 49, 1913, No. 1—3.
— — Zapiski, tom 36, 40, 1, 49.
— — „ (der Amurschen Abteilung), Bd. 13, 1913.
— Kais. Mineralogische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, II. Ser., Bd. 49.
— Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kais. Universität:
— — Schurnal, Physikalische Abteilung, tom 44, Heft 8, 9; tom 45, Heft 1—6.
— — „ Chemische Abteilung, tom 44, Heft 9; tom 45, Heft 1—8.
— Société Impériale des Naturalistes:
— — Trudy: Comptes rendus des sciences, vol. 41, fasc. 5—8; vol. 42, fasc. 1—8; vol. 43, fasc. 1—3.
Section de botanique, vol. 42, fasc. 1—8.
„ „ zoologie et de physiologie, vol. 22, 2; 26, 4; 27, 4; 28, 4; 40, 3; 41, 2; 42, 2, 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Obozrěnie 1911/12, 1912/13; histor.-philol. Facultat 1912/13; physiko-math. Facultat 1912/13.
— — Otčet 1911 und 1912.
— — Protokoly zasědanij, No. 66.
— — Zapiski, No. 99—111.
— — Scripta botanica, fasc. 27.

Philadelphia. Academy of natural Sciences:
— — Proceedings of the meeting, 1912.
— — Proceedings, vol. 64, part 3; vol. 65, part 1 und 2.
— — Journal, ser. II, vol. 15 und 16, 1.
— College of pharmacy:
— — American journal of pharmacy, vol. 85, No. 1—12.

Philadelphia. Home for the training in speech of deaf children:
— — Report 11.
— Franklin Institute:
— — Journal, vol. 175 und 176.
— Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Bulletin, No. 41—43.
— — Report 37, 1913.
— Historical Society of Pennsylvania:
— — The Pennsylvania Magazine of History, vol. 37, No. 144—147.
— American Philosophical Society:
— — Proceedings, vol. 52, No. 206—211.
— University:
— — Dissertationen 1912/13.

Pirmasens. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 und 1913/14 mit Programm von Erb.

Pisa. R. Scuola Normale Superiore:
— — Annali, Filos. e Filologia, vol. 24 und 25.
— Società Toscana di scienze naturali:
— — Atti, Memori, vol. 28, 1912.
— — „ Processi verbali, vol. 21, No. 3—5; vol. 22, No. 1—4.
— Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento, ser. VI, anno 59, vol. 5, sem. 1, No. 1—9.
— Università:
— — Annuario 1912/13.

Pistoia. R. Deputazione di storia patria:
— — Bulletino, anno XIV, fasc. 4; XV, 1—4.

Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen. 23. Jahresschrift, 1913.
— Gymnasium:
— — 24. Jahresbericht, 1912/13.

Plymouth. Marine Biological Association:
— — Journal, N. Ser., vol. 9, No. 4; vol. 10, No. 1.

Poitiers. Société academ. d'agriculture, belles-lettres, sciences et arts:
— — Bulletin, No. 372—374.

Pola. Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine:
— — Veröffentlichungen, No. 33, 34.

Portland (Maine). Society of natural history:
— — Proceedings, vol. 2, part 9.

Porto (Portugal). Academia polytechnica:
— — Annaes scientificos, vol. VII, No. 4; vol. VIII, No. 1—4.

Posen. Historische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Jahrg. 27, Heft 1, 2.
— — Historische Monatsblätter, Jahrg. 13, No. 1—12.

Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., No. 57, 58.
— Astrophysikalisches Observatorium:
— — Katalog, Bd. 6, 1912.
— — Publikationen, No. 66—69.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, No. 24.

Prag. Böhmische Kaiser Franz Joseph-Akademie:
— — Sbírka pramenů, Skupina II, číslo 17.
— — Věstník, Ročník 21.
— — Almanach, Ročník 23, 1913.
— — Archiv, Historický, číslo 38.
— — Biblioteka klassikú řeckých a čymských, číslo 20, 21.
— — Rozpravy, třída I, číslo 46—48; třída II, Ročník 21.
— — Sbornik filologicky, Ročník 2.
— — Památky archaeolgicke, Dilu 24, 2—8; 25, 1—3.
— — Spisůo poctěných jub., číslo 2—7, 13, 15, 16, 19—21.
— — Friedrich, Acta regum Bohemiae, fasc. 2.
— Landesarchiv:
— — Archiv Český, Díl 28—30.
— — Codex diplom. regni Bohemiae, tom. 2, 1912.
— K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Jahresbericht 1911 und 1912.
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1911 und 1912; der math.-naturwiss. Klasse, 1911 und 1912.
— Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft etc.:
— — Übersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens, 1912.
— Böhmischer Klub für Naturwissenschaften:
— — Sbornik 1911.
— Lese- und Redehalle der deutschen Studenten:
— — 64. Bericht, 1912.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 60, No. 1—10.
— Museum im Königreich Böhmen:
— — Časopis musea královstvi českého, Bd. 87, No. 1—4. .
— — Bericht für 1912.
— Čechoslavisches Museum:
— — Narodpisný Věstník Československý, Bd. 8, No. 1—10.

Prag. K. K. Sternwarte:
— — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 73, 1912.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 51, No. 1—4.
— Verein böhmischer Mathematiker:
— — Časopis, Ročník 40, číslo 3—4; Ročník 41, číslo 1—5; Ročník 42, číslo 2—5.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, W.-S. 1913/14.
— — Personalstand 1913/14.

Pretoria. Mines Department (Geological Survey):
— — Sheet 11 und Explanation.
— — Annual Report for 1912, part 4.

Pulkowa. Nikolai-Hauptsternwarte:
— — Publications, vol. 17, 20, 24.

Pusa (Bengal). Agricultural Research Institute:
— — Annual Report of the Department of agriculture 1911/12.

Quito. Observatorio astronomico y meteorologico:
— — Resumen del boletin mensual. anno 1913, No. 1, 2.

Ravenna. Bolletino storico Romagnolo:
— — Felix Ravenna, No. 7—11.

Regensburg. Botanische Gesellschaft:
— — Denkschriften, Bd. 12 = N. F., Bd. 6.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1912/13 und Programm von Hublocher.
— Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 64.

Riga. Gesellschaft für Geschichte und Altertumskunde der Ostseeprovinzen:
— — Mitteilungen, Bd. 21, Heft 2.
— — Sitzungsberichte 1911, 1.
— — Katalog der Ausstellung zur Jahrhundertfeier 1812.

Rio de Janeiro. Observatorio:
— — Annuario 29, 1913.

Rochefort. Société de géographie:
— — Bulletin. tom. 34, No. 3, 4; tom. 35, No. 1.

Rochester. Academy of science:
— — Proceedings, vol. 5, p. 39—58.

Rolla (Missouri). Bureau of geology and mines:
— — Second Series, vol. 11.

Rom. Reale Accademia dei Lincei:
— — Annuario 1913.
— — Notizie degli scavi di antichità, vol. 9, fasc. 5—12 und Suppl.; vol. 10, fasc. 1—4.
— — Atti, ser. V, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, vol. 22, sem. 1, No. 9—12; sem. 2, No. 1—11.
— — Rendiconti, Classe di scienze morali, vol. 21, fasc. 7a, 11, 12; vol. 22, fasc. 1—6.
— — Memorie, Classe di scienze fisiche, ser. V, vol. 9, fasc. 7—10. 14.
— — Atti, Rendiconto dell' adunanza solenne, 1913, vol. 2.
— Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 66, sessione 1—3, 4—7.
— — Memorie, vol. 30, 1912.
— Biblioteca Apostolica Vaticana:
— — Codices Urbinates Latini, tom. 3, No. 1461—2059.
— — Studi e testi 24.
— R. Comitato geologico d'Italia:
— — Bollettino, anno 1912, No. 2—4.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut:
— — Mitteilungen, Bd. 28, No. 1—4.
— British and American Archaeological Society:
— — Journal, vol. 4, No. 6.
— Società italiana per il Progresso delle Scienze:
— — Atti, Riunione 6, Genua 1912.
— Società Italiana delle Scienze:
— — Memorie di matematica e di fisica, tom. 18, 1913.
— R. Società Romana di storia patria:
— — Archivio, tom. 35, fasc. 3, 4; tom. 36, No. 1—4.
— Specola Vaticana:
— — Specola Astronomica Vaticana, No. 3 und 4. — Hagen, App. I und II.
— — Inaugurazione 1910.

Rosenheim. Gymnasium:
— — Jahresberichte für 1912/13 mit Programm von Steiner.

Rossleben. Klosterschule:
— — Jahresbericht 1912/13.

Rostock. Naturforschende Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte und Abhandlungen, N. F., Bd. 4, 1912.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.

Rotterdam. Bataafsch genootschap der proefondervuidelijke Wijsbegeerte:
— — Nieuwe Verhandelingen, II. Reihe, VII. deel, stuk 1.

Rouen. Académie de sciences et lettres:
— — Précis analitique des travaux 1910/11.

Rovereto. R. Accademia di scienze degli Agiati:
— — Atti, ser. III, vol. 18, fasc. 3, 4; ser. IV, vol. 1.

Saargemünd. Gymnasium mit Realabteilung:
— — 42. Jahresbericht, 1912/13.

Saintes. Commission des arts et monuments historiquc:
— — Recueil, tom. 18, No. 13; tom. 19, No. 1.

Saint-Brieuc. Association Bretonne:
— — Bulletin archéologique et agricole, III. sér., tom. 30.

Saint-Dié. Société philomatique:
— — Bulletin, année 37, 1911/12.

St. Etienne. Société d'agriculture, sciences etc.:
— — Annales, tom. 32, livr. 3, 4; tom. 33, livr. 1.

Saint Louis. Academy of Science:
— — Transactions, vol. 20, No. 1—7; vol. 21, No. 1—4; vol. 22, No. 1, 2.
— Missouri historical Society:
— — Department of archaeology, Bulletin No. 1.
— — Collections, vol. 4, No. 2.

Salzburg. K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1912/13.
— Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 53, 1913.

Salzwedel. Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte:
— — Jahresbericht 40, 1913.

St. Gallen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch für das Jahr 1912.
— Historischer Verein:
— — Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte, Bd. 30a.
— — Dierauer, Toggenburger moralische Gesellschaft.

San Fernando. Instituto y Observatorio de marina:
— — Anales, Sec. 2a, Observ. meteorologie 1911 und 1912.
— — Almanaque para el año 1914.

San Francisco. California Academy of Sciences:
— — Proceedings, ser. IV, vol. 3, No. 187—264.
— Instituto meteorologico:
— — Publicationes, No. 3 (2 Teile).

Santiago de Chile. Observatorio astronomico:
— — Publicaciones, No. 5, 1913.

Sarajevo. Bosnisch-Herzegowinische Landesregierung:
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1911.
— Landesmuseum:
— — Glasnik 24, 1912, No. 4; 25, 1913, No. 1, 2.
Schweinfurt. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1912/13.
Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 78 und Beiheft zu Jahrg. 77.
— — Mecklenburgisches Urkundenbuch, Bd. 24.
Semur-en-Auxois. Société des sciences historiques et naturelles:
— — Bulletin, tom. 37, années 1910/11.
Sendai. Kais. Universitäts-Bibliothek:
— — The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 3, No. 1—4; vol. 4, No. 1—3.
— — The Science Reports, vol. 1, No. 4, 5; vol. 2, No. 1, 2; II. Series (= Geology), vol. I, No. 2, 3.
Shanghai. Nord China Branch of the Asiatic Society:
— — Journal, vol. 44, 1913.
Siena. R. Accademia dei fisiocritici:
— — Atti, ser. V, vol. 4, No. 1—10.
— Deputazione de la Storia patria:
— — Bulletino Senese di storia patria, anno XIX, fasc. 3; anno XX, fasc. 1, 2.
Simla. Indian meteorological department:
— — Memoirs, vol. 21, part 5—7; vol. 22, No. 1, 2.
— — India Weather Review 1911.
— — Monthly Weather Review 1912, Juli—Dez.; 1913, Jan.—Juli.
— — Report of the administration 1912/13.
— — Rainfall data of India 31, 1911.
Sofia. Académie des Sciences:
— — Spisanie na bŭlgarskata akademia, kniga 4, 5.
— — Materialy, kniga 4.
— — Filow, Sainte Sophie de Sofia, 1913.
Spalato. K. K. Archäologisches Museum:
— — Bulletino di archaeologia e storia Dalmata 34, 1911, No. 1—12 und Index zu 24—33.
Speier. Historischer Verein der Pfalz:
— — Mitteilungen, Bd. 32, 1912.
Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 3, 1913.
Leland Stanford (Cal.). University:
— — Dudley = Memorial.
— — Starks.
Stavanger. Museum:
— — Aarshefte for 1912 (23).

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 16, 1912.
— — Monatsblätter 1912, No. 1—12.
Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Les prix Nobel en 1912.
— — Handlingar, Bd. 48, No. 3; Bd. 49, No. 1—10; Bd. 50, No. 2—9.
— — Arkiv för Zoologi, Bd. 7, No. 4; Bd. 8, No. 1.
— — Arkiv för Kemi, Bd. 4, No. 4—6; Bd. 5, No. 1, 2.
— — Arkiv för Botanik, Bd. 12, No. 3, 4; Bd. 13, No. 1.
— — Arkiv för Matematik, Bd. 8, No. 3, 4; Bd. 9, No. 1/2.
— — Meddelanden från Nobel-Institut, Bd. 2, No. 3, 4.
— — Arsbôk for år 1913 und Bihang.
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 54.
— — Astronomiska Jakttagelser i Sverige, Bd. 10, No. 1, 2.
— K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen, Årgangen 7, 1912.
— — Tynell, Skånes medeltida dopfnutar, Heft 1.
— K. Landtbruks-Akademien:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 51, 1912, No. 7, 8; Bd. 52, 1913, No. 1—5, 7.
— K. Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 27, 1912; Autorenregister L—O.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 33, 1912, No. 1—4.
— Geologiska Förening:
— — Förhandlingar, Bd. 34, No. 7; Bd. 35, No. 1—6.
— Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1912.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 32, Heft 4; Jahrg. 33, Heft 1—3.
— Svenska Literatursälskapet:
— — Skrifter 17, No. 15; 21, No. 5; Samlaren 33.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1912, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, N. F. I, No. 31, 32.
— Forstliche Versuchsanstalt:
— — Meddelanden, Heft 6—8, 1909/1911.
Stonyhurst. College Observatory:
— — Results of Meteorological and Magnetical Observations 1912.
Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Seismometrische Aufzeichnungen 1912, No. 29—52; 1913, No. 1—46.

Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Monatliche Übersicht 1911, No. 9—12; 1912, No. 1, 2; 1913, No. 1—6.
— — Mikroseismische Unruhe Jan.—April.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 17.
— — Ad. Michaelis, 1913 (Gedächtnis-Schrift).
— Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt:
— — 1910, Heft 9—12; 1911, Heft 1—11.
Straubing. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 15, 1912.
Stuttgart. K. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 41, 42.
— Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 22, 1913, Heft 2—4.
— — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 13—15.
— K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jahrg. 1912, Heft 1, 2.
Sydney. Australian Museum:
— — Records, vol. 8, No. 4; vol. 9, No. 3, 4; vol. 10, No. 1—6.
— — Memoirs, No. 4, part 17.
— Linnean Society of New South Wales:
— — Proceedings, vol. 37, part 2—4; vol. 38, part 1, 2.
— — Abstract of Proceedings, No. 308—311. 313—316.
— R. Society of New South Wales:
— — Journal and Proceedings, vol. 45, part 4; vol. 46, part 1, 2; vol. 47, part 1.
— Geological Survey of New South Wales:
— — Annual Report for 1912.
— — Mineral resources of the Western Coalfield, Maps and sections, No. 7 und 17.

Tacubaya. Observatorio astronomico nacional:
— — Annuario, ano 33, 1912.
Taihoku. Government of Formosa:
— — Icones plantarum Formosanarum, fasc. 2, 1912.
Taschkent. Turkestan. Abteilung der Kais. Russischen Geographischen Gesellschaft:
— — Izvestja, tom 3, fasc. 1; tom 4, fasc. 2, 5, 7, 8; tom 8, fasc. 1, 2 und Beilage zu Bd. 6, Conspectus Florae, No. 1—4.

Teddington. National Physical Laboratory:
— — Collected Researches, vol. 9 und 10, 1913.
— — Report for the year 1912.
Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:
— — Goltz B., Kuttenkeuler.
Tiflis. Kaukasisches Museum und öffentliche Bibliothek:
— — Mitteilungen, Bd. 1—5; 6, 1; 7, 1, 2.
— Physikalisches Observatorium:
— — Beobachtungen für das Jahr 1905.
Tokyo. Imperial Academy:
— — Proceedings, vol. 1, No. 1, 2.
— Imp. Earthquake Investigation Committee:
— — Bulletin, vol. 5, No. 2, 3.
— Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
— — Mitteilungen, Bd. 14, Teil 2, 3 und Suppl. zu Bd. 14.
— Geographical Society:
— — Journal, vol. 22, No. 283—294.
— Mathematico-Physical Society:
— — Proceedings, 2d ser., vol. 6, No. 21, 22; vol. 7, No. 1—9.
— Zoological Society:
— — Annotationes zool. Japon., vol. VII, part 1—5; vol. VIII, part 1, 2.
— Imp. Geological Survey of Japan:
— — Geology of empire, Tafeln und Text: Zone 10, Col. 10; Zone 19, Col. 14; Zone 20, Col. 9 und 14.
— Kais. Universität:
— — The Journal of the College of Science, vol. 32, No. 8—12; vol. 33, No. 1; vol. 35, No. 1, 4; vol. 36, No. 1, 2 und Index zu vol. 1—25.
— — The Journal of the College of Agriculture, vol. 1, No. 4; vol. 4, No. 4, 5; vol. 5, No. 2.
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. 10, No. 3, 4; Bd. 11, No. 1.
Torgau. Altertumsverein:
— — Veröffentlichungen 22, 1911 und 1912.
Toronto. Canadian Institute:
— — Transactions, vol. 9, part 3.
— R. Astronomical Society of Canada:
— — Journal, vol. 6, No. 6; vol. 7, No. 1—5.
— — Observers Handbook for 1913.
— University:
— — Studies, Review of Historical publications, vol. 17, 1912.
— — „ Biological Series, No. 12—14.
— — „ Physiological Series, No. 8, 9.
— — „ Geological Series, No. 8.

Toronto. University:
— — Studies, Philological Series, No. 2.
— — Papers from Physical laboratories, No. 41—46.
Toulouse. Académie:
— — Mémoirs, sér. X, tom. 12.
— Université:
— — Annales de la faculté des sciences, tom. 3, 1911.
— — Annales du Midi, No. 96—98.
— — Bibliothèque méridionale, sér. I, tom. 15.
— Société de geographie:
— — Bulletin, année 31, No. 3, 4; année 32, No. 1.
Trient. Biblioteca e Museo comunale:
— — Archivio Trentino, anno 27, fasc. 3, 4; anno 28, fasc. 1, 2.
Triest. K. K. Maritimes Observatorium:
— — Rapporto annuale, vol. 26.
Tromsö. Museum:
— — Aarshefter 34, 1911.
— — Aarsberetning for 1911.
Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 7, Heft 1—4; Jahrg. 8, Heft 1—3.
Tübingen. Universität:
— — Universitäts-Schriften 5—7.
Tunis. Institut de Carthage:
— — Revue Tunisienne, No. 97—102.
Turin. R. Accademia delle scienze:
— — Atti, vol. 48, No. 1—15.
— — Memorie, ser. II, tom. 63, 1913.
— — Osservazioni meteorol. nell' anno 1912.
— Accademia d'agricoltura:
— — Annali, vol. 50 und 55.
— Museo di zoologia ed Anatomia comparata:
— — Bolletino, vol. 27, 1912, No. 645—663.

Uccle. Observatoire:
— — Annales de la physique du globe, tom. 5, No. 2, 3.
— — Annuaire astronomique 1914.
— — Annuaire météorologique 1913.
— La Revue Congolaise:
— — Revue, année 3, No. 4—6; année 4, No. 1, 2.
Ulm. Verein für Kunst und Altertum:
— — Mitteilungen, Heft 18, 19.
— Verein für Mathematik und Naturwissenschaften:
— — Mitteilungen, Heft 14, 1909.

Upsala. Vetenskaps societeten:
— — Nova acta, ser. IV, vol. III, fasc. 1, 4, 6.
— K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13 in 4° und 8°.
— — Årskrift 1912.
— — Arbeten, No. 13, 14.
— — Linné-Skrifter, vol. 5.
— — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 13, fasc. 1—3.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensol., vol. 44, 1912.
— Human. Vetenskaps Samfundet:
— — Skrifter, Bd. 14, 1913.

Urbana. Illinois State Laboratory of Natural History:
— — Bulletin, vol. 9, art. 6—10.

Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Werken, ser. III, No. 17, 19, 30, 31.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Aanteekeningen 1912 und 1913.
— — Verslag 1912 und 1913.
— — Marquardt, Die Baumsammlung des Reichsmuseums für Völkerkunde, 1913.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Annuaire 1911, A, B.
— — Mededeelingen en Verhandelingen, No. 15, 16.
— — Overzicht, Jahrg. 9, 1912, No. 10—12; Jahrg. 10, 1913, No 1—7, 9—11.
— — Onweders 1910, deel 31.
— — Publicacion, No. 93a nnd 94.

Veglia. Altslavische Akademie:
— — Glagolitica 1913.
— — Vestnik 1.

Vendôme. Société archéologique scientifique et littéraire:
— — Bulletin, tom. 51, 1912.

Venedig. Ateneo Veneto:
— — Ateneo Veneto, anno 34, vol. 2, fasc. 1.
— Comitato talassografico Italiano:
— — Bolletino trimestrale, No. 17—25.

Verona. Museo civico:
— — Madonna Verona, fasc. 24—27.

Vicenza. Accademia Olimpica:
— — Atti, N. S., vol. 3, 1911/12.

Warschau. Prace matematijczno-fizyczne:
— — Prace, tom. 23, 1912; tom. 24, 1913.
— Towarzystwo Naukowe [Wissenschaftliche Gesellschaft]:
— — Sprawozdania [Sitzungsberichte], Jahrg. 5, Heft 3—6, 8, 9.
— — Prace, I. Kl., No. 1—3; II. Kl., No. 7—9.
— — Wierzbowski, T.: Przywileje Starej Warszawy 1367—1772, W. 1913.
— — Dyaryusze sejmowe, Bd. 1 und 2, 1912.
— — Wóycicki, Kas.: Forma Dźwikowa, W. 1912.
— — Gorrzyński, Wlad.: Precípitations 1901—05, 1912.
— — Flatan: La Migraine, W. 1912.
— — Źródła dziejowe-Prusy Królewskie, t. 23.
Washington. Academy of Sciences:
— — Journal, vol. III, No. 1.
— National Academy of Sciences:
— — Memoirs, vol. 10, 1911; vol. 11, 1913.
— — History of Century 1863—1913.
— U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1912.
— — Bulletin of the Mount Weather Observatory, vol. 4, part 4.
— — Monthly Weater Review, vol. 41, No. 2.
— — Journal of the agricultural Researche, vol. 1, 1.
— Bureau of American Ethnology:
— — Bulletin, No. 84.
— — Annual report 27, 1905—06; 28, 1906—07.
— Bureau of Education:
— — Report of the commissioner 1911/12, vol. 1, 2.
— Bureau of railway economics:
— — Bulletin, No. 1—6, 10, 12—16, 18—22, 24—27, 29—48, 50—56.
— Carnegie Institution:
— — List of Publications, 22. Nov. 1913.
— Smithsonian Institution:
— — Miscellaneous Collections, No. 2054—2056, 2058, 2059, 2062, 2138, 2144—2153, 2157—2161, 2163, 2167—2176, 2178, 2180—2186.
— U. S. National Museum:
— — Bulletin, No. 79—81.
— — Contributions to the U. S. National Herbarium, vol. 16, No. 4—10, 12; vol. 17, No. 1—3.
— — Proceedings, No. 42—44.
— — Report on the progress 1911/12.
— Astrophysical Observatory:
— — Annals, vol. 3, 1913.
— U. S. Naval Observatory:
— — Astronomical Papers, vol. 9, 1.
— — Annual Report for 1912.

Washington. Surgeon Generals Office U. S. Army:
— — Index catalogue, vol. 17.
— American Jewish Historical Society:
— — Publications, No. 21.
— U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
— — Report of the Superintendent 1911/12.
— — Spec.-publication No. 13, 14.
— — Resultats of observat. Observat. of Cheltetam 1911/12.
— — „ „ „ „ „ Hawai 1911/12.
— U. S. Geological Survey:
— — Bulletin, No. 525–530, 532, 533, 535 537.
— — Professional Paper, No. 71, 77—80, 85 A, 4⁰.
— — Water Supply Paper, No. 289—294, 296—301, 304, 305, 307, 308, 310, 311, 313–318.
— — Mineral Resources 1911, 1, 2.
— — Publications issued since, Jan. 1913.

Weihenstephan. K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1912/13.

Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 45, Heft 4; Jahrg. 46, Heft 1, 2.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte, a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 170, Abh. 4, 6 und 10; Bd. 171, Abh. 1; Bd. 172, Abh. 1, 4–6; Bd. 173, Abh. 2–4; Bd. 174, Abh. 1 und Register zu 161—170; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 121, Heft 6–10; Bd. 122, Heft 1, 2; Abt. II^a, Bd. 121, Heft 6—10; Bd. 122, Heft 1 - 4; Abt. II^b, Bd. 121, Heft 6 –10; Bd. 122, Heft 1—5; Abt. III, Bd. 121, Heft 4—10; Bd. 122, Heft 1—3.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 55, 2—4; Bd. 56, 3, 2, 4; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 75, 1; 88.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1913, No. 1—27.
— — Mitteilungen der prähistorischen Kommission, Bd. II, No. 2.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, No. 45, 46.
— — Almanach, 62. Jahrg., 1912.
— — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 102, 1; Bd. 103, 1, 2.
— — Berichte der Photogramm-Archiv-Kommission, No. 25.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1913, No. 1—52, 4⁰.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 62, No. 8–10; Bd. 63, No. 1—10.
— — Abhandlungen, Bd. 7, No. 1—3.
— Österreichische Kommission für internationale Erdmessung:
— — Verhandlungen 1911.

Wien. K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 26, No. 3, 4; Bd. 27, No. 1—3.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 20.
— Mechitharisten-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1913, No. 1—11.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Abhandlungen, Bd. 22, Heft 2.
— — Verhandlungen 1912, No. 11—18; 1913, No. 1—12.
— — Jahrbuch, Bd. 62, Heft 4; Bd. 63, Heft 1, 2.
— — Geologische Karte, Lief. 113, 17, Blatt Spizza.
— v. Kuffnersche Sternwarte:
— — Publikationen VI, 7.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
— — Schriften, Bd. 53, 1912/13.
— K. K. Universität:
— — Inauguration des Rektors 1913/14.
— — Verwaltungsbericht der K. K. Univ.-Bibliothek 6, 1911/12.
— — Übersicht der Behörden 1913/14.
— — Vorlesungen, S.-S. 1913, W.-S. 1913/14.
— — Bericht über die volkstümlichen Universitätsvorträge 1912/13.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Klimatopographie von Österreich 5, 1912.
— — Jahrbücher 48.

Wiesbaden. Verein für Nassauische Altertumskunde:
— — Annalen, Bd. 40.
— — Mitteilungen, Jahrg. 16, No. 1—4.

Wilhelmshafen. Kais. Observatorium:
— — Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen, N. F., Heft 2.

Wladiwostok. Orientalisches Institut:
— — Izvěstja, tom. 38, 40, 42, 43, 45, 1; 46, 47.
— — Otschet 1911.
— — Protokolli 1910/11.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Jahrbuch, 11. Jahrg., 1912.
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. 18, 1912, 4⁰.
— — Heinemann, Handschriften von Wolfenbüttel, Bd. 9.

Worms. Altertumsverein:
— — Vom Rhein, Jahrg. 11, 1912; 12, 1913.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 42, Heft 3—5.

*

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1912, Heft 1—7; 1913, Heft 1, 2.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Steier
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Diller.
— K. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1913/14.
— — Personalstand 1913 und 1913/14.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 54.
— — Jahresbericht für 1911.

Wunsiedel. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1912/13.

Zürich. Concilium bibliographicum:
— — Annotationes, vol. 7, 1911.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt 115.
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 57, Heft 3, 4; Jahrg. 58, Heft 1, 2.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 36—39, 41—43 (Text und Atlas) und No. 12 und 13 der Erläuterungen.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 14, No. 2 und Beilage, No. 3, 4; Bd. 15, No. 1 mit Beilage und No. 2 und 3.
— — 21. Jahresbericht, 1912.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen 1912, 14 Stück; 1913, 25 Stück.
— — Programm, S.-S. 1913, W.-S. 1913/14.
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen, No. 103.
— — Publikationen, No. 5, 1913.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13 in 4⁰ und 8⁰.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 48 Jahrg.

Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1912/13 mit Programm von Becker.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen.

Agassiz, G. R., London:
— Letters and recollections of Alex. Agassiz. London 1913.

Balch, Thom. Will., Philadelphia:
— Le nouveau Cynée. Philadelphia 1909.

Böhlau, H., Weimar:
— Zeitschrift der Savignystiftung (3 Abteilungen). Weimar 1913.

Bologna, Museo Geologico:
— Onoranze a Giovanni Capellieri. Bologna 1912.

Cocchia, Enrico, Neapel:
— Saggi filologici, 4 voll., Neapel 1907 und 1909.

Fischer, Hermann, Tübingen:
— Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 43—46.

Fritsche, H., Riga:
— Elemente des Erdmagnetismus. Riga 1912.

Groningen, Universität:
— 9. internationaler Physiologenkongreß, 1913.
— Das physiologische Institut der Reichs-Universität. Groningen 1913.

Guelpa, Paris:
— La méthode Guelpa. Paris 1913.

Haury, J., Regensburg:
— Procopius III, 2. Leipzig 1913.

Helmert, Fr. R., Potsdam:
— Bestimmung des Geoids des Harzes. 1913.

Hirth, Fr., New-York:
— The mystery of Fu-lin. 1913.

Houtsma, M. Th., Utrecht:
— Enzyklopädie des Islam, Lief. 17 und 18.

Janet, Charles, Limoges:
— Le sporophyte. Limoges 1912.

Krempelhuber, F. v., München:
— Eine neue Mathematik und Naturphilosophie. Braunschweig 1913.

Kreta, Herakleion:
— *Χριστιανική Κρήτη*, Jahrg. 1, 3 und 2, 1.

Lambros, Spyridon, Athen:
— *Νεὸς Ἑλληνομνήμων*, tom. 9, fasc. 3 und 4 und tom. 10, fasc. 1 und 2.

Lebedinsky, N. G., Zürich:
— Beiträge zur Morphologie des Vogelbeckens. 1913.

Leipzig, Deutsche Bücherei:
— Werbeschrift 1912.

London, University College Library:
— Catalogue of the periodical publications. Oxford 1912.

Lundström, H., Upsala:
— Fynd och fors Kingar, Heft 1.

Merck, Darmstadt:
— Jahresbericht 26, 1912.

Minimax-Apparate-Bau-Gesellschaft, Berlin:
— Zehn Jahre Kampf! Berlin 1913.

Pickering, Edw. C., Cambridge (Mass.):
— The objective prism., 1912.

Rousseau, Ch. M., San Francisco:
— The analysis of light, 1913.

Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt:
— Mitteilungen des deutsch-südamerikanischen Instituts 1913, Heft 1 und 2.

Toems, E., Hamburg:
— Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Erdbebenforschung, 1913.

Teubner, B. G., Leipzig:
— Archiv für Mathematik und Physik, Bd. 20, Heft 4; Bd. 21, Heft 1—4; Bd. 22, Heft 1—4.
— Encyclopédie des sciences mathématiques, tom. II, vol. 6, fasc. 1; tom. III, vol. 2, fasc. 1; tom. IV, vol. 6, fasc. 1; tom. II, vol. 4, fasc. 1.
— Thesaurus linguae latinae, vol. V, fasc. 3, 1; Suppl., fasc. 4.

Thomas, Northcote W., London:
— Anthropological Report of the Ibo-Speaking peoples of Nigeria, part 1—3, 1913.

Uccle, Expedition Antarctic Belge:
— Résultats du voyage du S. Y. „Belgica“ 1897—1899. Geologie: Sistek II; Zoologie: Tuniciers.

Webb, W. L., Lynn (Mass.):
— Unparalleled discoveries 1913.

Weidmann, Berlin:
— Dikaiomata. Herausgegeben von der Graeca Halensis, 1913.

Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder.

Von **Ludwig Föppl** in Göttingen.

Mit 1 Taf.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 11. Januar 1913.

---

§ 1. Die Gleichgewichtslage des Wirbelpaares.

Wird ein Kreiszylinder, der sich in einem Gefäß mit Wasser befindet, aus der Ruhe heraus in Bewegung gesetzt, so lösen sich bald nach Eintritt der Bewegung an seinem hinteren Rand zwei Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn ab, deren Wirbelstärke fortwährend wächst, indem immer neue wirbelnde Flüssigkeit aus der Grenzschicht zwischen Zylindermantel und Potentialströmung heraus nachgeliefert wird. Dabei rückt das Wirbelpaar vom Zylinder ab mit einer Geschwindigkeit, die klein ist im Vergleich mit der Fortschreitungsgeschwindigkeit des Zylinders samt Wirbelpaar in der ruhenden Flüssigkeit. Im Göttinger Institut für Angewandte Mechanik wurde das durch aufgestreutes Lykopodiumpulver deutlich sichtbar gemachte Wirbelpaar in den verschiedenen Entwicklungsstadien nach seiner Ablösung photographiert[1]). Die im Anhang wiedergegebene Photographie zeigt das Wirbelpaar in vorgeschrittener Entwicklung; man macht beim Experiment die Wahrnehmung,

---

[1]) Die photographischen Aufnahmen rühren von Herrn stud. math. Rubach her, der sie in seiner bald erscheinenden Dissertation, die das experimentelle Material zu meiner vorliegenden mehr theoretischen Arbeit enthält, veröffentlichen wird. Die Photographien auf beiliegender Tafel hat mir Herr Rubach in freundlicher Weise zur Verfügung gestellt.

daß dieses so vollkommen ausgebildete Wirbelpaar gegenüber dem Zylinder fast in Ruhe bleibt.

Die angeführten Beobachtungen und Experimente veranlaßten Herrn v. Kármán und mich die Frage aufzuwerfen, ob es wohl hinter einem in ruhender Flüssigkeit bewegten Kreiszylinder Lagen gäbe, wo sich ein Wirbelpaar gegenüber dem Zylinder in Ruhe befinden könne. Gleichzeitig hofften wir, bei der bewegten Platte, bei der gleichfalls ein Wirbelpaar beobachtet wurde, die unendlich große Geschwindigkeit der Potentialströmung an den beiden Enden der Platte mit Hilfe des Wirbelpaares zu umgehen[1]).

Ich habe die Beantwortung dieser Frage versucht, indem ich zunächst hinter dem Kreiszylinder vom Radius 1 den geometrischen Ort für die Ruhelage des Wirbelpaares suchte. Sei die komplexe Koordinate der mit dem Zylinder fest verbundenen Ebene der Strömung $\zeta = \xi + i\eta$, und die Lage der Wirbel $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ bzw. $\bar{\zeta}_0 = \xi_0 - i\eta_0$, so läßt sich das komplexe Geschwindigkeitspotential W mit Hilfe der beiden am Kreiszylinder gespiegelten Wirbel folgendermaßen schreiben:

$$(1) \qquad W = \Phi + i\Psi = U\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iC \lg \frac{(\zeta - \zeta_0)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0}\right)}{(\zeta - \bar{\zeta}_0)\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)},$$

wobei U die Geschwindigkeit im Unendlichen und C die Wirbelstärke bedeuten. Φ ist das Geschwindigkeitspotential; $\Psi =$ const. sind die Stromlinien. Aus (1) erhält man durch Differentiation die komplexe Geschwindigkeit

$$(2) \quad \frac{dW}{d\zeta} = u - iv = U\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + iC\left\{\frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\zeta_0}} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_0} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}}\right\}$$

[1]) Dieser Fall ist schon vor mehreren Jahren von Herrn Professor W. Kutta behandelt worden; eine ausführliche Zeichnung der Strömung befindet sich in der Sammlung des mathem. Instituts der Technischen Hochschule in München. (Anm. von Prof. Finsterwalder.)

Um daraus die Geschwindigkeit der beiden Wirbel, die natürlich immer spiegelbildlich zur ξ-Achse liegen, abzuleiten, ersetzt man in (2) ζ durch ζ_0. Der Term $iC\frac{1}{\zeta-\zeta_0}$ gibt für $\zeta=\zeta_0$ die im Wirbelzentrum herrschende unendlich große Geschwindigkeit des eigenen Wirbels, die aber zu der Fortschreitungsgeschwindigkeit des Wirbelzentrums nichts beiträgt und daher hier weggelassen werden muß. Die komplexe Fortschreitungsgeschwindigkeit des Wirbelzentrums beträgt demnach:

$$(3)\quad u_0 - iv_0 = U\left(1-\frac{1}{\zeta_0^2}\right) + iC\left\{\frac{1}{\zeta_0-\frac{1}{\zeta_0}} - \frac{1}{\zeta_0-\bar\zeta_0} - \frac{1}{\zeta_0-\frac{1}{\bar\zeta_0}}\right\}.$$

Lassen wir nun die Indizes 0 als selbstverständlich weg und trennen Gleichung (3) in Real- und Imaginärteil, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(4)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad u = U\left(1-\frac{\xi^2-\eta^2}{r^4}\right) + C\eta\left(\frac{1}{(r^2-1)^2}-\frac{1}{2\,\eta^2}\right),\\ &\text{(b)}\quad -v = 2\,U\frac{\xi\,\eta}{r^4} - C\frac{\xi}{r^4-1}, \end{aligned}$$

wobei $r^2=\xi^2+\eta^2$. Die Bedingung dafür, daß das Wirbelpaar ruht, ist einfach $u=0$ und $v=0$, oder:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad U\left(1-\frac{\xi^2-\eta^2}{r^4}\right) + C\eta\left(\frac{1}{(r^2-1)^2}-\frac{1}{2\,\eta^2}\right) = 0\\ &\text{(b)}\quad 2\,U\frac{\xi\,\eta}{r^4} - C\frac{\xi}{r^4-1} = 0. \end{aligned}$$

Da ξ als Faktor der linken Seite von Gleichung (5 b) auftritt, so ist $\xi=0$ oder die η-Achse eine Lösung unseres Problems; d. h. ein Wirbelpaar, dessen Mittelpunkte die Koordinaten η und $-\eta$ auf der η-Achse besitzt, kann gegenüber dem Zylinder in Ruhe bleiben. Dabei berechnet sich die Stärke der zu dem beliebig gewählten η gehörigen Wirbel aus (5). Doch hat diese Lösung der Gleichungen (5) für uns kein weiteres Interesse, da sie bei den Experimenten nicht

beobachtet wird. Wir suchen nach weiteren Lösungen der Gleichungen (5) bzw. der aus (5) hervorgehenden Determinantengleichung:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 1-\dfrac{\xi^2-\eta^2}{r^4} & \eta\left(\dfrac{1}{(r^2-1)^2}-\dfrac{1}{2\,\eta^2}\right) \\ \dfrac{2\,\eta}{r^4} & -\dfrac{1}{r^4-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Da sich Gleichung (6) beim Wechsel der Vorzeichen von ξ und η nicht ändert, so muß die Kurve in allen vier Quadranten symmetrisch verlaufen. Durch Umformungen läßt sich Gleichung (6) in folgende einfache Gestalt bringen:

$$(7)\qquad \pm\, 2\,\eta = r - \frac{1}{r},$$

wobei die verschiedenen Vorzeichen vor η zu den beiden Ästen der Kurve gehören[1]).

Gleichung (7) gestattet eine einfache Konstruktion der Kurve, die in Fig. 1 für positive ξ wiedergegeben ist. Hervorgehoben sei, daß die Kurve im Punkte $\xi = 1$ unter 45^0 ansteigt und im Unendlichen eine Asymptote besitzt, die unter 30^0 gegen die ξ-Achse geneigt ist. Der Verlauf der Kurve für negative ξ ergibt sich natürlich durch Spiegelung der gezeichneten Kurve an der η-Achse. Doch hat dieser Ast der Kurve bei der von uns gewählten und in Fig. 1 eingetragenen Rich-

---

[1]) Die Richtigkeit des Überganges von Gleichung (6) zu Gleichung (7) läßt sich sehr einfach beweisen, indem man umgekehrt Gleichung (7), die man auch $4\,\eta^2 r^2 = (r^2-1)^2$ schreiben kann, in Gleichung (6) einsetzt. Dabei läßt sich die linke Seite der Gleichung (6) folgendermaßen umformen:

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{2\,\eta^2}{r^4} & \eta\,\dfrac{1-2\,r^2}{(r^2-1)^2} \\ \dfrac{2\,\eta}{r^4} & -\dfrac{1}{r^4-1} \end{vmatrix} = -\frac{1-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{(r^2-1)^2}{2\,r^6}}{r^4-1} - \frac{(r^2-1)^2(1-2\,r^2)}{2\,r^6(r^2-1)}$$

$$= \frac{(-2\,r^6+2\,r^4-r^4+2\,r^2-1)-(r^4-2\,r^6-1+2\,r^2)}{2\,r^6(r^4-1)} = 0.$$

tung der Geschwindigkeit U im Unendlichen keine Bedeutung, da sich die Wirbel hinter dem Zylinder ausbilden und dabei einen Drehsinn besitzen, wie er für eine bestimmte Lage des Wirbelpaares auf der Kurve in Fig. 1 eingezeichnet ist.

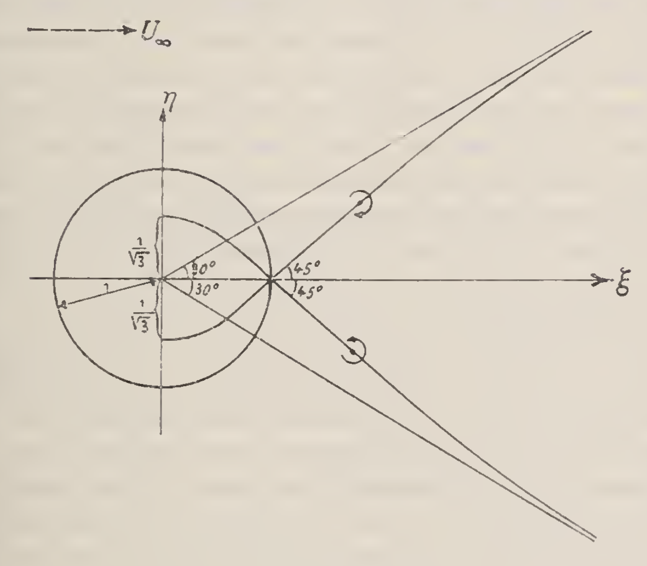


Fig. 1.

Die Wirbelstärke C, die zu den verschiedenen Lagen des Wirbelpaares auf der Kurve gehört, berechnet sich aus (5):

$$C = U \cdot 2\,\eta \left(1 - \frac{1}{r^4}\right). \tag{8}$$

Zu konstanter Geschwindigkeit U im Unendlichen gehört demnach eine um so größere Wirbelstärke C, je weiter das Wirbelpaar auf der Kurve vom Zylinder abliegt.

Vergleichen wir nun die auf der Tafel wiedergegebene Photographie, so finden wir durch Ausmessung, daß die beiden Zentren des Wirbelpaares genau auf der oben bestimmten Kurve liegen. Wir können jetzt folgende Schilderung von dem hydrodynamischen Vorgang, der bei der Bewegung eines sehr

langen Kreiszylinders aus der Ruhe heraus beobachtet wird. entwerfen: Es löst sich an der hinteren Zylinderwand ein Wirbelpaar ab, das unter fortwährendem Wachstum seiner Wirbelstärke sich unserer Kurve nähert und, nachdem es die Kurve erreicht hat, langsam längs der Kurve oder deren nächsten Umgebung weiterwandert, wobei seine Wirbelstärke abermals zunimmt, wie es Gleichung (8) verlangt. Es fragt sich nun, wie der Vorgang sich weiter entwickelt. Das Experiment zeigt, daß die Entwicklung des Wirbelpaares, wie wir sie soeben verfolgt haben, nicht in derselben Art weitergeht, sondern daß sich das Strömungsbild vollständig ändert. Die beiden Wirbel geben ihre spiegelbildlich symmetrische Lage zur ξ-Achse auf; es entstehen neue Wirbel, und zwar nunmehr abwechselnd an beiden Seiten des Zylinders; es tritt eine Art Pendelung der Strömung hinter dem Zylinder auf, während die vorher abgelösten Wirbel in einiger Entfernung hinter dem Zylinder in zwei Wirbelstraßen weiterwandern. Wir haben nunmehr das Strömungsbild, wie es Herr v. Kármán[1]) untersucht hat. Die Änderung des ursprünglichen Strömungsbildes hat offenbar in einer Instabilität der Strömung ihren Grund. Wir wollen uns daher die Aufgabe stellen, das eine Wirbelpaar hinter dem Kreiszylinder auf Stabilität zu prüfen.

§ 2. Stabilitätsuntersuchung des Wirbelpaares.

Wir nehmen an, daß sich das Strömungsbild schon soweit entwickelt hat, daß die Mittelpunkte der beiden Wirbel auf unserer in § 1 bestimmten Kurve liegen; wir denken uns also den Zustand, wie er durch die beigefügte Photographie gekennzeichnet ist. Wie schon in § 1 bemerkt, schreitet das Wirbelpaar nur langsam längs der Kurve weiter, so daß wir diesen Zustand für die Stabilitätsuntersuchung angenähert als Gleichgewichtslage auffassen können. Aus dieser Gleichgewichtslage verschieben wir nun das Wirbelpaar um unendlich kleine

[1]) Gött. Nachr. 1911, S. 509 und 1912, S. 1; ferner v. Kármán und Rubach, Phys. Zeitschr., Jahrg. 1912, S. 49.

Strecken, um zu sehen, ob das Wirbelpaar wieder in die Gleichgewichtslage zurückschwingt. Die Stabilitätsuntersuchung wollen wir in zwei Teilen durchführen: Einmal untersuchen wir die Stabilität bei spiegelbildlich symmetrischer Verschiebung aus der Gleichgewichtslage, das andere Mal bei antisymmetrischer Verschiebung.

Um mit dem ersteren der beiden Fälle zu beginnen, denken wir uns die beiden Wirbel um die unendlich kleinen Strecken $+\alpha$ parallel der ξ-Achse und $+\beta$ bzw. $-\beta$ parallel der η-Achse aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben. Da demnach die beiden Wirbel immer spiegelbildlich zur ξ-Achse bleiben, so können wir die unter dieser Voraussetzung abgeleiteten Gleichungen (4 a) und (4 b) für die Geschwindigkeiten $u = \frac{d\alpha}{dt}$ parallel der ξ-Achse und $v = \frac{d\beta}{dt}$ parallel der η-Achse anwenden. Ersetzt man in den Gleichungen (4) ξ durch $\xi + \alpha$ und η durch $\eta + \beta$ und entwickelt die linken Seiten der Gleichungen (4) nach den kleinen Größen α und β unter Beibehaltung nur der ersten Potenzen in α und β, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (5 a) und (5 b), denen zufolge die endlichen, bei der Entwicklung auftretenden Terme für sich verschwinden, die folgenden Stabilitätsgleichungen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad A\alpha + B\beta = \frac{d\alpha}{dt}, \\ &\text{(b)} \qquad X\alpha + Y\beta = -\frac{d\beta}{dt}, \end{aligned}$$

wobei

$$(10)\qquad \begin{aligned} A &= -\frac{2U}{r^6}\,\xi(4\eta^2+1); \qquad & B &= \frac{2U}{r^5}\left(r^4 + 2r^2 + \frac{2\eta^2}{r^2}\right); \\ X &= 8\,\xi^2\eta\,\frac{U}{r^6(r^4-1)}; \qquad & Y &= \frac{2\xi U}{r^4}\left(1 + \frac{4\eta^2}{r^2(r^4-1)}\right). \end{aligned}$$

Aus den beiden linearen simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung (9 a) und (9 b) läßt sich durch Elimination

einer der beiden Abhängigen α oder β die folgende für β ebenso wie für α gültige Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten:

$$(11) \qquad \frac{d^2 \alpha}{d t^2} + (Y - A) \frac{d \alpha}{d t} + (BX - AY) \alpha = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$(12) \qquad \alpha = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ist, wobei

$$(13) \quad \lambda_{1,2} = -\frac{Y - A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Y - A)^2 - 4(BX - AY)}.$$

Die Bedingungen der Stabilität sind demnach die beiden Ungleichungen:

$$(14) \quad \begin{aligned} &(a) \qquad Y > A \\ &(b) \qquad BX - AY > 0, \end{aligned}$$

die aber erfüllt sind, wie man sich durch Einsetzen der Werte für A, B, X, Y aus (10) überzeugen kann.

Die Stabilität des Wirbelpaares für spiegelbildlich symmetrische Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage ist damit bewiesen. Denkt man sich also statt der ξ-Achse eine Wand, so daß sich Füssigkeit etwa nur in der einen Halbebene befindet, so ist der eine Wirbel gegenüber unendlich kleinen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage vollkommen stabil, da ja die übrigen drei Wirbel durch Spiegelung an der Wand bzw. dem Zylinder entstehen und daher die beliebigen Verrükkungen stets spiegelbildlich symmetrisch sein müssen. Versuche mit einer Scheidewand hinter dem Zylinder sind vorläufig noch nicht in Angriff genommen worden.

Es erübrigt noch die Stabilitätsuntersuchung des Wirbelpaares gegenüber antisymmetrischen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage. Seien also die Koordinaten der Gleichgewichtslage für den ersten Wirbel $\xi' \eta$ und für den zweiten Wirbel $\xi' - \eta$, so sollen die entsprechenden Koordinaten für das verschobene Wirbelpaar $\xi + \alpha$, $\eta + \beta$ bzw. $\xi - \alpha$, $-\eta + \beta$

sein, wobei unter α und β wieder unendlich kleine Strecken zu verstehen sind. Wir dürfen in diesem Falle nicht, wie oben, von den Gleichungen (4) ausgehen, da diese ebenso wie die Gleichungen (1) bis (3) nur für spiegelbildlich symmetrische Anordnung der beiden Wirbel Geltung besitzen. Bezeichnen wir hingegen allgemein die Koordinaten der beiden Wirbelzentren mit $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ und $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$, so findet man leicht durch ähnliche Betrachtungen, wie sie den Gleichungen (1) bis (3) zu Grunde liegen, für die komplexe Fortschreitungsgeschwindigkeit des ersten Wirbels:

$$(15) \qquad u - iv = U\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + iC\left\{\frac{1}{\zeta_1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_2}} - \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta_1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_1}}\right\},$$

wobei wieder $\bar{\zeta}$ den konjugiert imaginären Wert von ζ bezeichnet.

Trennen wir nun Gleichung (15) in Real- und Imaginärteil, ersetzen ξ_1 durch $\xi + \alpha$, η_1 durch $\eta + \beta$, ξ_2 durch $\xi - \alpha$ und η_2 durch $-\eta + \beta$ und entwickeln wieder nach α und β, so erhalten wir wie oben die beiden Stabilitätsgleichungen:

$$(16) \qquad \begin{aligned} &(a) \qquad A'\alpha + B'\beta = \frac{d\alpha}{dt}, \\ &(b) \qquad X'\alpha + Y'\beta = -\frac{d\beta}{dt}, \end{aligned}$$

wobei

$$(17) \qquad \begin{aligned} A' = Y' &= \frac{2U}{r^6}\xi\left\{2(\xi^2 - \eta^2) - \frac{r^2+1}{2}\right\}, \\ B' &= \frac{2U}{r^6}\eta\left\{2(\xi^2 - \eta^2) + \frac{r^2-1}{2}\right\}, \\ X' &= \frac{2U}{r^6}\eta\left\{2(\eta^2 - \xi^2) - \frac{r^2-1}{2} - 2r^2\eta(r^2+1)\right\}. \end{aligned}$$

Ebenso wie wir Gleichung (11) aus den beiden Differentialgleichungen (9) ableiteten, so läßt sich aus den zwei Differential-Gleichungen (16) die folgende wegen $A' = Y'$ vereinfachte Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten:

(18) $$\frac{d^2 a}{d t^2} + (B' X' - A'^2) a = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$a = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ist, mit

(19) $$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{A'^2 - B' X'},$$

sodaß

(20) $$A'^2 - B' X' < 0$$

die Bedingung der Stabilität ist. Durch Einsetzen der Werte für A', B', X' aus (17) überzeugt man sich leicht, daß die Ungleichung (20) für keinen Punkt der Kurve erfüllt ist, so daß damit die Labilität unseres Wirbelpaares nachgewiesen ist. Die beiden Wurzelwerte

$$\lambda_1 = \sqrt{A'^2 - B' X'} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\sqrt{A'^2 - B' X'}$$

gehören zu den beiden Hauptschwingungen des Wirbelpaares für antisymmetrische Verrückungen. Von diesen gibt die zu λ_1 gehörige zur Labilität Veranlassung, während die zu λ_2 gehörige Hauptschwingung eine gedämpfte Bewegung darstellt. Für die erstere dieser beiden Hauptschwingungen erhält man aus (16) das Verhältnis

(a) $$\frac{\beta}{a} = -\frac{A' - \sqrt{A'^2 - B' X'}}{B'};$$

(21) für die letztere, die stabile Bewegung,

(b) $$\frac{\beta}{a} = -\frac{A' + \sqrt{A'^2 - B' X'}}{B'}.$$

Da aber nach (17) $B' X'$ stets negativ ist, weil B' stets positiv, X' stets negativ ist, so sieht man, daß im Fall der labilen Verschiebung $\frac{\beta}{a}$ positiv, im Fall der stabilen $\frac{\beta}{a}$ negativ und zwar absolut genommen größer als im ersteren Fall ist. Wendet man die obigen Formeln (21) für $\frac{\beta}{a}$ auf die aus der

beigefügten Photographie zu entnehmenden speziellen Lage des Wirbelpaares an, so erhält man durch einfache Rechnung:

$$\text{für die labile Verschiebung } \frac{\beta}{\alpha} = 1{,}2$$

$$\text{für die stabile Verschiebung } \frac{\beta}{\alpha} = -3{,}7\,.$$

Die Veränderung des beobachteten Strömungsbildes, wovon am Ende des § 1 die Rede war, hat also in der Labilität einer der vier Hauptschwingungen unseres Wirbelpaares seinen tieferen Grund. Tatsächlich beobachtet man auch bald, nachdem das Wirbelpaar unsere Kurve erreicht hat, und sich nur langsam weiter bewegt, eine merkliche Änderung in dem hydrodynamischen Vorgang, der in der eben berechneten Labilität seinen Grund haben dürfte. Jedoch äußert sich diese Labilität nicht in einer plötzlichen antisymmetrischen Verschiebung der beiden Potentialwirbel, wie man es aus der vorausgehenden Berechnung erwarten könnte, sondern vor Eintritt dieser labilen Verschiebung verlieren die beiden Wirbel den Charakter als Potentialwirbel, indem sich nämlich im Zentrum der Wirbel ein wirbelnder Kern bildet, der sich elliptisch auszieht und gelegentlich auch spaltet. Erst nach dieser Umbildung der Wirbel tritt die obenerwähnte labile Verrückung der Wirbel ein, die den Anfang für die Ausbildung der Kármánschen Anordnung nach zwei parallelen Wirbelstraßen bedeutet.

§ 3. Der Widerstand des Zylinders.

Wir wollen uns die Frage vorlegen, wie der Widerstand des bewegten Kreiszylinders sich theoretisch aus dem beobachteten Fortwandern des Wirbelpaares erklären läßt. Zu dem Zweck denken wir uns den Zylinder gleichförmig bewegt und berechnen für das mitbewegte Koordinatensystem die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses, die von der Wanderung des Wirbelpaares herrührt. Würde das Wirbelpaar relativ zum gleichförmig bewegten Zylinder in Ruhe bleiben, so wäre der Widerstand des Zylinders Null. Tatsächlich beobachtet man

aber, daß die Wirbel wachsen und dabei weiterwandern. Mathematisch wollen wir diesen Vorgang dadurch fassen, daß wir außerhalb der beiden Wirbelkerne Potentialströmung annehmen, aber trotzdem uns die Wirbel zeitlich wachsend denken. Dabei soll das Wirbelpaar auf unserer in § 1 bestimmten Kurve wandern. Der Gesamtimpuls setzt sich aus zwei Teilen zusammen: dem Impuls der Potentialströmung um den Kreiszylinder und dem des Wirbelpaares. Der erste Anteil beträgt $U \cdot \pi \cdot \varrho$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit, U die Geschwindigkeit des Zylinders und der Kreisradius 1 ist[1]). Der zweite Anteil rührt von den beiden reellen und den beiden gespiegelten Wirbeln her. Das komplexe Potential dieser vier Wirbel mit den Koordinaten $\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3\ \zeta_4$ (siehe Fig. 2) beträgt:

$$W = \Phi + i\Psi = C i \lg \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_4)}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)}, \tag{22}$$

sodaß

(23)
(a) $$\Phi = C(\alpha - \beta)$$
(b) $$\Psi = C \lg \frac{r_1 r_4}{r_2 r_3}.$$

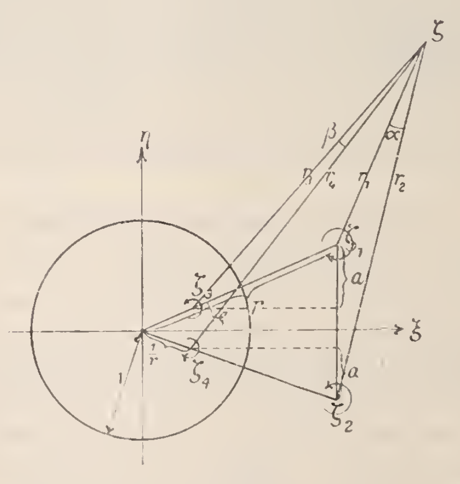


Fig. 2.

[1]) S. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik, übers. v. Friedel, S. 93.

Die X-Komponente des Impulses der gesamten Flüssigkeit ist

(24) $$P = \varrho \int\int u\,dx\,dy = \varrho \int\int \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx\,dy,$$

wobei sich die Integration über den Teil der Ebene erstreckt, der von Flüssigkeit erfüllt ist[1]). Die Integration nach x läßt sich in dem letzten Doppelintegral ausführen, und man erhält mit Rücksicht auf (23 a)

(25) $$P = 4\pi C \varrho a - C \varrho \int_{(\text{Kreis})} (\alpha - \beta)\,dy.$$

Dabei hat a die aus Fig. (2) zu entnehmende Bedeutung, und das Integral ist über den Umfang des Einheitskreises zu erstrecken. Dieses letztere Integral, das man durch Einführung von $y = \sin\gamma$ auch

$$J = \int_0^{2\pi} (\alpha - \beta) \cos\gamma\,d\gamma$$

schreiben kann, läßt sich wohl am einfachsten durch komplexe Integration lösen. Wir trennen J in seine beiden Teile, die von den beiden Wirbelpaaren herrühren:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \alpha \cos\gamma\,d\gamma, \qquad J_2 = \int_0^{2\pi} \beta \cos\gamma\,d\gamma,$$

sodaß

$$J = J_1 - J_2,$$

und berechnen zunächst zur Bestimmung von J_1 die komplexen Integrale

$$J_1' = \int_0^{2\pi} \lg \frac{e^{i\gamma} - r e^{i\varphi}}{e^{i\gamma} - r e^{-i\varphi}}\, e^{i\gamma}\,d\gamma; \quad J_1'' = \int_0^{2\pi} \lg \frac{e^{i\gamma} - r e^{i\varphi}}{e^{i\gamma} - r e^{-i\varphi}}\, e^{-i\gamma}\,d\gamma,$$

sodaß

$$J_1' + J_1'' = 2\int_0^{2\pi} \lg \frac{e^{i\gamma} - re^{i\varphi}}{e^{i\gamma} - re^{-i\varphi}} \cos\gamma\,d\gamma.$$

---

[1]) Entsprechend erhält man für die Y-Komponente des Impulses $Q = \varrho \int\int v\,dx\,dy$. Jedoch sieht man sofort aus Symmetriegründen, daß $Q = 0$ sein muß.

Die Bedeutung der Größen φ und r ist aus Fig. 2 zu entnehmen. Der imaginäre Bestandteil von $J_1' + J_1''$ ist das Doppelte von J_1. Die beiden Integrale J_1' und J_1'' lassen sich aber sehr einfach berechnen. Führt man als Integrationsvariable im ersten Integral $\zeta = e^{i\gamma}$, im zweiten $\zeta = e^{-i\gamma}$ ein, so wird:

$$J_1' = -i \int\limits_{\text{(Kreis)}} \lg \frac{\zeta - r e^{i\varphi}}{\zeta - r e^{-i\varphi}} \, d\zeta; \qquad J_1'' = -i \int\limits_{\text{(Kreis)}} \lg \frac{1 - \zeta r e^{i\varphi}}{1 - \zeta r e^{-i\varphi}} \, d\zeta.$$

Da $r e^{i\varphi}$ und $r e^{-i\varphi}$ außerhalb des Integrationsweges liegen, ist $J_1' = o$. Dagegen ist J_1'' von Null verschieden, indem

$$\int\limits_{\text{(Kreis)}} \lg (1 - \zeta r e^{i\varphi}) \, d\zeta = - \frac{2 i \pi}{r e^{i\varphi}},$$

$$\int\limits_{\text{(Kreis)}} \lg (1 - \zeta r e^{-i\varphi}) \, d\zeta = - \frac{2 i \pi}{r e^{-i\varphi}},$$

sodaß

$$J_1'' = - \frac{2\pi}{r} (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \frac{4\pi i}{r} \sin \varphi .$$

Demnach ist

$$J_1 = \frac{2\pi}{r} \sin \varphi .$$

Zur Berechnung von J_2 dient dieselbe Methode, und es gelten dieselben Formeln, wenn man nur statt r einfach $\frac{1}{r}$ einsetzt. Entsprechend erhält man

$$J_2 = 2 \pi r \sin \varphi,$$

sodaß

$$J = J_1 - J_2 = - 2\pi \sin \varphi \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

oder

$$J = - 2 \pi a$$

weil

$$\sin \varphi \left(r - \frac{1}{r} \right) = a ,$$

wie aus Fig. 2 hervorgeht. Gleichung (25), die den von den Wirbeln herrührenden Bestandteil des Impulses gibt, lautet jetzt

$$P = 4\,C a \pi \varrho + 2\,C a \pi \varrho = 6\,C a \pi \varrho. \tag{26}$$

Fügt man den Impuls der Potentialströmung hinzu, so erhält man den Gesamtimpuls:

$$G = U \pi \varrho + 6\,C a \pi \varrho. \tag{27}$$

Der Flüssigkeitsdruck auf den Zylinder ist durch die zeitliche Änderung von C bestimmt; also bei konstanter Geschwindigkeit ist

$$\frac{dG}{dt} = 6\,\pi \varrho \frac{d(Ca)}{dt}. \tag{28}$$

Da sich nun nach Gleichung (8) C durch die jeweilige Lage der Wirbel auf unsere Kurve ausdrücken läßt, so läßt sich nach (28) der Druck, den der Zylinder bei gleichförmiger Geschwindigkeit erfährt, aus der Lage und der zeitlichen Lagenänderung des Wirbelpaares ableiten.

Der Durchführung der Widerstandsberechnung auf Grund des beobachteten Weiterwanderns des Wirbelpaares auf unserer Kurve stehen aber sehr große Schwierigkeiten im Wege, die vor allen Dingen in der in § 2 nachgewiesenen Labilität des Wirbelpaares begründet sind, indem das Wirbelpaar kurz, nachdem es unsere Kurve erreicht hat, infolge einer labilen Störung die Kurve wieder verläßt. Hat sich aber dann die Kármánsche Anordnung der Wirbel nach zwei Wirbelstraßen hinter dem Zylinder ausgebildet, so läßt sich, wie Herr v. Kármán[1]) gezeigt hat, aus der Beobachtung der Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wirbel, sowie des Abstandes der beiden Wirbelstraßen der Widerstand des Körpers mit sehr befriedigender Genauigkeit angeben.

[1]) v. Kármán und Rubach: Phys. Zeitschr. 1912.

§ 4. Die Strömung um die unendlich lange ebene Platte.

Es liegt nahe, die in § 1 bis § 3 für den Kreiszylinder durchgeführten Betrachtungen auch auf die Bewegung einer ebenen Platte auszudehnen, und zwar wollen wir die Richtung der Bewegung senkrecht zur Platte annehmen. Es ist sehr einfach, sich zu überzeugen, daß es auch hinter der bewegten Platte einen geometrischen Ort für die Lage zweier gegen die Platte ruhender Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn geben muß; denn bilden wir die früher betrachtete Strömung um den Einheitskreis der ζ-Ebene mitsamt dem Wirbelpaar durch

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \tag{29}$$

konform auf die z-Ebene der Platte von der Länge 2 ab und bilden für die Strömung in der z-Ebene die Ableitung des komplexen Geschwindigkeitspotentials, das aus Gleichung (1) durch Elimination von ζ mittels Gleichung (29) erhalten wird, so ergibt sich als Bedingung für die Ruhelage des Wirbelpaares hinter der Platte.

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = o. \tag{30}$$

Da aber in dem Blatt der z-Ebene, dem allein physikalische Bedeutung zukommt, überall $\frac{d\zeta}{dz} \neq o$, so vereinfacht sich Gleichung (30) zu

$$\frac{dW}{d\zeta} = o.$$

Diese Bedingung ist aber dieselbe wie sie die Gleichungen (5) des § 1 ausdrücken, d. h. wir erhalten den gesuchten geometrischen Ort, wenn wir die durch Gleichung (7) bestimmte Kurve mit Hilfe der Gleichung (29) in den Koordinaten $z = x + iy$ ausdrücken.

Diese Umrechnung will ich hier nicht ausführen, sondern nur noch auf die Frage, die vor allen Dingen interessiert, ein-

gehen, ob es Lagen des Wirbelpaares hinter der Platte gibt, die endliche Geschwindigkeit an den beiden Enden der Platte liefern. Die Rechnung zeigt, daß diese Bedingung nur für die Lage des Wirbelpaares im Unendlichen erfüllt ist, was natürlich für die Erklärung der Strömungsbilder nicht in Frage kommt. Was die Beobachtungen der Strömung bei der Bewegung einer Platte betrifft, so zeigt es sich, daß ähnlich wie beim Zylinder bald nach Eintritt der Bewegung sich ein Wirbelpaar am hinteren Rand der Platte ablöst, das fortwährend wächst und dabei langsam von der Platte abrückt.

Nimmt man statt der Platte eine Schale, etwa von kreisbogenförmigem Querschnitt und bewegt sie nach der konvexen Seite hin, so liefert meine Theorie, worauf mich Professor Prandtl aufmerksam gemacht hat, für eine bestimmte Lage des Wirbelpaares im Endlichen, die von der Krümmung der Schale abhängt, an den beiden Enden der Schale endliche Geschwindigkeiten. Auf diese Frage will ich nicht näher eingehen, da noch keine Photographien dieser Strömung vorliegen.

Fig. 3.



Fig 4.



Phot-Lith. v. Hubert Köhler, München.

Beobachtungen über den photoelektrischen Elementareffekt.

Von **A. Joffé.**

Vorgelegt von W. v. Röntgen in der Sitzung am 1. Februar 1913.

R. A. Millikan und F. Ehrenhaft haben eine Methode angegeben, Ladungen von der Größenordnung der Elementarladung messend zu verfolgen. An den kleinsten durch Zerstäubung im Lichtbogen erzeugten Metallteilchen hat Ehrenhaft aus den Fallzeiten im elektrischen und Schwerfelde Ladungen ausgerechnet, die in keiner Beziehung zur Elektronenladung stehen. An größeren, durch mechanische Zerstäubung erzeugten Flüssigkeitstropfen hat Millikan gezeigt, daß ihre Ladungen, die sie in ionisierter Luft ändern, immer ganzzählige Multipla einer Elementarladung sind, und mit einer bewunderungswerten Präzision die Elementarladung zu $4{,}772 . 10^{-10}$ el. st. Einheiten bestimmt. In der Anordnung und der Rechnung von Ehrenhaft sind verschiedene Fehlerquellen vermutet worden; doch wurde sein experimenteller Befund immer wieder bestätigt. Es ist deshalb nicht uninteressant, daß gerade an den kleinen im Bogen erzeugten Metallteilchen die im folgenden beschriebenen Versuche einen anschaulichen und vollkommen bündigen Beweis für die atomistische Struktur der Elektrizität liefern. Dabei würde die Anwendung der Ehrenhaftschen Rechnung auf jeden einzelnen Versuch nur unregelmäßige Werte ergeben. Bei den vorliegenden Versuchen ist aber jede Hypothese und jede kompliziertere Rechnung in noch höherem Maße vermieden, als in der klassischen Arbeit von Millikan. Auch in

einer anderen Beziehung unterscheiden sich diese Beobachtungen: sie beziehen sich nämlich auf die A b g a b e negativer Elektrizität, also der eigentlichen Elektronen, mit dem neuerdings genau gemessenen Werte von $\frac{\varepsilon}{\mu}$.

Bekanntlich wird die einfachste Erklärung der Grundgesetze der Photoelektrizität durch die Einsteinsche Theorie der Lichtquanten gegeben. Es wurde jetzt der Elementarvorgang beobachtet, bei dem der fragliche Lichtquant ein Elektron abspaltet. Die weitere Verfolgung dieses Vorganges ist wohl am ehesten geeignet, über die eventuelle Existenz und physikalische Bedeutung der Lichtquanten zu entscheiden. In dieser Mitteilung ist diese Aufgabe fast noch nicht berührt; es werden nur einige Beobachtungen angeführt, welche die Elektronenabspaltung durch Licht als einen statistischen Effekt feststellen, und die Bedeutung der Intensität und Wellenlänge des Lichtes charakterisieren. Die quantitative Seite dieser Vorgänge ist einer späteren Mitteilung vorbehalten.

Methode und Fehlerquellen.

Nach den Arbeiten von Millikan war es nicht schwer, eine Methode auszuarbeiten, die die Abspaltung eines einzelnen Elektrons zur Beobachtung bringt. Ein Metallstäubchen wird in den Raum zwischen zwei horizontalen, planparallelen Kondensatorplatten gebracht, die an eine genau regulierbare Spannung gelegt sind. Ist das Stäubchen geladen, so läßt sich immer eine solche Spannung finden, bei welcher die elektrische Kraft der Schwere genau das Gleichgewicht hält. Dann bleibt das Teilchen in Ruhe so lange, bis seine Ladung auf irgend eine Weise geändert wird; durch eine entsprechend veränderte Spannung kann die Bewegung des Teilchens dann wieder abgestellt werden. Schließt man jede andere Kraft aus, so muß im Gleichgewicht das Produkt aus der elektrischen Feldstärke f und der Ladung des Teilchens e gleich dem Gewicht des Teilchens mg sein. Da jede, auch die kleinste Kraft in entsprechender Zeit eine endliche Verschiebung des Teilchens bewirken

muß, so ist der Empfindlichkeit der Methode prinzipiell keine Grenze gesetzt (ausgenommen die Fälle, wo die Brownsche Bewegung in Frage kommt); praktisch kommt es auf Ausschließung aller zufälligen Kräfte an, was aber keine besonders komplizierten Hilfsmittel erfordert.

Der Kondensator ist in ein luftdichtes Gehäuse aus Messing eingeschlossen, das mit vier Fenstern versehen ist. Durch das eine gelangt in den Zwischenraum des Kondensators ein schwach konvergentes Lichtbündel zur Beleuchtung des schwebenden Teilchens. Auf der entgegengesetzten Seite befindet sich ein Flußspatfenster zum Durchlaß des ebenso schwach konvergenten ultravioletten Lichtbündels einer *Hg*-Quarzlampe. Senkrecht zu den beiden Bündeln ist ein schwach vergrößerndes (ca. 15 fach) Mikroskop mit Okularteilung aufgestellt, das zur Beobachtung des Teilchens dient. Durch die feinen (ca. 0,5 mm weiten) Bohrungen der oberen Kondensatorplatte werden aus dem vertikal darüber stehenden Zerstäubungsraum Metallteilchen durch Überdruck (Erwärmung des Lichtbogens) oder durch Schwere hineingetrieben. Im Gesichtsfeld des Mikroskopes erscheint zuerst eine kleine Wolke oder eine Gruppe aus mehreren Teilchen, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten fallen. Durch Anlegen und Regulierung der Potentialdifferenz wird ein beliebig herausgegriffenes Teilchen zum Stehen gebracht. Da die Kompensation nur für ein ganz bestimmtes Verhältnis $\frac{e}{m}$ gilt, verschwinden allmählich alle anderen Teilchen, und nur das ins Auge gefaßte Teilchen schwebt unbeweglich eine unbegrenzte Zeit. Das ultraviolette Lichtbündel ist dabei abgeschirmt. Die Kompensation ist nur dann vollständig, wenn die Richtung der elektrischen Kraft mit der Schwerkraft exakt zusammenfällt. Der Kondensator ist zu diesem Zwecke mit drei Stellschrauben versehen; durch Neigung des Kondensatorfeldes kann auch jede horizontal wirkende Kraft kompensiert werden, die klein ist im Vergleich zur Schwerkraft (z. B. der Strahlungsdruck des Lichtbündels).

Die Hauptschwierigkeit lag in der Erzeugung von photo-

elektrisch wirksamen Teilchen. Es zeigte sich nämlich, daß Kupfer- und Zinkbögen in gut getrocknetem Stickstoff Teilchen erzeugten, die im ultraviolettem Lichtbündel der *Hg*-Quarzlampe ($\lambda > 200\ \mu\mu$) bis zu 30 Minuten unbeweglich bleiben, ohne ihre Ladung auch im geringsten zu ändern. Wurde aber der Stickstoff auf das sorgfältigste vom Sauerstoff befreit oder durch reines Helium ersetzt, so änderten die Teilchen ihr Verhalten vollkommen. In einem geringen Bruchteil einer Sekunde bewirkte dasselbe Licht jetzt eine deutliche Ladungsänderung. Diese neue Eigenschaft sieht man auch schon ohne Bestrahlung; während nämlich vorher die Wolke aus ziemlich gleich viel negativen, wie positiven und auch ungeladenen Partikeln bestand, waren jetzt die sämtlichen Teilchen recht stark positiv geladen. Beim Einschalten des elektrischen Feldes ging im ungereinigten Stickstoff die Wolke nach verschiedenen Seiten auseinander; jetzt gehen alle Teilchen nach derselben Richtung, nur mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Dieses neue Verhalten ist augenscheinlich eine Folge ihrer photoelektrischen Empfindlichkeit: das ultraviolette Licht des Bogens, in dem sie entstanden sind, hat alle Teilchen schon im Zerstäubungsraum positiv aufgeladen. Der Grund für diesen auffälligen Unterschied ist wohl die verschiedene chemische Zusammensetzung der Teilchen oder ihrer Oberfläche. Die unempfindlichen Teilchen, die bei Anwesenheit von Sauerstoffspuren erzeugt wurden, sind keine Metallteilchen. Dagegen kann man vermuten, daß die photoelektrisch empfindlichen Teilchen eine Metalloberfläche besitzen, und die Lichtempfindlichkeit als Reagens auf ihren Metallcharakter ansehen[1]).

[1]) Wenn also Herr Ehrenhaft die Wirkung des elektrischen Feldes auf seine Edelmetallteilchen folgendermaßen schildert (Wien. Ber. 1910, S. 836): „Es gibt erstens Teilchen, die in raschere Fallbewegung der verschiedensten Geschwindigkeitsstufen geraten; zweitens Teilchen, deren Fallbewegung unter Einfluß des elektrischen Feldes eine langsamere wird; drittens gibt es Teilchen, die von dem elektrischen Felde entgegen der Richtung des Schwerfeldes gehoben werden; viertens können hie und da Teilchen nahezu schwebend beobachtet werden.“ — So ist zu vermuten, daß es sich um Teilchen der ersten Art, also k e i n e Metallteilchen handelt.

Zur Fernhaltung von Sauerstoffspuren, die aus den Elektroden herausdiffundieren könnten, ist der Zerstäubungsraum in dauernder Verbindung mit einem Gefäß, das mit blankem, metallischem Natrium oder Kalium gefüllt ist. Nach 14 Tagen ist an der Natriumoberfläche noch keine Trübung zu bemerken.

Was die störenden Einflüsse betrifft, so ist jede fremde elektrische Einwirkung durch die Größe der Kondensatorplatten ausgeschlossen (70 × 100 mm bei 3,85 mm Abstand). Eine Annäherung einer geriebenen Siegellackstange hat keinen Einfluß auf das schwebende Teilchen. Dagegen ist sehr zu achten auf Fernhalten jeder Temperaturänderung. Das schwebende Teilchen wirkt wie das beste Bolometer: berührt man eines der vier Fenster mit dem Finger, so beginnt das Teilchen in der entgegengesetzten Richtung zu wandern. Bei Versuchen, wo es darauf ankommt, das Teilchen stundenlang (bis zu 9 Stunden) an derselben Stelle unbeweglich zu halten trotz der schwankenden Intensität des Beleuchtungsbündels, genügte es das entsprechende Fenster mit dem Finger anzurühren, um jede angefangene Horizontalbewegung abzustellen resp. das Teilchen zurückzutreiben; statt dessen wurde oft der Kondensator entsprechend geneigt. Eine ähnliche Beeinflussung der Vertikalbewegung ist natürlich durch die Form der Kondensatorplatten ausgeschlossen.

Als eine weitere Fehlerquelle kämen die photoelektrische Einwirkung auf die Elektroden, die Ionisierung des Gases, die photoelektrische und erwärmende Wirkung des Beleuchtungsbündels in Betracht. Die erste Fehlerquelle wurde vermieden durch die Konvergenz des ultravioletten Bündels, die so getroffen wurde, daß nicht nur das direkte sondern auch das reflektierte Bündel vollkommen innerhalb des Kondensatorraumes verliefen. Die zweite Fehlerquelle kam nicht in Betracht, sofern Licht von der Wellenlänge $> 200\ \mu\mu$ verwendet wurde. Die photoelektrisch wirksame Strahlung des Lichtbogens wurde durch genügende Glasschichten abgeschnitten, die Erwärmung durch einen 15 cm dicken Trog mit einer Lösung von schwefelsaurem Eisen-Ammonium. Die Form des

Lichtbündels wurde so gewählt, daß nur der Innenraum des Kondensators in einer Tiefe von ca. 1 cm beleuchtet wurde. Daß die ersten drei Fehlerquellen vermieden wurden, zeigt die Tatsache, daß unter einigen tausend Beobachtungen, die sehr viele Stunden erforderten, kein Fall beobachtet wurde, wo ohne Ultraviolettlicht eine Ladungsänderung entstand oder durch ultraviolettes Licht eine negative Ladung erfolgte. Brownsche Bewegung war bei den kleinsten Teilchen deutlich zu sehen, kam aber für die Messung kaum in Betracht. Endlich könnte man befürchten, das Teilchen mit einem anderen zu verwechseln. Nun beginnt aber die Messung erst dann, wenn kein anderes Teilchen mehr im Gesichtsfeld sichtbar ist; außerdem wird von Zeit zu Zeit die Fallgeschwindigkeit im Gravitationsfelde gemessen, die die Identität des Teilchens sichert.

Die Empfindlichkeit der beschriebenen Nullmethode, die eigentlich eine elektrische Wage darstellt, ist recht groß. Ohne besondere Hilfsmittel gelingt es ein Teilchen eine Stunde bis auf 1 mm der Okularteilung unbeweglich zu halten. Dasselbe Teilchen durchfällt im Schwerfelde 20 mm in 10 sec, also 1 mm in 0,5 sec. Da die Kraft der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden kann, so heißt das, daß auf das schwebende Teilchen Kräfte wirken, deren Verhältnis zur Schwerkraft kleiner ist als das Verhältnis 0,5 sec : 1 St. $= 10^{-4}$. Jede Kraft, die größer als $\frac{1}{10000}$ der Schwerkraft ist, kann gemessen werden; letztere hat die Größenordnung 10^{-10} bis 10^{-8} Dyne. Die Empfindlichkeit hängt nur von der erreichbaren Störungsfreiheit ab, die in erster Linie durch guten Wärmeschutz bedingt ist. Aus diesem Grunde ist es ratsam, mit der Beobachtungsdauer nicht zu weit zu gehen. Man bekommt dieselbe Empfindlichkeit, wenn man statt dessen die Vergrößerung des Mikroskopes entsprechend erhöht. Nach einigen Versuchen schätze ich die erreichbare Genauigkeit auf 10^{-5} Teil der Schwerkraft.

Wie weiter gezeigt wird, kann man mit Sicherheit die Anzahl der Elektronen feststellen, die ein Teilchen bis zur Entladung abgibt, folglich auch sein Gewicht aus der Gleichung

$f \cdot e = mg$. Jede andere Kraft kann durch die erteilte Geschwindigkeit mit der Schwerkraft verglichen werden oder durch die Neigung des Kondensators bestimmt werden, die nötig ist, um das Teilchen zum Stehen zu bringen. (Letzteres nur dann, wenn die Richtung der Kraft genau bekannt ist.)

Das Anwendungsgebiet der Methode geht deshalb noch über die im folgenden beschriebenen Versuche: Einige orientierende Versuche zeigten, daß die Methode geeignet ist, den Strahlungsdruck auf Teilchen von der Größenordnung einer Wellenlänge zu messen. Ebenso lassen sich die magnetischen Kräfte in verschiedenen Feldstärken bestimmen. Einige diesbezügliche Messungen hoffe ich später mitteilen zu können.

Über die reale Existenz der Elektronen.

Der photoelektrische Effekt an den beschriebenen Teilchen bestätigt in der anschaulichsten Weise die atomistische Struktur der Elektrizität. Schwächt man das ultraviolette Bündel genügend ab, so stellt sich der Effekt folgendermaßen dar: eine Zeitlang (je nach der Intensität des Bündels bis zu 5 Minuten) bleibt das Teilchen vollkommen unbeweglich stehen. Plötzlich beginnt das Teilchen sich zu bewegen. Schließt man momentan die Öffnung im Schirm und ändert die Spannung, so kann das Teilchen wieder zum Stehen gebracht werden. Gehörte vorher zu einer Ladung e_1 eine elektrische Feldstärke f_1, so kann die veränderte Ladung e_2 durch eine Kraft f_2 das Gewicht kompensieren, wobei

$$f_1 e_1 = f_2 e_2 = mg.$$

Die Wiederholung des Vorganges liefert eine Reihe der Potentialdifferenzen an den Kondensatorplatten, die den sukzessiven Ladungen entsprechen. Besteht der Effekt, wie zu vermuten ist, in der Abspaltung je eines Elektrons, so müssen die Ladungen eine Reihe ganzer Zahlen durchlaufen und folglich die Potentialdifferenzen eine Reihe der sukzessiven Zahlen:

$$1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{5} : \tfrac{1}{6} \cdots$$

In der Tat erhielt ich beim ersten Versuch (bei dem

anfänglich die Kompensation nur ganz roh, dann aber etwas genauer ausgeführt wurde) für die Potentialdifferenzen folgende Reihe:

40; 30; 25; 21; 18; 15,3; 13,5; 12,0; 10,8; 10,0; 9,4; —; 8,0; —; 7,0 . . .

Die ersten beiden Zahlen sind $\frac{120}{3}$; $\frac{120}{4}$; setzen wir diese Reihe fort, so kommt

40 : 30 : 24 : 20 : 17,3 : 15 : 13,4 : 12,0 : 10,9 : 10,0 : 9,25 : 8,6 : 8,0 : 7,5 : 7,06.

Die beiden Striche bedeuten eine beobachtete Ladungsänderung, die aber nicht kompensiert wurde, bis die langsame Bewegung nochmals beschleunigt wurde. Die Übereinstimmung beider Reihen entspricht ganz der Genauigkeit der Messung. In allen Messungen, die bis jetzt vorliegen, ist keine vorhanden, deren Abweichung von dem ganzzahligen Verhältnis größer als die möglichen Fehler wäre.

Ich habe Messungsreihen ausgeführt, in denen hintereinander 800 oder sogar 1144 Elektronen abgegeben wurden. Es hat aber dabei keinen Zweck alle einzelnen Potentialdifferenzen wirklich auszumessen; schließlich werden die Unterschiede der einzelnen Zahlen kleiner als die Genauigkeit der Ablesung. Bei einer Genauigkeit der Einstellung von 0,5 % sind nur die ersten 50 Zahlen für die Elektronenfrage brauchbar.

Viel wesentlicher war die Ausarbeitung einer Methode, das durch Bestrahlung schließlich stark positiv geladene Teilchen wieder zu entladen. Es genügte zu diesem Zwecke das ultraviolette Bündel durch Verstellung einer Linse schwach divergent zu machen, dann gaben die beleuchteten Kondensatorplatten Elektronen ab, die vom positiven Teilchen aufgefangen wurden. Meistens wurde eine andere von Millikan angegebene Methode benutzt. Das Gas im Kondensatorraum wurde durch Radium ionisiert; stellt man dabei das Teilchen in die Nähe der positiven Elektrode, so kann man mit Sicherheit darauf rechnen, daß es genügend viele negative Ladungen aufnimmt.

Auf diese Weise konnte das photoelektrisch geladene Teilchen beliebig oft entladen oder sogar umgeladen werden. Die Potentialdifferenzen gehen dann dieselbe Reihe der Werte in umgekehrter Folge durch; nur kann man dabei nicht mit absoluter Sicherheit auf den Gewinn gerade eines Elektrons rechnen.

Bei diesen Versuchen besteht eine Gefahr beim Durchgang durch den ungeladenen Zustand, da ich dabei jede Gewalt über das Teilchen verliere. Dafür bietet dieser Vorgang den anschaulichsten Beweis der Endlichkeit der Elementarladung. Ich beobachte z. B. ein Teilchen, das durch + 404 Volt schwebend erhalten wird; jede Änderung um 1 Volt bedingt eine Aufwärts- oder Abwärtsbewegung. Beleuchtet man das Teilchen ultraviolett, so beginnt das Teilchen plötzlich zu fallen; ein elektrisches Feld von + oder — 1200 Volt hat nicht den geringsten Einfluß auf die Fallgeschwindigkeit. Durch fortgesetzte Beleuchtung wird das Teilchen wieder elektrisch und zwar steht es bei — 404 Volt still. Man sieht unmittelbar, daß es keinen mittleren Zustand gibt zwischen dem ungeladenen und mit einem Elektron geladenen Teilchen.

Meistens ist die Kompensation auf 1 bis 2% genau; in in diesen Grenzen stimmen auch alle Auflade- und Entladereihen überein, deren Zahl ging bis zu 150. Einige dieser Reihen habe ich genauer ausgeführt, doch ging ich mit der Genauigkeit nicht über 0,5%, da jede einzelne Einstellung um so mehr Zeit erfordert, je genauer sie ist. Das Teilchen wird auf einen Okularstrich eingestellt und die Potentialdifferenz so lange reguliert, bis das Teilchen im Laufe von 1—2 Minuten seine Stellung behält. Wegen der Inkonstanz des Beleuchtungsbündels ist es wohl kaum lohnend, noch weiter zu gehen. Nötigenfalls kann man natürlich die störenden Einflüsse noch viel weiter herabsetzen, für den vorliegenden Zweck ist es aber überflüssig.

Im folgenden sind zwei genauer gemessene Reihen angegeben. Die Zeichen *Ra* sollen die Regenerierung durch Radium, *L.* 313 die Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte der Wellenlänge 313 $\mu\mu$ bezeichnen. In der zweiten Kolonne ist

die Dauer der Bestrahlung t angegeben; in der dritten die gemessene Kompensationsspannung V; in der vierten die Elektronenzahl n; in der fünften das Produkt Vn, das konstant sein sollte und in der sechsten die Abweichung vom Mittel in $^0/_0$—$\Delta\,^0/_0$.

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6
Einwirkung	Zeitdauer t''	Potentialdifferenz V	Elektronenzahl n	Vn	$\Delta\,^0/_0$
Ra	—	236,1	3	708,3	— 0,1
Ra	—	353,6	2	707,2	— 0,2
Ra	—	708,6	1	708,6	— 0,06
L. 313	16	353,9	2	707,8	— 0,17
„	9,5	235,1	3	705,3	— 0,6
„	8 + 18	177,8	4	711,2	+ 0,3
„	26	141,3	5	706,5	— 0,35
„	4	101,2	7	708,4	— 0,1
„	3 + 11	89	8	712,0	+ 0,4
„	7	71,1	10	711	+ 0,3
„	4	59,5	12	714	+ 0,7
„	92	51,3	14	707,5	— 0,2
„	10	47,3	15	709	± 0
„	13	44,3	16	708,8	— 0,03
„	12,5	41,8	17	711	+ 0,3
„	4	39,5	18	711	+ 0,3
„	28	35,3	20	706	— 0,4

Tabelle II.

1	2	3	4	5	6
	t	V	n	Vn	Δ %
		— 125,6	+ 6	753,6	— 0,18
L. 265	3″	— 151,0	+ 5	755,0	± 0
"	5 + 3″5	— 247,6	+ 3	742,8	— 1,6
"	4″	— 755,7	+ 1	755,7	+ 0,1
"	10″	± ∾	0	∾ · 0	—
"	37″	+ 758,4	— 1	758,4	+ 0,5
"	2″	+ 377,6	— 2	755,2	+ 0,03
"	7″	+ 254,6	— 3	763,8	+ 1,2
"	4″	+ 189,8	— 4	759,2	+ 0,55
"	9″	+ 152,5	— 5	762,5	+ 1,0
"	7″	+ 125,5	— 6	753,0	— 0,27
"	?	+ 108,5	— 7	759,5	+ 0,6
"	2″5	+ 95	— 8	760,0	+ 0,66
"	4″	+ 84,3	— 9	758,7	+ 0,5
"	5″	+ 68,5	— 11	753,5	— 0,2
"	7″	+ 62,5	— 12	750,0	— 0,66
"	?	+ 58,5	— 13	752,5	— 0,3
"	7″	+ 54,5	— 14	753,0	— 0,27
"	3″5	+ 50,0	— 15	750,0	— 0,66
Ra	—	68,6	— 11	754,6	— 0,05
"	—	84,5	— 9	760,5	+ 0,7

Tabelle III.

	t	V	n	$\frac{2375}{n}$		t	V	n	$\frac{2375}{n}$
Ra		1178	2	1187	*L.* 313	81″	103,5	23	103,2
L. 313	3″	790	3	792	„	45″	95,7	25	95,0
„	3″5	596	4	594	„	245″	88,0	27	88,0
„	18″5	473	5	475	„	40″	85,2	28	84,9
„	15″	394	6	395	„	205″	82,0	29	82,0
„	13″	295,6	8	295,6	„	41″	79,0	30	79,2
„	1″	261,6	9	263,5	„	16″	76,7	31	76,7
„	12″	236,6	10	237,5	„	370	74,7	32	74,3
„	11″	215	11	215,8	„	210	72,6	33	72,0
„	4″	199	12	198	„	40″	70,5	34	70,0
„	21″	170,0	14	169,6	„	30″	68,5	35	67,9
„	9″	158,0	15	158,4	„	110″	66,3	36	66,0
„	4″5	148,5	16	148,4	„	50″	62,8	38	62,6
„	22″	139	17	139,5	„	25″	59,5	40	59,4
„	6″	131,5	18	132,0	„	22″	56,9	42	56,6
„	21″	125,0	19	125,0	„	9″	55,4	43	55,3
„	43″	119,0	20	118,7	„	85″	54,2	44	54,0
„	12″	108,5	22	108,0	„	131	51,9	46	51,6
„	375″	99,6	24	99,0	*Ra*	—	788,7	3	792
„	115″	96	25	95,0	*L.* 313	5″	594	4	594
Ra	—	595	4	594	„	147″	474	5	475
L. 313	27	475	5	475	„	139″	393	6	395
„	124	394	6	395	„	68″	341	7	339
„	26	335,5	7	339	„	27″	298	8	295,6
„	94″	296,6	8	295,6	„	170″	262	9	263,5
„	20″	261,6	9	263,5	„	108″	237	10	237,5
„	130″	237,6	10	237,5	„	78″	215	11	215,8
„	9″	215,6	11	215,8	*L.* 313	22″	198	12	198
„	8″	198,0	12	198,0	Ver-	8″5	183	13	182,5
„	14″	182	13	182,5	größ. Intens.	7″5	169,5	14	169,6
„	28″	169	14	169.6		55″	158,7	15	158,4
„	8″5	148	16	148,4		100″	149	16	148,4
„	7″	139,0	17	139,5		40″	132	18	132,0
„	41″	125,0	19	125,0		7″	125	19	125,0
„	54″	118,0	20	118,7		40″	119	20	118,7
„	17″	111	21	113		62″	112	21	113
„	84″	107.5	22	108.0		41″	108,2	22	108

	t	V	n	$\frac{2375}{n}$
L. 313	6″	103,5	23	103,2
„	2″	99,0	24	99,0
„	44″	91,5	26	91,3
„	20″	88,3	27	88,0
„	52″	85,5	28	84,9
„	42	82,3	29	82,0
„	16″	79,0	30	79,2
„	63″	77,0	31	76,7
„	85″	70,0	34	70,0
„	130″	68,2	35	67,9
„	25″	66,3	36	66,0

	t	V	n	$\frac{2375}{n}$
L. 313	*Ra*	787	3	792
„	39″	592	4	594
„	72″	473	5	475
„	41″	392	6	395
„	15″	341	7	339
„	6″	296	8	295,6
„	8″	236	10	237,5
„	26″	215	11	215
„	5″	198	12	198
„	32	182	13	182,5

u. s. w.

Der photoelektrische Elementarvorgang.

Der Hauptzweck dieser Untersuchung ist es, durch Studium des photoelektrischen Elementarvorganges Aufschluß über die Struktur des Lichtes zu gewinnen. Es besteht einige Hoffnung, durch gesonderte Variation der Intensität und Wellenlänge des Lichtes einerseits und der Teilchengröße und -Struktur andererseits, die beiden Seiten des photoelektrischen Vorganges zu trennen und so der Frage nach den Lichtquanten näher zu kommen; wenigstens einige der vielen Möglichkeiten auszuschließen. Ebenso, wie es bei der Elektrizität durch die beschriebenen Versuche, sowie durch die Versuche von R. A. Millikan gelungen ist, die Atomisierung nachzuweisen, kann man vielleicht mit der Lichtintensität besonders für ganz kurze Wellenlängen so weit kommen, daß die Diskontinuität sich bemerkbar machen müßte, falls sie vorhanden ist. Dieser Zweck ist aber noch nicht annähernd erreicht; diesbezügliche Beobachtungen befinden sich erst im Stadium der Vorversuche. Einige Fragen des photoelektrischen Elementareffektes sind aber schon genügend geklärt, um über sie berichten zu können. Im folgenden sollen einige Beobachtungen mitgeteilt werden, die zunächst

wenig zusammenhängen, sich aber sämtlich auf die Frage der Lichtquanten beziehen.

I. Wie sich schon aus den angeführten Tabellen ergibt, ist der photoelektrische Elementarvorgang ein statistischer Effekt. Die Abspaltung eines Elektrons erfolgt nicht sofort nach der Belichtung, auch nicht nach einem bestimmten Zeitintervall, sondern mit einer Verspätung, die für genau gleiche mittlere Lichtintensität und gleiche Stellung desselben Teilchens in weitesten Grenzen variiert. Man kann danach nur von einer mittleren Auslösezeit sprechen. Diese mittlere Auslösezeit ist um so kleiner:

1. Je größer der Durchmesser des Teilchens ist —, deshalb beobachtet man keine Verspätung, die noch im Jahre 1889 J. Borgmann vermutete, an großen Metallplatten.

2. Je größer die Intensität des Lichts ist. So war z. B. für ein Teilchen bei Belichtung mit der Linie 313 $\mu\mu$ einer *Hg*-Quarzlampe, die unter einer Spannung von 36 Volt brannte, die mittlere Auslösezeit 67 sec (Mittel aus 57 Versuchen), bei 57 Volt an der Lampe dagegen 33 sec (Mittel aus 46 Versuchen).

3. Je kleiner die Wellenlänge des Lichts. So sank für dasselbe Teilchen die Auslösezeit auf 7 sec für die Linie 280, deren Intensität bei 57 Volt viel schwächer als für 313 ist.

Für ein anderes Teilchen waren bei 90 Volt an der Lampe und 4,4 A Stromstärke die mittleren Auslösezeiten

für	$\lambda = 366\,\mu\mu$	190 sec
„	$\lambda = 334\,\mu\mu$	48 „
„	$\lambda = 313\,\mu\mu$	3 „
„	$\lambda = 280\,\mu\mu$	0,8 „

II. Das intensive Beleuchtungslicht, in dem noch die Wellenlängen bis 400 $\mu\mu$ vertreten waren, hatte in einigen Stunden kein einziges Elektron ausgelöst. Daraus ergibt sich, daß es im Spektrum eine Stelle gibt, wo der Photoeffekt so stark verlangsamt wird, daß er praktisch aufhört zu existieren. (Bei der Diskussion der vorstehenden Zahlen ist wohl zu beachten,

daß die Linie 366 $\mu\mu$ ungemein intensiver ist als 334 $\mu\mu$.) Für Zink liegt die Grenze etwa bei 380 $\mu\mu$.

III. Die einfachste physikalische Deutung der Auslösungszeit eines Elektrons wäre die folgende: in dieser Zeit wird aus dem Strahlungsfeld die für das Herausfliegen eines Elektrons notwendige Energie angesammelt — die Auslösungszeit ist die Akkumulationszeit. Diese Deutung wird schon durch die beobachtete Zeitdauer (einige Minuten) und die außerordentlich großen Schwankungen der Auslösungszeiten wenig wahrscheinlich[1]). Folgendes zu ihrer Prüfung angestelltes Experiment schränkt diese Deutung wesentlich ein.

Wir fragen: ist es für die Auslösungszeit gleichgültig, ob das ultraviolette Licht die ganze Zeit ununterbrochen wirkt oder aber in kleinen Zeitintervallen mit längeren Pausen dazwischen? Nur eine Akkumulation der Energie, für die solche Pausen ohne Einfluß wären, würde dadurch nicht berührt[2]). In der Tabelle IV sind die Ergebnisse eines solchen Versuches dargestellt. An demselben Teilchen wurden die Auslösungszeiten eine Zeitlang beobachtet. Da die Verhältnisse für ein stark geladenes Teilchen anders liegen, als für ein schwach geladenes, wurde nur das Herausfliegen der ersten 10—11 Elektronen beobachtet und dazwischen jedesmal das Teilchen in der beschriebenen Weise durch Radium regeneriert. Nachdem einige solche Reihen (I, II, III, V) beobachtet wurden, wiederholte ich unter denselben Verhältnissen die Beobachtung, indem jedesmal nur 10 sec lang belichtet wurde mit Pausen von 50 sec. In der letzten Kolonne ist die gesamte Beleuchtungsdauer für jedes Elektron angegeben.

[1]) Dem Folgenden wird die Annahme zu Grunde gelegt, daß die beobachtete Schwankung nicht wesentlich durch die Brownsche Rotation der unregelmäßigen Teichen beeinflußt wird*).

[2]) Dies würde vielleicht die neue Strahlungshypothese von M. Planck zulassen.

*) Anm. bei der Corr. Versuche mit flüssigen durch mechanische Zerstäubung im Stickstoff hergestellten Zinkamalgamkugeln zeigen dieselben Schwankungen, wodurch diese Annahme bestätigt wird.

Tabelle IV.

$\lambda = 313\ \mu\mu$.

Anzahl der Elektronen auf dem Zinkteilchen	Auslösezeiten in sec					Belichtungszeit bei 10 sec Bel. mit 50 sec Pausen
	Reihe I	Reihe II	Reihe III	Reihe IV	Reihe V	
4				20		
3				55		
2				73		
1				34		
— 1	30	33	63		24	108
— 2	10	70	15		19	171
— 3	25	15	152		103	189
— 4	8	24	85		29	125
— 5	27	2	110		5	37
— 6	15+15+48	80	20		130	12
— 7	60+72	8,5			25	146
— 8	33	3,5			75+102	95
— 9	14	270			337	96
— 10		5			280	410
— 11					11	78
Mittel	40	54	74	(45)	104	133

Bilden wir das Mittel der Auslösungszeiten für die einzelnen Reihen, so sieht man jedenfalls, daß die letzte Reihe keine Ausnahmestellung einnimmt. Das Elektron kann also ebensogut in den ersten 10 sec nach einer längeren Pause, wie in den 10 sec nach einer längeren Belichtung das Teilchen verlassen.

Inwiefern diese Behauptung auch quantitativ richtig ist, hoffe ich an einem für statistische Zwecke besser geeigneten Material untersuchen zu können.

Dagegen läßt sich aus dieser Versuchsreihe, wie auch aus dem gesamten Beobachtungsmaterial, einsehen, daß die Teilchen durch längere Belichtung bei Atmosphärendruck weniger empfindlich werden (die Auslösungszeiten wachsen), nach einer langen Pause von 10 bis 20 Minuten sich aber teilweise erholen.

So waren z. B. die Auslösungszeiten bei einer anderen Beobachtungsreihe:

Gleich nach einer Pause von 10—20 Minuten.	Nach längerer Bestrahlung mit kurzen Pausen entsprechend
22; 8.5	13; 40
7; 12	62; 41
6; 2	140; 25
39; 72	30; 135
3; 2	33; 45.

Diese auch für große Metallplatten längst bekannten Erscheinungen komplizieren die untersuchte Erscheinung. Es wird aber vielleicht gelingen, die Versuche im Vakuum und mit anderem Material auszuführen, dann fallen diese Erscheinungen weg. Die zu großen Fallgeschwindigkeiten in diesem Falle bilden die wesentlichsten experimentellen Schwierigkeiten.

V. Weniger durchsichtig sind die Resultate der Messung des Grenzpotentials, bis zu welchem das Licht imstande ist, ein Teilchen aufzuladen. Man beobachtet bei fortdauernder Beleuchtung, daß die Emission der Elektronen, die anfangs mit ziemlich gleichmäßiger Geschwindigkeit erfolgt, dann immer langsamer wird. Eine längere Pause hat keinen wesentlichen Einfluß; der Verlust der Ladung bringt sofort die große Empfindlichkeit. Dieselbe Beleuchtung, die anfangs ein Teilchen in 0,8 sec erzeugte, bringt dann nur noch 1 Teichen in 10 sec heraus; bei einer noch etwas höherer Elektronenzahl (800 statt 700) gingen schon in 10 Minuten weniger als 8 Elektronen heraus. Trotzdem läßt sich ein einfacher Schluß auf das Grenzpotential aus diesen Versuchen nicht ziehen.

1. Bei dem statistischen und absolut unipolaren Charakter der Erscheinung ist die Existenz und besonders die Bestimmung einer solchen Grenze überhaupt fraglich.

2. Das Grenzpotential soll dann erreicht werden, wenn die Arbeit der abfliegenden Elektronen im Felde des Teilchens gleich der anfänglichen kinetischen Energie wird. Nun ist zwar die freie Weglänge von derselben Größenordnung wie die

Radien der Teilchen, die mittlere freie Weglänge der Elektronen also so groß, daß sie meistens das Feld frei durchlaufen. Die Elektronen stoßen aber immerhin oft mit Gasmolekülen zusammen, wobei noch die kinetische Energie der Gasmoleküle ins Spiel kommt. Auch diese Verhältnisse vereinfachen sich im luftverdünnten Raume.

3. Die beschriebene Methode gibt ohne weiteres das Gewicht des Teilchens und die Elektronenzahl. Zur Bestimmung der Kapazität bedarf man aber noch Hypothesen über die Form und die Dichte der Teilchen. Setzt man die Form als kugelförmig und die Dichte gleich der des reinen Metalls voraus, so begeht man sicher einen Fehler, was aus den Versuchen sofort ersichtlich ist. Es gibt nämlich zwei Wege zur Bestimmung des Durchmessers bei diesen Voraussetzungen: Aus der elektrischen Wägung hat man:

$$f \cdot e = g \cdot \sigma \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \ . \ . \ . \qquad (1)$$

Andererseits gibt das Stokessche Gesetz mit der Korrektion von Cunnigham:

$$v = \frac{2}{9} g \frac{r^2}{\mu} \cdot \sigma \left(1 + A \frac{l}{r}\right) \ . \ . \ . \qquad (2)$$

wo v die Geschwindigkeit der Fallbewegung bedeutet. Alle Werte mit Ausnahme von r sind für jedes Teilchen bekannt. Berechnet man aber r aus beiden Formeln, so erhält man immer aus der zweiten nur etwa halb so große Zahlen, wie aus der ersten. Dies kann noch verschiedene Gründe haben: 1. Eine andere Dichte der Teilchen; 2. Abweichung von der Kugelgestalt; 3. Unrichtigkeit der Cunnighamschen Korrektion für so kleine Teilchen. Läßt man nur zu, daß der Korrektionsfaktor irgend eine Funktion von r ist, was ja für eine ideale Metallkugel anzunehmen ist, so muß jedenfalls $f \cdot e$ irgend eine gesetzmäßige und eindeutige Funktion der Fallgeschwindigkeit sein. Trägt man aber für die sämtlichen Teilchen die entsprechenden Werte von fe und r in ein Koordinatensystem

ein, so bekommt man eine Punktgruppe, die eine recht bedeutende Streuung um eine mittlere Richtung zeigt. Schieben wir die Abweichungen allein auf die Dichte, so müßten die untersuchten Zinkteilchen eine Dichte von 2 bis 3 besitzen. Sicher ist aber auch die Kristallform nicht ohne Einfluß. Die Unsicherheit verschwindet bei einem Quecksilbertropfen, deren Untersuchung ich noch vorhabe.

Unter diesen Umständen ist die Mitteilung des Zahlenmaterials für die Abhängigkeit der Grenzladung von der Wellenlänge noch verfrüht. Es handelt sich jedenfalls für die Wellenlänge 254 $\mu\mu$ um Zahlen zwischen 1 und 3 Volt beim Zink.

Dieselben Umstände machen die beschriebenen Teilchen ungeeignet zur Präzisionsmessung der Elementarladung. Es wurde immer umgekehrt verfahren, aus dem experimentell und theoretisch bestimmten Wert von e wurde das Gewicht des Teilchens bestimmt.

St. Petersburg, Physikalisches Laboratorium des Polytechnikums, 7. Januar 1913.

Die geschichtlich erste grundsätzliche Unterscheidung zwischen Schichtvulkanen und Quellkuppen.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Wer sich die interessante Aufgabe stellt, Parallelen zwischen der Geologie und der physikalischen Geographie in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts auf der einen und in der Gegenwart auf der anderen Seite zu ziehen, der wird oft genug erstaunt und erfreut sein über die Berührungspunkte, die sich zwischen zwei anscheinend so weit auseinanderliegenden Zeitabschnitten ergeben. Oft hat man sich dieser vergleichenden Betrachtung noch nicht angenommen, und es fehlt sehr an Vorarbeiten dazu; ja strenggenommen ist nur eine einzige vorhanden, freilich eine sehr wertvolle, nämlich das Zittelsche Geschichtswerk[1]), dessen Wert man um so mehr schätzen lernt, je häufiger man sich mit ihm beschäftigt. Selbstverständlich kann es jedoch zumeist nur Andeutungen geben, weil der von ihm bewältigte Stoff ein ungeheuer großer ist. Auf gewisse einschlägige Vorkommnisse ist bereits an anderen Stellen[2]) hingewiesen worden, und auch die vorliegende Studie soll den angedeuteten Gedanken weiter ausführen. Man kann dreist

[1]) K. A. v. Zittel, Geschichte der Geologie und Paläontologie bis Ende des XIX. Jahrhunderts, München-Leipzig 1899.

[2]) Vgl. S. Günther, Der Unterricht in der Allgemeinen Erdkunde im XVIII. Jahrhundert, Österreich. Monatschr. für den grundlegenden naturwissenschaftlichen Unterricht, 7. Jahrgang, S. 39 ff.; Ders., Aus der Sturm- und Drangperiode der Geogonie, Mitteil. für die Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften, 11. Band, S. 449 ff.

es aussprechen, daß eine ganz unerwartet große Anzahl richtiger vulkanologischer Anschauungen damals bereits antizipiert worden ist, und wenn die Nachwelt von diesen zunächst keine Notiz nahm, so liegt der Grund solcher Unterlassung recht oft darin, daß der übermächtige Einfluß einzelner hervorragender Persönlichkeiten sich allzusehr geltend machte. Daß die Geschichte der Lehre vom Vulkanismus Proben für die Richtigkeit dieser Behauptung darbietet, ist ziemlich allgemein bekannt, aber gerade bezüglich des Punktes, mit dem wir uns hier zu befassen gedenken, tritt der Sachverhalt besonders deutlich hervor.

In der Folgezeit hat man die fundamentale Einteilung der durch den Austritt magmatischer Massen aus der Erdrinde in zwei ihrem ganzen Wesen nach grundverschiedene Gruppen gewöhnlich einem neueren Geologen zugeschrieben[1], und daß dieser die Trennung mit vollem Bewußtsein und glücklicher Hand durchgeführt hat, kann keinem Zweifel unterliegen. Der Göttinger Geologe v. Seebach hatte in Mittelamerika durch gründliche Autopsie die Vielgestaltigkeit der vulkanischen Bildungen kennen gelernt und sich davon überzeugt, daß die Struktur derselben durchaus nicht die gleiche ist, daß vielmehr aus den Abweichungen derselben auch auf eine prinzipielle Verschiedenheit des Bildungsprozesses geschlossen werden muß. So gelangte er zu seiner Gegenüberstellung zweier Haupttypen[2]: Stratovulkane und homogene Vulkane (aus äußeren Gründen auch Domvulkane genannt). „Diese Einteilung ist seitdem in die meisten Lehrbücher übergegangen und später von A. Geikie und E. Reyer weiter begründet worden[3].“ Gerade Geikie hat wesentlich dazu beigetragen,

[1]) v. Seebach, Vorläufige Mitteilung über die typischen Verschiedenheiten im Bau der Vulkane und deren Ursache, Zeitschr. d. Deutschen Geol. Gesellschaft, 18. Band, S. 643 ff.

[2]) Diese Gegensätzlichkeit bleibt bestehen, mag die Warnung von E. Sueß vor schematischen Konstruktionen des Vulkanbaues auch noch so berechtigt sein (Das Antlitz der Erde, 1. Abt., Prag-Leipzig 1883, S. 190).

[3]) v. Zittel, a. a. O., S. 398.

die Existenz kraterloser Vulkane zur allgemeinen Anerkennung zu bringen[1]), und solchergestalt hat die Vulkanologie im letzten Halbjahrhundert einen bedeutsamen Versuch tieferen Eindringens in die Geheimnisse der aus feurigflüssigem Gusse erstarrten Oberflächenformen machen dürfen.

Wie indessen erwähnt ward, ist der Gedanke, dem v. Seebach einen so prägnanten Ausdruck gab, keineswegs ganz neu, sondern geht auf einen viel weiter hinter uns liegenden Zeitpunkt zurück. Es wäre bei der staunenswerten Fülle des vulkanologischen Schrifttums in der mit dem Namen Werner abschließenden Periode nicht zu verwundern, wenn eifriges Durchsuchen dieser älteren Veröffentlichungen noch gar manchen anderen Konkurrenten um die Ehre einer zutreffenden Einteilung der magmatischen Gebilde zutage fördern würde; ganz sicher steht dies jedoch für einen auch sonst sehr verdienten Forscher jenes Zeitraumes fest. Dies ist der Deutsch-Ungar Johann Ehrenreich v. Fichtel[2]), der sich namentlich durch seine Begründung einer wissenschaftlichen Landeskunde der Karpathen einen geschätzten Namen gemacht hat[3]).

---

[1]) Geikie, The Lava Fields of North Western Europe, Nature, 28. Band, S. 3. Zumal auch seine Erfahrungen am nordamerikanischen Schlangenfluß mußten dem schottischen Gelehrten die Möglichkeit einer kraterlosen Entbindung von Lava nahelegen.

[2]) Von Beruf Jurist und Verwaltungsbeamter, hat v. Fichtel (geb. 1732 zu Preßburg, gest. 1795 zu Hermannstadt) seine Erforschung der Gebirge zunächst unter dem administrativen Gesichtspunkte begonnen, sich aber offensichtlich mehr und mehr in die Sache selber hineingearbeitet und ihr vielleicht gerade dadurch viel genützt, daß er in Schulvorstellungen nicht im mindesten befangen war. Im Zittelschen Werke wird ihm auch die Autorschaft einer Monographie der fossilen Foraminiferen beigelegt, welche er 1803, zusammen mit v. Moll, in Wien herausgegeben habe. Das angegebene Todesdatum macht, falls nicht von einer posthumen Veröffentlichung die Rede sein soll, jene Angabe unwahrscheinlich. Zumeist aber wird vergessen, daß v. Fichtel einen Sohn hinterließ, der in seine Fußstapfen trat und uns später wieder begegnen wird.

[3]) Die Geschichte der Erforschung des ungarischen Randgebirges ist erst in jüngster Zeit zum Gegenstande eingehenderen Studiums ge-

Auf seine vulkanischen Ansichten macht v. Zittel[1]) wiederholt aufmerksam, indem er auch seiner Scheidung der betreffenden Berge in selbständige Gruppen gedenkt, ohne immerhin auf sie jenen Nachdruck zu legen, der, wie sich zeigen wird, voll berechtigt wäre. Aber auch wegen seiner Bemühungen um eine genauere Charakteristik der verschiedenen plutonischen und vulkanischen Gesteinsarten, sowie wegen seiner Arbeiten auf paläontologischem Gebiete, die auch den Protozoen gerecht werden wollten[2]), ist er einer ehrenden Erinnerung in der Geschichte der Erde sicher. Uns geht hier in erster Linie seine Theorie der Vulkane an[3]), die ihn eben als einen Mann von großer Sachkenntnis, wie von freier, keinem Doktrinarismus unterworfener Denkart kennen lehrt. In einem kernigen Satze, den er gleich an die Spitze stellt, so daß folglich der Beweis erst aus den sich anschließenden Ausführungen sich ergeben kann, faßt er seine Gedanken zusammen[4]): „Daher haben

---

macht worden (G. Jakob, Belsazar Hacquet und die Erforschung der Ostalpen und Karpathen, München 1912, S. 74 ff.). Es geht aus dieser Darlegung hervor, daß zwar seit dem Jahre 1615 die Karpathen eine gewisse literarische Berücksichtigung gefunden haben, daß jedoch erst mit v. Fichtel und Hacquet die naturwissenschaftliche Seite entsprechend zu ihrem Rechte gelangte. Bei Jakob wird auch (a. a. O., S. 91) von der uns hier beschäftigenden Vulkan-Dichotomie v. Fichtels kurz gesprochen.

[1]) v. Zittel, a. a. O., S. 127, S. 176, S. 450. Am erstgenannten Orte wird der Gegensatz, in den sich der überzeugte Vulkanist und Anhänger der Leibnizschen „Protogaea“ gegen die Wernersche Richtung stellte, scharf hervorgehoben.

[2]) Inwieweit die fragliche Stelle (a. a. O., S. 796) durch die Verwechselung von Vater und Sohn beeinflußt ist, müßte erst durch eine besondere Prüfung ermittelt werden.

[3]) J. E. v. Fichtel, Mineralogische Bemerkungen von den Karpathen, 2. Teil, Wien 1791, S. 415 ff. Die erste Abteilung ist mehr beschreibenden Inhaltes und tritt insonderheit solchen Fragen näher, welche den Montanisten angehen und damit auch für die Volkswirtschaft einigen Wert erhalten können. Auf Nutzmineralien — Salz, Kohle, Petroleum — wird deshalb am meisten gesehen.

[4]) v. Fichtel, a. a. O., S. 416. Die Sperrung findet sich nicht im Originale.

wir in Absicht auf den inneren Bau zweierlei Vulkanen: Vulkanen von ganzen und mächtigen gleichartigen Massen, dann Vulkanen von geschichteten, ungleichartigen Lagen." Hier ist, wie man sieht, genau dieselbe Tatsache ausgesprochen, wie dies (s. o.) in der so viele Jahrzehnte später erschienenen Abhandlung v. Seebachs der Fall, und an Klarheit und Prägnanz läßt v. Fichtels Gegenüberstellung der beiden Möglichkeiten nichts zu wünschen übrig. Auch die weiteren Erklärungen sind durchaus korrekt zu nennen. Die ersterwähnte Gattung umfaßt alle die Erhebungen, die eben wirklich „ohne Eruption" nur durch Hebung entstanden sind, und dafür, daß man es nur mit einem einzigen Bildungsakte, nicht mit einer Mehrzahl konsekutiver Prozesse zu tun hat, spricht die kurze Notiz, es gäbe keine „neuen Aufsätze von Laven". Sowie der homogene Vulkan ans Licht getreten, so ist er nachher auch geblieben, und die intrusiven Kräfte haben ihm gegenüber ihre Aktion einstellen müssen. Sehr bemerkenswert erscheint aber, daß der siebenbürgische Geologe auch bereits ein deutliches Bild von jenen anfänglich unsichtbar gebliebenen Vulkanformen gewonnen hat, welche wir als Batho- und Lakkolithen bezeichnen[1]). Denn ausdrücklich fügt er bei, jene Domvulkane stellten sich uns dar „nicht selten mit ihren in der ebenen vorherigen Lage schon aufgehabten unvulkanischen Überdecken". Diese Worte aus

[1]) Zwischen beiden Formen besteht bekanntlich, wie zumal E. Sueß' Analyse dartat (a. a. O., S. 197), keinerlei tiefer greifender Unterschied; derselbe ist vielmehr rein morphographisch, indem sich die Anwesenheit von Lakkolithen im Gelände nur durch eigentümlich gestaltete Hügel verrät, die eben durch Aufbiegung der oberen Schichten entstanden sind. Daran, daß solch sozusagen unmotivierte Kuppen in einer ganz anders gearteten Gegend angetroffen wurden, haben ja K. G. Gilbert und Kinahan die Eigenart der Lakkolithen erkannt (s. auch Pilar, Grundzüge der Abyssodynamik, Agram 1881, S. 78 ff.). Es wäre wohl der Mühe wert, in Siebenbürgen, auf welches sich v. Fichtels Studien vorzugsweise bezogen haben, den örtlichen Sachverhalt nachzuprüfen. Jedenfalls sind Batho- und Lakkolithen weit verbreitet (Supan, Grundzüge der physischen Erdkunde, Leipzig 1911, S. 711).

v. Fichtels etwas schwerfälligem Deutsch in die uns geläufige Sprache übertragend, können wir sie doch nur so interpretieren, daß die Intrusionsmassen durch eine sedimentäre Decke dem Auge entzogen blieben, bis nicht etwa durch Denudation die Freilegung des vulkanischen Kernes erfolgte.

Nicht minder sachlich ist auch die Charakteristik der Zusammensetzung eines Schichtvulkanes. Zu dieser Gruppe echter, diesen Namen verdienender Feuerberge übergehend, sagt unser Autor (a. a. O.): „Die durch Eruptionen entstandenen erhielten durch periodische Ausbrüche von Zeit zu Zeit neue Aufsätze und Schichten verschiedener vulkanischer Art. Die Macht des Feuers verminderte sich nach und nach, hier früher, dort später; die Eruptionen, welche, so wie die Berge an Höhe zunahmen, immer mehrere Kraft forderten, hörten auf, und die Schlünde verfielen: hier mit, dort ohne allem[1]) zurückgebliebenen Merkmale." Wenn man sich vergegenwärtigt, daß es sich hier um die Karpathenländer handelt, in deren Bereiche die vulkanischen Regungen nahezu gänzlich verschwunden sind, so kann man auch diese Angaben als völlig berechtigt gelten lassen. Es wird eben angenommen, daß die magmatische Triebkraft ziemlich konstant sei, und daß demnach mit zunehmender Entfernung der Krateröffnung vom Herde der Auftrieb nicht mehr stark genug sich äußern könne, um noch einen Ausbruch zuwege zu bringen. Und so müsse zuletzt der aktive Vulkan in einen erloschenen übergehen.

Als Forscher, die bereits vor ihm ähnliche Vermutungen über die „Hebung" bekanntgegeben hätten, nennt v. Fichtel nur zwei, Pallas[2]) und v. Keßler[3]), ohne sich aber näher

[1]) Man beachte den — auch heutigen Tages noch fortwirkenden — Austriazismus.

[2]) P. S. Pallas, Observations sur la formation des montagnes et les changemens arrivés au globe, St. Petersburg 1777; deutsche Auszüge in den „Leipziger Sammlungen zur Physik und Naturgeschichte", 1. und 2. Band. Der deutschrussische Forschungsreisende gilt mit Fug als einer der Begründer der Geotektonik, aber den Vulkanen gegenüber mangelte ihm die aus der unmittelbaren Beobachtung hervorgehende Sachkenntnis,

auf deren Begründungsweise einzulassen. Als Gegner erscheinen ihm drei damals sehr im Vordergrunde der vulkanologischen Arbeit stehende Geologen, nämlich die beiden Hamilton[4]) und v. Veltheim[5]). „Auf den Gedanken," heißt es, „die Entstehung des Basalts und desselben Kristallisation im Inneren der Berge zu suchen, verfielen beide Herren Hamiltone, die aufgeklärtesten Lehrer von Vulkanen zu allererst; dann aber ergrif diese Idee auch Herr Berghauptmann v. Veltheim, führte dieselbe weiter aus, und baute ein System darauf. . . . Ich weiß nicht, war diesen drey würdigen Gelehrten die Hebung der Berge überhaupt nicht anständig, oder paßte sie nur in ihren basaltischen Gegenstand, auf welchen sie sich allein beschränkten, nicht hinein, oder was sonst die Ursach gewesen sein mag, daß keiner davon, so viel ich mich aus der Lektur ihrer Schriften erinnere, eine Erwähnung machte; ja letzterer verfiel, statt Emporsteigungen der Gebirge anzunehmen, vielmehr darauf, die tiefen Feuerkammern durch Revolutionen von ihren Überlasten entblößen zu lassen." Es wird wohl richtig sein, daß für jene, denen die Feststellung einer vulkanischen Herkunft des Basaltes mehr als alles andere am Herzen lag[6]),

---

und so ward er nach dieser Seite hin einer der Vorläufer der engherzigen Erdbrandtheorie von Werner (vgl. auch v. Zittel, a. a. O., S. 79 ff.).

[3]) C. F. Keßler von Sprengseisen, Untersuchung über die Entstehung der jetzigen Oberfläche unserer Erde, Leipzig 1787. Ein so gut wie ganz verschollenes Buch, das aber doch so gut wie manches andere die Beachtung des Historikers der Erdkunde verlangen könnte.

[4]) Der Irländer William Hamilton und der Schotte Sir William Hamilton waren unstreitig auf vulkanologischem Gebiete während der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts die ersten Autoritäten Großbritanniens. Vom Erstgenannten kommt hier zumeist in Betracht die nachstehende Schrift: Letters concerning the northern coast of the county Antrim, Dublin-London 1790, S. 111 ff.

[5]) A. F. Graf v. Veltheim, Etwas über die Bildung des Basalts und die vormalige Beschaffenheit der Gebirge in Deutschland, Braunschweig 1789. Sein Verdienst war es, zwischen vulkanischen und Schichtgebirgen eine Scheidelinie gezogen zu haben (v. Zittel, a. a. O., S. 56).

[6]) Vgl. zu dieser beherrschenden Streitfrage die ihre einzelnen

die allgemeineren Probleme, auf welche v. Fichtel ganz besonders achten zu müssen glaubte, einigermaßen in den Hintergrund treten. Und zu leugnen ist ja nicht, daß jener in seiner Hebungslehre wieder viel zu weit ging und alle Schichtenstörungen, die wir jetzt irgendwie tektonisch aufzufassen gewohnt sind, auf die Wirkung radial von unten nach oben gerichteter Kräfte zurückführen zu sollen vermeinte. Wer mithin begründete Zweifel hegte, ob denn auch wirklich die meisten unvulkanischen Gebirge durch „Hebung" das geworden seien, als was wir sie gegenwärtig erkennen, der durfte wohl auch gegen die neue Annahme vom Aufsteigen magmatischer Berge einen gewissen Skeptizismus empfinden. Man kann sich dem Gefühle nicht entziehen, daß v. Fichtel zu viel beweisen wollte und in diesem Bestreben auch seine guten Gründe, die aber doch eben nur auf einen verhältnismäßig kleinen Ausschnitt der Erdgebirge sich bezogen, ihrer durchschlagenden Kraft beraubte. Gerade er, der mehr als andere sich einen Einblick in das Wesen und die proteusartigen Eigenschaften der vulkanischen Kraft verschafft hatte, durfte nicht in den Fehler verfallen, deren Geltungsbereich allzuweit auszudehnen.

Um so weniger, da er bei anderer Gelegenheit recht wohl mit den Grenzen dieser Kraftleistungen vertraut erscheint. „Ich leugne ja nicht", sagt er einmal[1]), „die Existenz, sondern nur die wesentliche Notwendigkeit der Krater; und ich fand ja selbst in alten vulkanischen Ketten mehrere noch kennbare Krater." Besser könnte diese treffende Wahrheit, daß alle Versuche, die Naturverschiedenheiten auf einem so abwechselungsreichen Arbeitsfelde in eine Schablone pressen zu wollen, vergeblich bleiben müssen, kaum ausgedrückt werden. So fügen sich auch die Bemerkungen über parasitäre Intrusion ganz in den Rahmen, der für die Vulkanberge im engeren Sinne als berechtigt erkannt worden war. An dem ausgebrannten Vul-

---

Etappen verfolgende Schrift von Gassenmeyer (Die Lehre von der Basaltbildung in ihren geologischen und geographischen Konsequenzen bis auf A. G. Werner und seine Schule, Nürnberg 1908).

[1]) v. Fichtel, a. a. O., S. 433.

kane Büdöschhegy, dem auch eine selbständige monographische Bearbeitung[1]) zuteil ward, fand v. Fichtel kleine seitliche „Hügel" unter angenähert gleichem Horizonte, und diese identifiziert er mit normalen, vulkanischen Bildungen[2]), „an welchen das Feuer durchzubrechen versuchte, auch wirklich durchbrach, aber zu ohnmächtig war, auszuschleudern, sich also begnügen mußte, auf der Oberfläche kleine konische Hügel erhoben zu haben". Genau ebenso konnte diese Aktion auch in größerem Maßstabe sich vollziehen.

Auf die schon zu seiner Zeit ziemlich stattlich angewachsene Fachliteratur nimmt unser Autor, der ja eben stolz darauf war, sich nur auf Selbstgesehenes zu stützen, nicht viel Rücksicht, und zwar scheinen ihm sowohl die Gegner seiner Lehre wie auch diejenigen, welche zuvor schon mit ähnlichen Erklärungen hervorgetreten waren, ganz fremd geblieben zu sein. Zu den ersteren gehört in erster Reihe der Neapolitaner De la Torre, der[3]) sich in den sonderbaren Gedankengang verrannt hatte, der Vesuv sei ein Berg wie jeder andere, der erst nach seiner Entstehung von dem in seinen Eingeweiden glühenden Feuer verzehrt und eben in einen feuerspeienden Berg verwandelt worden sei[4]). Ungleich zahlreicher war die Menge

---

[1]) v. Fichtel, Nachrichten von einem in Ungarn neu entdeckten, ausgebrannten Vulkan, Schriften der Gesellschaft naturforschender Freunde in Berlin, 2. Band, 1793. Auch a. a. O., a. v. St.

[2]) v. Fichtel, a. a. O., S. 427.

[3]) De la Torre, Histoire et Phénomènes du Vesuve, Neapel 1771.

[4]) Gegen De la Torre wendet sich mit Entschiedenheit Giveni, von dessen wenig bekanntem, aber für den Mineralogen und Petrographen noch immer lesenswerten Essay der jüngere, oben genannte v. Fichtel eine deutsche Ausgabe veranstaltet hat (Versuch einer Lithologie des Vesuvs, aus dem Italienischen übersetzt von Leopold v. Fichtel, Wien 1793). Die in allen Einzelheiten auf vulkanische Eruption hindeutenden Eigenschaften aller einzelnen Teile des Berges wird betont (a. a. O., S. 35): „Unter allen Schichtungen von Somma und Ottajano findet sich keine, die eine ruhig vollbrachte Bildung, wie die von steinigten Bänken der alten Berge war, anzeigte; wohl aber deutet alles dieses bis zur Gewißheit auf eine verwirrte Anhäuffung, Verschlackung, Schmelzung oder Wiederschmelzung".

Derer, welche man geradezu als Hebungsfanatiker hinstellen könnte, und die für alle Niveauänderungen, welche sich da und dort auf der Erde ereignen, die magmatische Energie verantwortlich machen wollten. Unter ihnen ragen Vallisnieri[1]) und Moro[2]) hervor, deren Schriften auf einen so überzeugten, wenn auch gewiß nicht verrannten Hebungstheoretiker doch hätten einen großen Eindruck machen müssen. Moro arbeitet überhaupt mit keinem anderen Rüstzeuge, als mit dem Andrange subterraner Glutflüssigkeit. Ebenso, wie Inseln — Santorin — auf diese Weise aus dem Meere emporsteigen[3]), auf dieselbe Weise können Einzelberge — Monte Nuovo — und ganze Gebirgszüge gehoben werden. Die Versteinerungen, welche man auf den höchsten Spitzen noch zahlreich genug findet, liefern den Beweis, daß an eben diesen Stellen dereinst eine Wasserbedeckung sich befinden mußte; den Einwurf, daß ja auch das Wasser sich zurückgezogen haben könne, scheint sich Moro kaum gemacht zu haben, und dann blieb freilich nur die andere Alternative übrig, daß das Magma die Berge in die Höhe gepreßt haben müsse. Damit war zugleich eine Erdbebentheorie gegeben, die an antike Vorbilder anknüpfte, und sogar die bradyseismischen Bewegungen, die säkulären Verschiebungen der Wasserlinie, mußten sich der Systematik einfügen, indem nur der von unten nach oben gerichtete Druck, der sonst einen katastrophalen Charakter trug, diesmal mit der größten Langsamkeit arbeitete. So weit wie Moro, die Sedimentbildungen vollständig zu negieren und sogar ausgedehnte Ebenen ausschließlich aus vulkanischen Auswurfstoffen zu-

[1]) A. Vallisnieri, De' corpi marini, che su' monti si trovano, della loro origine e dello stato del mondo avanti il diluvio, Venedig 1728.

[2]) A. L. Moro, De' crostacei e degli altri marini corpi, que si trovano sui monti, Venedig 1740. Das Buch ist nachmals auch in unsere Sprache übertragen worden (Leipzig 1751) und hat eine nicht unbeträchtliche Einwirkung auf die Geologie des Zeitalters ausgeübt.

[3]) Von diesen neuen Inseln handelt, natürlich unter dem strenge vulkanistischen Gesichtspunkte, eine Schrift von Raspe (Specimen historiae naturalis globi terraquei, praecipue de novis e mari natis insulis, Amsterdam-Leipzig 1763).

sammengesetzt sein zu lassen, ist kein späterer Geologe gegangen, am wenigsten v. Fichtel, der ja eben auf die falsche Vorstellung, jede erdgeschichtliche Doktrin müsse ein „einheitliches“ Gepräge tragen, mit voller Bestimmtheit verzichtet und die Fähigkeit der Natur, nicht immer bloß nach einem festen Schema ihre Gebilde zu schaffen, klar erfaßt hatte. Immerhin aber hätte er in manchen Punkten bei seinem italienischen Vorgänger Anklänge finden können.

Was jedoch bei all diesen früheren Hypothesengebäuden, ganz abgesehen von ihrer prinzipiellen Verfehltheit, gerade für die Erkenntnis vulkanischer Tatsachen als ein schwerwiegender Mangel bezeichnet werden muß, das ist die unsichere Auffassung des Kraters als eines anscheinend untrüglichen Kennzeichens vulkanischer Tätigkeit. Hier ist eben v. Fichtels Nachweis, daß dieses Kriterium ganz und gar nicht zu existieren brauche, von hohem Werte gewesen, und es ist nur zu bedauern, daß Die, welche nach ihm kamen, von seinen Feststellungen so wenig Akt nahmen. „Durch die Emporsteigung der vulkanischen Gebirge verschwinden endlich auch alle unnützen Zänkereien von Krater und Nichtkrater, dessen Existenz wir nämlich bei gehobenen, ganzen vulkanischen Massen gar nicht zu suchen haben[1].“ Sogar bei Stratovulkanen, die zweifellos ehemals einen Krater besessen haben dürften, lasse sich derselbe in späterer Zeit nicht immer nachweisen; der Begriff einer Vulkanruine tritt uns hier scharf umrissen entgegen. Sogar sehr einsichtige Beobachter, die jedoch an dem Begriffe einer notwendigen Zusammengehörigkeit von Vulkan und Krater festhielten, gerieten in Verlegenheit, wenn es ihnen nicht gelingen wollte, bei einem Gebirge, dessen vulkanischer Ursprung ihnen zur Gewißheit geworden war, die Austrittstelle der Lava ganz genau aufzeigen zu können, als ob nicht eben diese Öffnung sich durch den Austritt der zähflüssigen und später erkalteten Massen auf einem ganz natürlichem Wege wieder verstopft haben könnte. Ein lehrreiches Beispiel dieser

---

[1]) v. Fichtel, a. a. O., S. 431 ff.

Art ergibt uns die Untersuchung v. Dietrichs[1]) über den badischen Kaiserstuhl. Dieser ist ein Agglomerat typischer Quellkuppen, aber v. Dietrich, der die etwas später herausgekommene Schrift v. Fichtels nicht kannte, verlegte in die höchste Erhebung der Gruppe das Eruptionszentrum[2]), neben dem allerdings auch noch parasitäre Krater in größerer Anzahl in Aktion getreten seien.

Der heftigste Gegner v. Fichtels mußte naturgemäß der berühmte „Oryktognost“ Werner sein, für den ja der Vulkanismus überhaupt nur als eine ganz nebensächliche Erscheinung in Betracht kam. Eine unmittelbare Polemik zwischen beiden Männern scheint indessen nur bei einer einzigen Veranlassung stattgehabt zu haben. Werner glaubte am Scheibenberger Hügel im Erzgebirge eine Wahrnehmung gemacht zu haben[3]), welche die unvulkanische Beschaffenheit des Basalts außer Zweifel setze, insoferne nämlich dortselbst diese Gesteinsart auf Ton und Sand aufgesetzt sei. Die Tatsache erkennt v. Fichtel, dem hier die Autopsie abging, unbedingt an, aber ganz treffend wendet er ein[4]), daß Ton sehr

[1]) Die ganz eigenartige Stellung dieses Elsässers in der Geschichte der wissenschaftlichen Meinungskämpfe einer aufgeregten Zeit behandelt ausführlich E. Kugler (Philipp Friedrich v. Dietrich, Ein Beitrag zur Geschichte der Vulkanologie, München 1899). Letzterer zählt ebenso, wie v. Ferber, zu Denen, die moderne Anschauungen vorwegnehmen, ohne doch gegen die herrschenden Ideen durchdringen zu können.

[2]) v. Dietrich, Description des volcans, découverts en 1774, dans le Brisgaw, Mém. de l'Acad. Franç., 10. Band, 1785, S. 402 ff.; vgl Kugler, a. a. O., S. 23. In letzterer Spezialschrift wird auch dargelegt, daß die „Entdeckung“, deren v. Dietrich gedenkt, auch einige andere Veröffentlichungen auslöste, so von dem berühmten, im ganzen mehr neptunistischen Grundsätzen zuneigenden H. B. De Saussure (Observations sur les collines volcaniques du Brisgaw, Journal de Physique, 44. Band, S. 325 ff.) und späterhin von dem ganz in den Bahnen Werners wandelnden v. Ittner (Abhandlung über die Naturgeschichte des Kaiserstuhls und der Rheininseln, Eleutheria, 3. Band, S. 1 ff.).

[3]) A. G. Werner, Bekanntmachung einer am Scheibenberger Hügel gemachten Entdeckung, Bergmännisches Journal, 2. Band, 1789.

[4]) v. Fichtel, a. a. O., S. 463 ff.

wohl aus einer von Hause aus vulkanischen Felsart durch Verwitterung und Zersetzung hervorgegangen sein könne. Aus der ihm wohl vertrauten vulkanischen Gebirgskette zwischen Eperies und Tokay führt er Gegenbeweise an. Man mag es bedauern, daß die beiden bedeutenden Männer, die Bannerträger der neptunistischen und plutonistischen Erdbildungslehre, sich nicht gründlicher über die zwischen ihren Richtungen obschwebenden Streitfragen haben vernehmen lassen; eine solche Aussprache würde für die Sache selbst von wesentlichem Nutzen gewesen sein.

Nachdem wir uns so mit der konsequenten und durch Beobachtung wie Reflexion gleichmäßig unterstützten Charakteristik bekannt gemacht haben, welche der deutsch-ungarische Naturforscher von der Verschiedenartigkeit der vulkanischen Erhebungsformen gegeben hat, liegt für uns die Frage nahe, wie es kommen konnte, daß ein so bedeutsamer Fortschritt nicht weiter nachwirkte, daß für lange Dezennien von dem Gegensatze zwischen homogenen und geschichteten Vulkanen so gut wie gar keine Rede mehr war. Wollte man sagen, v. Fichtels Werk habe nicht das Glück gehabt, sich einen größeren Leserkreis zu erwerben, so wäre doch nur ein rein äußerliches Moment berührt; mehr macht schon aus, daß dieses Werk fast bloß für den Mineralogen geschrieben ist, und daß die theoretischen Bestandteile leicht genug neben den vielen „lithologischen“ Detailbeschreibungen, die gleichfalls auch für den Fachmann der Gegenwart nicht wertlos sind, verschwinden konnten. Das alles trifft gewiß zu, allein weitaus einflußreicher ist doch eine andere Ursache: Leopold v. Buchs überragender Einfluß hat es bewirkt, daß die nächste Generation nur noch in der Gedankensphäre des ebenso genialen wie selbstherrlichen Mannes lebte und für die Schöpfungen der Vergangenheit nichts mehr übrig hatte. Und in der Hauptsache stimmten ja v. Fichtel und v. Buch ohnehin überein, nämlich in der Bereitwilligkeit, Probleme der Gebirgsbildungslehre durch Zuhilfenahme gewaltiger Hebungsvorgänge zu lösen.

Daß die neue Erhebungstheorie, welche lange das Feld behaupten sollte, von derjenigen des XVIII. Jahrhunderts vielfach abwich, wurde vielleicht erst allmählich eingesehen, da ja auch v. Buchs Ansichten nicht augenblicklich zur vollen Reife gediehen waren. Fürs erste schien ihm eine Zweiteilung der Vulkane besonders wichtig, die mit derjenigen v. Fichtels nichts gemein hat, und die in der schroffen Form, in der sie auftrat, sich auch nicht für die Dauer durchzusetzen vermochte, wiewohl der vielfach laut gewordene Widerspruch gegen die Annahme, daß aus der gleichen Spalte Feuerberge in größerer Anzahl aufsteigen können, auch wieder zu weit ging. Die maßgebenden Worte lauten[1]): „Es theilen sich nämlich alle Vulkane der Erdoberfläche in zwei, wesentlich voneinander verschiedene Klaßen: in Zentral- und Reihenvulkane. Jene bilden allemal den Mittelpunkt einer großen Menge um sie her fast gleichmäßig nach allen Seiten hin wirkender Ausbrüche. Diese, die Reihenvulkane, liegen in einer Reihe hintereinander, oft nur wenig voneinander entfernt, wie Eßen auf einer großen Spalte, was sie denn auch wohl sein mögen". An diese grundlegende Arbeit schloß sich dann diejenige an, welche die für längere Zeit diesen Zweig der Wissenschaft von der Erde beherrschende Theorie der Erhebungskrater begründete[2]). Dieselbe beruhte auf einer Verallgemeinerung des Kraterbegriffes, die wir heute für unzulässig halten müssen, indem wir als Krater eben nicht bloß einen zentralen Hohlraum gelten lassen können, sondern als notwendige Bedingung die stellen, daß von der Höhlung aus ein Rohr zu der Aufbereitungsstätte des intrakrustalen Magmas hinabführe. Aus v. Buchs umfassender Betrachtung der Canarischen Inseln leitete er die Auffassung her, daß im allgemeinen den Vulkanbildungen eine blasenförmige Aufwölbung der obersten Schichten der Erdrinde vorangehe; da, wo der Widerstand am schwächsten, platze die Decke,

[1]) v. Buch, Über die Zusammensetzung der basaltischen Inseln und über Erhebungskrater, Berlin 1818; Gesammelte Schriften, 3. Band, S. 3 ff.

[2]) v. Buch, Über Erhebungskrater und Vulkane, Ann. d. Phys. und Chem., 37. Band, S. 169 ff.; Gesammelte Schriften, 4. Band, S. 292 ff.

und so entstehe jene Einsenkung, deren Namen wir soeben erfahren haben. Man sieht, daß die Calderas der Canarien (Caldeiras der Azoren) bei dieser ganzen Schlußfolgerung recht eigentlich Pate gestanden haben, und wenn man diese „Kessel", so die wörtliche deutsche Übersetzung, neuerdings auf Sprengwirkung zurückführt und mit unseren Maaren in die gleiche morphologische Entwicklungsreihe stellt, so hat man schon dadurch in das Prinzip v. Buchs eine tiefe Bresche gelegt. Ein auffallender Mangel seiner Systematik zeigte sich aber vorzugsweise darin, daß er die doch so ungemein häufigen Aufschüttungskegel als eine beinahe nebensächliche Erscheinung ansah und annahm, daß diese Kegel gemeiniglich erst dann aufgebaut würden, wenn für sie im Erhebungskrater ein Platz geschaffen sei, ja daß Lavaströme überhaupt keinen Vulkan zustande bringen könnten. Diese Einseitigkeit machte Prévost[1]) zuerst zum Angriffsobjekte, und seinen noch schüchtern vorgebrachten Bedenken folgten in wuchtigerer Form diejenigen von Dana[2]) und Junghuhn[3]). Doch konnte das Ansehen ihres Begründers dessen Schöpfung noch bis zu seinem Tode (1853) eine gewisse Geltung bewahren, und erst nach und nach begann man über die als zur Erklärung der vulkanischen Rätsel im besten Falle unzureichende Hypothese zur Tagesordnung überzugehen.

Und bald darauf trat, wie wir uns überzeugten, jene zwar in Wirklichkeit nicht neue, aber doch allseitig für neu ge-

[1]) L. C. Prévost, Sur l'île Julia, Mém. de la Soc. Géol. de France, (1.) 2. Band, S. 91 ff. Die „Insel Julia" ist identisch mit der bekannten Ferdinandea.

[2]) J. D. Dana, Report on Geology, New York 1849, S. 369 ff. (United States Exploring Expedition). Hier waren es die majestätischen Vulkane von Hawaii, die eine Korrektur der Anschauungen v. Buchs veranlaßten.

[3]) F. Junghuhn, Java, seine Gestalt, Pflanzendecke und innere Bauart, deutsch von Haßkarl, 2. Band, Leipzig 1853, S. 606 ff. Wie weit der Erforscher des malayischen Vulkanismus von der Buchschen Schablone abwich, geht u. a. daraus hervor, daß er durch ein primitives Experiment an einem durchbohrten Baumstamm „ein Miniaturbild von der Entstehungs- und Wirkungsart der großen vulkanischen Kegelberge" schuf (a. a. O., 2. Band, S. 58).

haltene Präzisierung des Vulkanbegriffes an das Licht, welche mit dem Namen v. Seebachs verknüpft ist. Sie hat den einschlägigen Studien hohen Nutzen gebracht und, wenn man so will, eine durchsichtige Morphologie der Vulkangebilde erst ermöglicht. Um so mehr hat man ein Recht, es zu beklagen, daß die der Sache nach völlig übereinstimmende Dichotomie der Vulkane, der wir bei v. Fichtel begegneten, spurlos verschwand und, soweit wenigstens die bisher vorgenommene Nachforschung ergab, nicht im mindesten die Arbeit der Folgezeit befruchtete. Zum großen Teile ist dies der Tatsache zur Last zu legen, daß in dem Werke, welches so gesunde Gedanken enthielt, seinem Titel nach niemand etwas Ähnliches suchen konnte. Und auch die aphoristische Art und Weise, wie ganz gelegentlich, an verschiedenen Stellen, diese Gedanken zum Ausdruck gelangten, mußte das ihrige tun, um eine weitere Verbreitung zu verhindern. Das alles kann natürlich die Jetztzeit nicht verhindern, zu erklären, daß die Ausgestaltung der Vulkanologie ein lebhafteres Tempo eingeschlagen hätte, wäre weiteren Kreisen bekannt geworden, daß bei v. Fichtel die Hauptwahrheiten dieses Zweiges der physikalischen Geographie im wesentlichen so zu finden waren[1], wie sie zu Beginn des XX. Jahrhunderts den eisernen Bestand der Wissenschaft ausmachen.

[1] Auch gegen die damals noch recht beliebte Irrlehre vom Zentralfeuer, aus dem alle feuerspeienden Berge gespeist würden, muß sich derselbe ablehnend verhalten haben, wenn er auch der Sache nicht näher tritt. Seine Behandlung der Frage (s. o.), wie ein früher aktiver Vulkan in den Ruhestand versetzt werden kann, läßt keinen Zweifel darüber, daß er sich mit der Voraussetzung beschied, es seien in der Erdkruste vereinzelte magmatische Herde verteilt, mit deren Erschöpfung der zugehörige Vulkan seine Tätigkeit einzustellen gezwungen sei; ganz so, wie dies auch sein Zeitgenosse v. Dietrich mit voller Bestimmtheit getan hatte (Kugler, a. a. O., S. 83). Daß trotzdem auch jetzt noch der Irrtum unausrottbar ist, erst Stübel habe die vulkanischen Herde grundsätzlich in die „Erdpanzerung“ verlegt, gehört zu jenen unerfreulichen Wahrnehmungen, mit denen die Historie des Vulkanismus auf Schritt und Tritt zu rechnen hat.

Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung.

Ein Beitrag zur Theorie der oberen Inversion.

Von **R. Emden.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Inhaltsübersicht: Einleitung. § 1. Die effektive Erdtemperatur und die Absorption diffuser Strahlung. § 2. Strahlungsgleichgewicht bei grauer Strahlung. § 3. Die Untersuchungen von W. J. Humphreys und E. Gold. § 4. Die Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. § 5. Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre und die Temperatur der oberen Inversion. § 6. Die Strahlung der Atmosphäre.

Einleitung.

In einer ruhenden Gasmasse sind bekanntlich unendlich viele Anordnungen von Dichte, Druck und Temperatur möglich, die den Bedingungen mechanischen Gleichgewichtes genügen. Handelt es sich jedoch um eine Gasmasse, deren Elemente nach den Gesetzen der Temperaturstrahlung leuchten und absorbieren, während Wärmeaustausch durch Konvektion ausgeschlossen, durch Leitung hinreichend klein sein soll, so wird ein Gleichgewichtszustand ausgesondert, den wir als Strahlungsgleichgewicht bezeichnen werden, und der dadurch ausgezeichnet ist, daß ein jedes Teilchen denselben Betrag an Energie ausstrahlt, den es durch Zustrahlung der übrigen Teilchen und etwa vorhandener äußerer Strahlungsquellen gewinnt. Oder anders ausgedrückt: Strahlungsgleichgewicht ist vorhanden, wenn durch Strahlung und Absorption die Temperaturen der Teilchen, und deshalb auch die Massenanordnung, nicht geändert werden. Grundbedingung ist stets Gleichheit der Mengen abgegebener und gewonnener Strahlung,

unabhängig von ihrer Zusammensetzung nach Wellenlängen, Polarisationszustand und Strahlungsrichtung.

Auf diesen Gleichgewichtszustand hat zuerst K. Schwarzschild[1]) aufmerksam gemacht; eine neuere Arbeit von E. Gold[2]) geht von ähnlichen Gesichtspunkten aus. Über diese Arbeiten wird unter § 2 resp. § 3 zu sprechen sein.

Wir behandeln im folgenden das Strahlungsgleichgewicht einer Atmosphäre, d. i. einer Gasmasse, die entweder die äußeren Partien einer Gaskugel bildet, oder auf einer starren Kugel aufliegt. Die Niveauflächen sind dann Kugelflächen; ihre Radien seien so groß, daß wir mit genügender Genauigkeit von der Krümmung absehen und ein ebenes Problem behandeln können. Druck, Dichte und Temperatur ändern sich dann nur in Richtung einer Achse, der Vertikalen. Jede horizontale Schicht strahlt gemäß ihrer Temperatur ebensoviel Energie aus, als sie durch Zustrahlung der übrigen Schichten und äußerer Strahlungsquellen gewinnt.

Es liegt die Versuchung nahe, anzunehmen, daß bei diesem Gleichgewichtszustand die beiden Energieströme, welche eine horizontale Schicht abwärts und aufwärts durchsetzen, sich gleich sein müssen. Tatsächlich benützt auch E. Gold (loc. cit.) diese Gleichheit neben dem erstgegebenen Kriterium zur Bestimmung des Strahlungsgleichgewichts. Allein wie in einer Metallplatte bei linearem Temperaturgefälle ein Wärmetransport durch Leitung stattfinden kann, ohne daß die Temperaturen sich ändern, ist bei geeigneter Temperaturverteilung auch Energietransport durch Strahlung bei Konstanz der Temperaturen möglich. Kennzeichen des Strahlungsgleichgewichtes soll deshalb lediglich die Tatsache sein, daß durch Strahlung und Absorption kein Gasteilchen seine Temperatur ändert.

---

[1]) K. Schwarzschild, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1906, Heft 1.

[2]) E. Gold, The Isothermal Layer of the Atmosphere and Atmospheric Radiation. Proceedings of the Royal Society of London, series A, vol. 82, p. 43, 1909.

Die nachfolgenden Untersuchungen werden sich in erster Linie mit dem Strahlungsgleichgewicht der Erdatmosphäre beschäftigen; sie bezwecken einen Beitrag zur Klärung der Frage: Sind die Temperaturen der oberen Inversionsschicht in erster Linie durch Strahlungsvorgänge erklärbar[1]? Die Antwort wird in bejahendem Sinne ausfallen. Dieser Umstand möge eine etwas breitere Darstellung, die manchem ein Weiterarbeiten auf diesem Gebiete erleichtern wird, rechtfertigen.

§ 1. Die effektive Erdtemperatur und die Absorption diffuser Strahlung.

I. Als Quelle aller Arbeits- und Lebensprozesse auf der Erde wird schlechthin die Sonne angenommen, da sie uns ungeheuere Arbeitsmengen in Form von Strahlung zukommen läßt. Allein diese Vorstellungsweise führt leicht irre und verleitet zur Aufstellung unrichtiger Wärmebilanzen. Denn diese Energiemengen werden, da sich die Verhältnisse auf der Erdoberfläche seit historischen Zeiten nicht wesentlich geändert haben, bis auf verschwindend kleine Beträge, die durch den Vermoderungsprozeß der Organismen bedingt sein können, durch Ausstrahlung wieder abgegeben, also in derselben Energieform, in der sie bezogen wurden. Die Möglichkeit irdischen Lebens beruht deshalb nicht sowohl in einer Einnahme von Energie, sondern in der gewaltigen Entropievermehrung, die mit der Umwandlung der heißen Sonnenstrahlung in die kältere Erdstrahlung verbunden ist. Bewegung und Leben auf der Erde wird nicht sowohl dadurch ermöglicht, daß wir in der Sonne einen genügend großen Energiespeicher zur Verfügung haben, denn was wir beziehen, geben wir beinahe restlos und in derselben Form wieder ab, sondern ist gewährleistet durch den gewaltigen Entropiespeicher, den das Strahlungssystem Sonne—Erde—Weltenraum darstellt.

Die Solarkonstante σ, d. i. die Energiemenge, welche

[1]) Vgl. J. Schmauß, Die obere Inversion. Meteor. Zeitschr., Bd. XLIV, S. 241, 1909.

die von der Sonne ausgehende Strahlung in Erdentfernung befördert, können wir nach den Messungen von Abbot[1]) mit genügender Genauigkeit zu rund 2 Grammkalorien pro Minute und Quadratzentimeter ansetzen. Ein schwarzer Strahler von der Größe der Photosphäre und in Sonnenentfernung würde denselben Energiestrom bei Erhitzung auf 5910° abs. liefern. Diese Temperatur, effektive Sonnentemperatur genannt, ist, wie die Solarkonstante, lediglich ein Maß für die Intensität der Sonnenstrahlung; sie sagt nichts aus über die in der Sonnenmasse verteilten Temperaturen, und es wäre verfehlt, eine Schicht der Sonne, deren Temperatur zu 5910° ermittelt wird, als Strahlungsquelle zu betrachten. Die effektive Sonnentemperatur ist eine Eigenschaft der Strahlen, nicht des emittierenden Körpers, der Sonne.

Als Gegenstück führen wir ein die „effektive Erdtemperatur". Der Energiezufluß von der Solarkonstante 2, den die Erde auf einer Fläche gleich ihrem Querschnitt empfängt, werde gleichmäßig auf ihre Oberfläche verteilt. Die Strahlungsbilanz erfordert dann, daß bei stationärem Zustand jedes Quadratzentimeter Erdoberfläche 0,5 Grammkalorien pro Minute abgibt. Von der zugestrahlten Energiemenge werden aber nach den Überlegungen von Abbot und Fowle[2]) durch die Atmosphäre, die Wolken und die Erdoberfläche durchschnittlich 37 % reflektiert. Dieser Strahlungsbetrag bleibt auf seiner hohen Temperatur und tritt nicht ein in das thermodynamische System, das wir betrachten werden. Sind die Unterlagen der Abbotschen Berechnung auch sehr unsicher, so werden wir doch, da kein besserer Wert vorliegt, die „Energie-Albedo" der Erde zu 0,37 annehmen. Der Teil der Solarkonstanten, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, erniedrigt sich also auf $2 \cdot 0{,}63 = 1{,}26$, so daß bei gleichmäßiger Verteilung dieses Betrages der Sonnenstrahlung und stationärem Zustand jedes

---

[1]) C. G. Abbot, The Sun's Energy Spectrum and Temperature. The Astrophysical Journal, t. XXXIV, p. 197, 1911.

[2]) C. G. Abbot and F. E. Fowle, Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithonian Institution, vol. II, p. 162, 1908.

Quadratzentimeter Erdoberfläche $\frac{1,26}{4} = 0,315$ Grammkalorien pro Minute auszustrahlen hat. Ein schwarzer Strahler liefert diese Menge bei $T = 254^0 = -19^0$ C. Eine schwarze Kugel vom Radius der Erde (die in Betracht kommenden Schichten der Atmosphäre haben vernachlässigbare Dicke) und der absoluten Temperatur 254°, die wir als effektive Erdtemperatur bezeichnen, strahlt ebensoviel aus, als sie nach Abzug der Energie-Albedo in Erdentfernung von der Sonne erhält. Diese Temperatur ist lediglich ein Maß für die Intensität der von der Erde ausgehenden Strahlung und sagt nichts aus über die vorhandenen Temperaturen. Wollte man, wie bereits mehrfach geschehen (vgl. Abbot and Fowle, loc. cit., p. 173; ebenso die in § 3 zu besprechende Arbeit von Humphreys), die in einer Höhe von 4—5 km liegende Luftschicht, die durch eine mittlere Jahrestemperatur von —19° ausgezeichnet ist, als Ausgangsort der Erdstrahlung ansehen, so würde man den Fehler begehen, auf den wir schon bei Besprechung der effektiven Sonnentemperatur aufmerksam machten. Die effektive Erdtemperatur ist eine Eigenschaft der Strahlung und das Resultat des verwickelten Strahlungs- und Absorptionsprozesses, den die vorliegende Untersuchung behandelt.

II. Die ankommenden und ausgesandten Strahlen werden auf ihrem Wege durch die Atmosphäre durch wirkliche Absorption, also thermodynamisch geschwächt. Hätten wir es nur mit einer einzigen Strahlungsrichtung zu tun, so könnten die bekannten, einfachen Absorptionsgesetze Anwendung finden. Allein die Strahlung der Atmosphäre und der Erdoberfläche ist diffus; und auch die Sonnenstrahlung durchsetzt die Atmosphäre nach allen Richtungen, wenn wir sie gleichmäßig von allen Seiten kommend über die Erde ausbreiten. (Soweit es sich nur um die Strahlungssumme unabhängig von ihrer Zusammensetzung nach Wellenlängen handelt, kann dies einfach erreicht werden, indem wir die Erde von einer schwarzen Fläche auf effektiver Erdtemperatur eingeschlossen annehmen.) Wir haben deshalb in erster Linie die Absorptionsverhältnisse

bei diffuser Bestrahlung zu untersuchen; sie bestimmen die Temperaturen bei Strahlungsgleichgewicht. Wir haben ferner das Strahlungsgesetz ebener Luftschichten aufzusuchen. Denn bei durchsichtigen Körpern sind Absorptions- wie Emissionsvermögen keine Materialkonstanten, sondern durch den ganzen Bau des Körpers mitbedingt. Ein Glasprisma besitzt an den End- und Seitenflächen verschiedenes Emissionsvermögen.

Ein genügend kleines Element f der Oberfläche eines schwarzen Strahlers sendet bekanntlich in den Kegelausschnitt, dessen Erzeugende mit der Flächennormalen die Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ bilden, in den Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$ Strahlung aus gleich

1) $$f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, \frac{\text{Grammkal.}}{\text{min.}}$$

und in den ganzen bestrahlten Raum

2) $$f \cdot E_\lambda d\lambda = f \cdot \pi J_\lambda d\lambda \, \frac{\text{Grammkal.}}{\text{min.}}.$$

E_λ bezeichnen wir als Emissionsvermögen für die Wellenlänge λ. Das Gesamtemissionsvermögen E ergibt sich durch Integration über alle Wellenlängen zu

3) $$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda.$$

J_λ, E_λ und E sind bekannte Funktionen der Temperatur, speziell ist

4) $$E = sT^4; \quad s = 7{,}59.10^{-11} \frac{\text{Grammkal.}}{\text{cm}^2.\,\text{min.}}.$$

Auf einen beliebigen Strahler falle auf eine Stelle der Oberfläche die Strahlung $S_\lambda d\lambda$, von welcher der Bruchteil $\Delta S_\lambda d\lambda$ absorbiert wird. Dann ist sein Absorptionsvermögen a_λ an dieser Stelle definiert durch die Beziehung

5) $$a_\lambda = \frac{\Delta S_\lambda d\lambda}{S_\lambda d\lambda}$$

und nach dem Kirchhoffschen Satze ist sein Strahlungsvermögen

6) $$i_\lambda = a_\lambda J_\lambda,$$

J_λ gemessen bei derselben Temperatur T. Sein Gesamtemissionsvermögen wird

7) $$e = \int_0^\infty a_\lambda J_\lambda \, d\lambda.$$

Einen Strahler, der für alle Wellenlängen das gleiche Absorptionsvermögen a besitzt, nennen wir grau, und für die von ihm ausgehende, graue Strahlung gelten die Beziehungen

8) $$i_\lambda = a J_\lambda$$

9) $$e = a E = a s T^{1}).$$

Das Absorptionsvermögen einer dünnen, ebenen Schicht bei senkrecht einfallender Strahlung, weiterhin mit α_λ bezeichnet, setzen wir mangels besserer experimenteller Grundlagen proportional ihrer Dicke dl, der vorhandenen Dichte ϱ und einer von der Temperatur unabhängigen Materialkonstanten k_λ, dem Absorptionskoeffizienten, also

10) $$\alpha_\lambda = k_\lambda \varrho \, dl = k_\lambda \, dm; \quad [k_\lambda] = \frac{1}{\text{Masse}}.$$

Für die Strahlung, die unter dem $\sphericalangle \vartheta$ einfällt, haben wir

11) $$\alpha_{\lambda,\vartheta} = k_\lambda \varrho \frac{dl}{\cos\vartheta} = k_\lambda \frac{dm}{\cos\vartheta}.$$

---

[1]) In die Literatur ist der um 1% größere Wert $s = 7{,}68 \cdot 10^{-11}$ übergegangen. In seiner grundlegenden Arbeit (Wied. Annal. LXV, S. 746, 1898) gibt Kurlbaum als Resultat seiner Versuche $S_{100} - S_0 = 0{,}01763 \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{sec}} = 0{,}0731 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$ mit dem Beifügen, daß als elektrothermisches Äquivalent 0,240 angesetzt wurde. Allein $\frac{0{,}01763}{0{,}0731}$ ergibt 0,2412, während der jetzt gebräuchliche Wert (vgl. Ebert, Lehrbuch der Physik, S. 487, 1912) 0,239 ist, also 1% kleiner. Mit diesem Umrechnungsfaktor führt der experimentell ermittelte Wert $0{,}0731 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$ zu $s = 7{,}59 \cdot 10^{-11}$. Dieser Wert von s ergibt sich auch aus den von Plank benutzten Werten für das h und k seiner bekannten Formel.

Fällt diese Strahlung im Betrage $S_\lambda \, d\lambda$ auf eine Schicht von der endlichen Dicke L und der Masse $\frac{M}{\mathrm{cm}^2}$, so ergibt sich

12) $$\text{Durchgelassene Strahlung} = S_\lambda \, d\lambda \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}}$$

13) $$\text{Absorbierte Strahlung} = S_\lambda \, d\lambda \left(1 - e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}}\right).$$

Mit Hilfe der Gleichung (12) wird k_λ experimentell ermittelt.

Wir sind nunmehr imstande, das der Gleichung (1) entsprechende Strahlungsgesetz einer ebenen Gasschicht von endlicher Dicke abzuleiten. Die Gasschicht werde zwischen zwei ihr parallele, unendlich große, schwarz strahlende Flächen von derselben Temperatur T eingeschlossen. Der Zwischenraum ist dann erfüllt von schwarzer Strahlung; also muß in jeder Wellenlänge und jeder Richtung die Strahlung in Richtung und Gegenrichtung gleich und die ausgesandte Strahlung gleich der absorbierten Strahlung sein. Die Geometrie der Strahlung ergibt (wir brauchen die Gasschicht nur durch eine schwarze Fläche ersetzt denken), daß ein Flächenstückchen f der Oberfläche der Gasschicht von der gegenüberliegenden schwarzen Fläche in Richtung ϑ Strahlung zugesandt erhält (Gleichung 1):

$$f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta,$$

die nach Gleichung (13) absorbiert wird. Diese absorbierte Menge muß aber in derselben Richtung wieder ausgestrahlt werden. Also ergibt sich das

Strahlungsgesetz einer ebenen, dünnen Gasschicht (oder einer Schicht beliebigenMaterials mit endlichem Absorptionsvermögen):

14) In Richtung ϑ ausgesandte Strahlung

$$= f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \left(1 - e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta,$$

von dem Strahlungsgesetz einer schwarzen Fläche (oder rauhen Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers ($J_\lambda = i_\lambda$)) sehr ver-

schieden[1]). Für $M = \infty$ werden beide Strahlungsgesetze gleich, d. h.: eine genügend mächtige, isotherme Atmosphäre emittiert schwarze Strahlung.

Für eine Gasschicht von geringer Mächtigkeit Δm erhalten wir aus (14) das Strahlungsgesetz

$$15)\quad f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \cdot k_\lambda \Delta m \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta = f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \cdot \alpha_\lambda \sin\vartheta\, d\vartheta$$

und nach den ganzen bestrahlten Raum wird ausgesandt

$$16)\quad f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \cdot \alpha_\lambda .$$

Dies ist zugleich der Bruchteil der ganzen, f von der schwarzen Fläche zugestrahlten Energiemenge $f \cdot \pi J_\lambda d\lambda$, der absorbiert wird.

Wir erhalten demnach in diesem Fall für das Absorptionsvermögen a_λ, wie wir es in Gleichung (5) definiert haben,

$$17)\quad a_\lambda = 2\alpha_\lambda ,$$

d. h. das Absorptionsvermögen einer ebenen, dünnen Gasschicht ist bei schwarzer Bestrahlung in jeder Wellenlänge doppelt so groß wie bei senkrecht einfallender Strahlung.

Ankommende schwarze Strahlung ist, kurz ausgedrückt, nach bestimmtem Gesetze diffus. Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen a_λ und α_λ in anderen Spezialfällen, in welchen die Intensität der ankommenden Strahlung in den Richtungen ϑ anderem Verteilungsgesetze folgt. Von einer Krümmung der Strahlen beim Durchlaufen verschieden dichter Gasmassen werde abgesehen. Wir schicken voraus, daß das auftretende Integral $\beta^n \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$ den Grenzwert 0 erreicht für $\beta = 0$ und für $\beta = \infty$.

---

[1]) Dies Strahlungsgesetz findet sich bereits angegeben bei J. Koenigsberger, Über die Emission von Körpern mit endlichem Absorptionsvermögen. Wied. Ann. XII, S. 342, 1903, sowie in der bereits erwähnten Arbeit von Gold.

Der dünnen Gasschicht stehe im Abstande Z eine schwarze Fläche gegenüber; der Zwischenraum sei mit demselben Gase gefüllt. Der Zylinder vom Querschnitt 1 cm² und der Höhe Z enthalte die Masse M. Auf die Fläche f fällt aus der Richtung ϑ eine von der schwarzen Fläche ausgehende, durch die zwischenliegende Gasmasse geschwächte Strahlung im Betrage $f \cdot 2\pi \cdot J_\lambda d\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}} d\vartheta$, von welcher in der dünnen Schicht der Bruchteil $\frac{\alpha_\lambda}{\cos\vartheta}$ absorbiert wird. Wir erhalten so über alle Richtungen integriert

$$\text{Auffallende Strahlung } S_\lambda d\lambda = f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}} d\vartheta$$

18)
$$= f \cdot \pi J_\lambda d\lambda \left[e^{-\beta}(1-\beta) + \beta \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right].$$

$$\text{Absorbierte Strahlung } \Delta S_\lambda d\lambda = \alpha_\lambda f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}} d\vartheta$$

19)
$$= 2\alpha_\lambda f \cdot \pi J_\lambda d\lambda \left[e^{-\beta} - \beta \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right].$$

$$\beta = k_\lambda M.$$

Das Absorptionsvermögen $a_\lambda = \frac{\Delta S_\lambda d\lambda}{S_\lambda d\lambda}$ ist in diesem Falle Funktion von M.

Um den physikalischen Bedingungen zu genügen, nehmen wir an, daß die zwischenliegende Masse M, durchwegs auf die Temperatur der schwarzen Fläche gebracht, ebenfalls strahle. Im Abstande z von der bestrahlten Schicht nehmen wir eine dünne, strahlende Schicht an; beide sind getrennt durch eine Gasmasse von der Mächtigkeit m. Von dieser Schicht gemäß Gleichung (15) ausgehend fällt auf f in Richtung ϑ Strahlung von der Intensität

$$f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, k_\lambda \, dm \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta,$$

von welcher der Bruchteil $\frac{\alpha_\lambda}{\cos\vartheta}$ absorbiert wird. Wir erhalten so

Auffallende Strahlung $S_\lambda \, d\lambda$

20)
$$= f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, k_\lambda \int_0^M dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta$$
$$= f \cdot \pi J_\lambda \, d\lambda \left[1 - e^{-\beta}(1-\beta) - \beta^2 \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx\right]$$

Absorbierte Strahlung $\Delta S_\lambda \, d\lambda$

21)
$$= f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, \alpha_\lambda k_\lambda \int_0^M dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta$$
$$= f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, \alpha_\lambda \left[1 - e^{-\beta} + \beta \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx\right]$$
$$\beta = k_\lambda M$$

und wieder einen verwickelten Zusammenhang zwischen a_λ und α_λ. Lassen wir aber $M = \infty$ werden, so ergibt sich wieder Gleichung (17) $a_\lambda = 2\alpha_\lambda$; selbstverständlich, da, wie wir oben zeigten, eine genügend mächtige, isotherme Atmosphäre schwarze Strahlung liefert. Grenzen wir anderseits eine beliebige Masse M durch eine schwarze Fläche ab, die ebenfalls bei gleicher Temperatur strahlt, so haben wir (18) zu (20) und (19) zu (21) zu addieren und bekommen wieder schwarze Strahlung. Was die Masse M an Strahlung der schwarzen Fläche absorbiert, gibt sie in derselben Wellenlänge in gleichem Betrage weiter. Eine isotherme Atmosphäre auf gleich temperierter schwarzer Unterlage befindet sich im Strahlungsgleichgewicht. Daraus folgt: Strahlt die Erdoberfläche schwarz, so kann keine aufliegende isotherme Atmosphäre von gleicher Tem-

peratur die in den Weltenraum austretende Strahlung ändern. Wir werden auf diese Verhältnisse bei Besprechung der Versuche Very's zurückzukommen haben.

Um den Bedingungen, die wir weiterhin bei Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes finden werden, näherzukommen, nehmen wir an, daß die Strahlungsintensität proportional der durchstrahlten Masse m zunimmt. In Gleichung (15) setzen wir dementsprechend

$$J_\lambda = J_{0\lambda} + J_{1\lambda} \cdot k_\lambda \cdot m \tag{22}$$

Wir schreiben $k_\lambda m$, um $J_{0\lambda}$ gleich $J_{1\lambda}$ gleich dimensioniert zu erhalten; für das erste Glied rechts gelten die Beziehungen (20) und (21), und für das zweite Glied ergibt sich

Auffallende Strahlung $S_\lambda d\lambda$

$$\begin{aligned} &= f \cdot 2\pi J_{1\lambda} d\lambda \int_0^M k_\lambda m \, dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta \\ &= f \cdot J_{1\lambda} d\lambda \frac{2\pi}{3} \left[1 - e^{-\beta}(1 + \beta - \beta^2) - \beta^3 \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right] \end{aligned} \tag{23}$$

Absorbierte Strahlung $\Delta S_\lambda d\lambda$

$$\begin{aligned} &= f \cdot \alpha_\lambda J_{1\lambda} d\lambda \int_0^M k_\lambda m \, dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta \\ &= f . \alpha_\lambda J_{1\lambda} d\lambda \, \pi \left[1 - e^{-\beta}(1 + \beta) + \beta^2 \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right. \end{aligned} \tag{24}$$

$$\beta = k_\lambda m$$

und aus diesen beiden Beziehungen sowohl für sehr kleine, wie sehr große m

$$a_\lambda = \tfrac{3}{2} \alpha_\lambda .$$

Für das ganze J_λ der Gleichung (22) ergibt sich

25) für kleine m $a_\lambda = 2\alpha_\lambda$

für große m $a_\lambda = \frac{2J_{0\lambda} + J_{1\lambda}}{J_{0\lambda} + \frac{2}{3}J_{1\lambda}}$.

Stets ergibt sich ein a_λ etwas kleiner wie für schwarze Strahlung; für $J_{1\lambda}$ klein gegen $J_{0\lambda}$ kann der Unterschied vernachlässigt werden.

[Dasselbe Resultat ergibt sich für den Ansatz

$$J_\lambda = J_{0\lambda} + \sum_1^n J_{n\lambda} \cdot (k_\lambda m)^n,$$

da wir für große m

$$S_\lambda d\lambda = f\pi J_{0\lambda} d\lambda + f 2\pi \Sigma J_{n\lambda} \frac{n!}{n+2}$$

$$\Delta S_\lambda d\lambda = 2\alpha_\lambda f\pi J_{0\lambda} d\lambda + \alpha_\lambda f 2\pi \Sigma J_{n\lambda} \frac{n!}{n+1}$$

erhalten.]

Würden wir anderseits annehmen, daß die Strahlungsintensität proportional der durchstrahlten Masse abnimmt,

$$J_\lambda = J_{0\lambda} - J_{1\lambda} \cdot k_\lambda m,$$

so würden wir für kleine m wieder $a_\lambda = 2\alpha_\lambda$ erhalten; für große m können wir den Ausdruck für a_λ nicht bilden, da wir selbstverständlich nur bis zu einem m gehen können, das durch die Bedingung $0 = J_{0\lambda} - J_{1\lambda} \cdot k_\lambda m$ begrenzt ist. Doch läßt sich allgemein folgendes aussagen:

Nimmt die Strahlungsintensität in Richtung der durchstrahlten Masse zu, so sind alle a_λ zwischen $2\alpha_\lambda$ (schwarze Strahlung) und α_λ (parallele Strahlung) eingeschlossen; nimmt die Strahlungsintensität in Richtung der durchstrahlten Masse ab, so ist stets $a_\lambda > 2\alpha_\lambda$ (größer wie für schwarze Strahlung). Dies einzusehen schlagen wir um f in die isotherm gedachte Gasmasse eine Halbkugel mit beliebigem Radius und ziehen von f nach allen Richtungen ϑ Strahlungskegel mit kleinen Öffnungswinkeln Ω derart, daß von den auf der Kugelfläche ausgeschnittenen Basisflächen gleichviel Strahlung bei f zur Absorption gelangt. Wir haben so schwarze Strahlung und

$a = 2\alpha_\lambda$. Lassen wir nun die Strahlung aus der Richtung $\vartheta = 0$ zunehmen, so nimmt der Betrag der aus dieser Richtung fallenden Strahlung zu, und das Minus der Strahlung mit größerem ϑ kann der Absorptionen wegen nicht ausgeglichen werden, wenn wir diese Kegel bis auf das Niveau der Tangentialfläche an der Kugel bei $\vartheta = 0$ verlängern. Je stärker die Strahlung in Richtung $\vartheta = 0$ zunimmt, desto mehr nähern wir uns den Verhältnissen paralleler Strahlung mit $a_\lambda = \alpha_\lambda$. Nimmt umgekehrt die Strahlung in Richtung $\vartheta = 0$ ab, so überwiegen die stärker geneigten Strahlen, die mit $\frac{a\lambda}{\cos\vartheta}$ eingehen, und a_λ wird größer wie $2\alpha_\lambda$.

In Gleichung (10) war α_λ definiert als $k_\lambda dm$. Für diffuse Strahlung können wir die entsprechende Beziehung ansetzen, indem wir k_λ im Verhältnis $\frac{a_\lambda}{\alpha_\lambda}$ vergrößern.

Diese Veränderlichkeit von a_λ macht eine strenge, mathematische Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes unmöglich. Denn a_λ ist Funktion der Temperaturverteilung, die eben ermittelt werden soll. Man könnte in schrittweiser Annäherung rechnen. Allein in den Fällen, die von Wichtigkeit sein werden, ergibt sich eine solche Temperaturzunahme, daß in Gleichung (25) $J_{1\lambda}$ ungefähr von gleicher Größe wie $J_{0\lambda}$ wird und wir mit genügender Genauigkeit mit $a_\lambda = 2\alpha_\lambda$, also denselben Verhältnissen wie bei schwarzer Bestrahlung, rechnen können. Eine größere Genauigkeit wird schon dadurch illusorisch, daß die in Betracht kommenden Absorptions-Koeffizienten für Luft nicht mit genügender Genauigkeit bekannt sind. Wir werden deshalb mit einem nur von der Wellenlänge abhängigen a_λ rechnen, das die beobachteten Absorptionsverhältnisse möglichst richtig darstellt und, da dies a_λ als für schwarze Strahlung gültig angenommen wird, zur Bildung des Kirchhoffschen Gesetzes (Gleichung 6 und 7) verwenden.

III. Die beiden die Erdatmosphäre durchsetzenden Strahlungen, die Sonnenstrahlung mit $\lambda_{max} = 0{,}470\,\mu$ und die Erdstrahlung mit λ_{max} ungefähr $= 10\,\mu$, sind in Bezug auf die

Intensität ihrer Komponenten so verschieden zusammengesetzt, daß wir ihre Absorptionsverhältnisse getrennt behandeln müssen. Das Absorptionsvermögen der Atmosphäre für Sonnenstrahlung können wir nur auf wenig genaue Weise abschätzen. Durch Extinktionsbeobachtungen des Sternenlichtes und Messung der Sonnenstrahlung bei verschiedenen Zenithdistanzen können wir wohl die Schwächung der Strahlung für den jeweiligen Zustand der Atmosphäre sehr genau ermitteln; allein wir haben diese streng zu unterscheiden von wirklicher Absorption. Diese Schwächung der direkten Strahlung beruht in erster Linie auf diffuser Reflexion an den Gasmolekeln, dem suspendierten Staube und den Schlieren, die bei Durchmischung auftreten; nur ein kleiner Betrag resultiert aus der Umwandlung der strahlenden Energie in Wärme, die zur Temperaturerhöhung der durchstrahlten Massen verwandt wird. Nur dieser letztere Teil ist wirkliche Absorption, die in das zu behandelnde thermodynamische System eintritt und in dem Kirchhoffschen Gesetze zum Ansatze kommt, während der andere Teil in den 37 %, die zur Berechnung der Albedo dienten, eingeschlossen ist. Eine strenge Trennung der Schwächung in diese beiden Summanden ist zur Zeit nicht möglich. Das Absorptionsvermögen der Hauptbestandteile der Atmosphäre, Sauerstoff und Stickstoff, zeigt sich durch das Auftreten tellurischer Linien; allein die in Betracht kommenden Wellenlängenbereiche sind zu klein, um in Betracht kommende Energiemengen umzusetzen. Über das Absorptionsvermögen von Wasserdampf und Kohlensäure liegen zuverlässige Laboratoriumsversuche vor, eine Anwendung dieser Messungen auf athmosphärische Verhältnisse ist aber nicht mit Sicherheit möglich. Denn das Absorptionsvermögen ist Funktion des Druckes; ein und dieselbe Wasserdampf- oder Kohlensäuremenge absorbiert um so schwächer, je mehr sie durch Abnahme des Druckes in Richtung der sie durchsetzenden Strahlen gestreckt wird. Aus dem Absorptionsvermögen, das im Laboratorium bei Drucken von etwa 1 Atmosphäre ermittelt wurde, kann nicht geschlossen werden auf das Absorptionsvermögen derselben Menge, falls sie in der Atmo-

sphäre unter einem Partialdrucke von wenig mm *Hg*, oder gar Bruchteilen eines Millimeters stehend durchstrahlt wird. Abbot und Fowle (loc. cit., Teil II, Kap. IV, S. 161) kommen durch sorgfältige Überlegungen zum Schlusse, daß aus einem Bündel Sonnenstrahlung vom Querschnitt der Erde beim Durchsetzen der Atmosphäre (es kommen also alle Richtungen mit den Vertikalen in Betracht) bei mittleren Feuchtigkeitsverhältnissen etwa 12 % absorbiert werden. Dieser Wert dürfte eher zu groß sein. Mangels besserer Unterlagen werden wir annehmen, daß von der einfallenden Sonnenstrahlung durchschnittlich 10 % zur Absorption gelangen. Mit weit größerer Sicherheit läßt sich die Absorption der Erdstrahlung abschätzen, da sie hauptsächlich Wellenlängen enthält, die von Wasserdampf besonders kräftig absorbiert werden. Wir schließen uns den Ausführungen Abbot-Fowle's an (loc. cit., Teil II, Kap. IV, S. 172): „Gemäß den Arbeiten von Rubens und Aschkinass, Langley, Keeler und Very und Nichols können wir sicher schließen, daß der zehnte Teil des Wasserdampfes, der durchschnittlich in einer vertikalen Säule der Atmosphäre enthalten ist, hinreicht, um die Hälfte der von der Erdoberfläche nach dem Weltenraum ausgesandten Strahlung zu absorbieren; und es ist höchst wahrscheinlich, daß mit Rücksicht auf die größeren Luftmassen, welche von vielen Strahlen, die von der Erde nach dem Weltenraum ausgesandt werden, schief durchsetzt werden, selbst an einem klaren Tage neun Zehntel der von der festen und flüssigen Erdoberfläche ausgesandten Strahlen durch den Wasserdampf der Atmosphäre absorbiert werden."

[Die Absorptionswirkung der in der Atmosphäre enthaltenen Kohlensäure tritt nach Abbot und Fowle (loc. cit., Teil II, Kap. IV, S. 172) gegenüber der Wirkung des Wasserdampfes vollständig zurück.]

Wir werden also weiterhin die Absorption eines Gemisches von Sauerstoff und Stickstoff als verschwindend klein annehmen, den mit Wasserdampf beladenen Teil der Atmosphäre höchstens 10 % der Sonnenstrahlung und mindestens 90 % der Erdstrahlung absorbieren lassen. Dadurch soll aber lediglich ein Mecha-

nismus geschildert, nicht eine Wärmebilanz aufgestellt werden. In Bezug auf letztere absorbiert die Atmosphäre bei stationärem Zustande überhaupt nichts, denn was absorbiert wird, wird durch Strahlung restlos wieder abgegeben, sowohl von der Atmosphäre als Ganzem, wie von jeder einzelnen Schicht. Wir sind uns auch klar darüber, daß, wenn wir das Gesetz der Absorption in die Form kleiden $S = S_0 e^{-k_\lambda m}$, wir mangels eines besseren Gesetzes von dem Ansatze $dS = -S k_\lambda dm$ ausgegangen sind, also sicherlich nicht richtig die Absorption proportional der Masse, unabhängig von dem Drucke, unter dem sie steht, angesetzt haben.

Das Absorptionsvermögen der Atmosphäre könnte indirekt aus ihrem Strahlungsvermögen bestimmt werden. Mehrfach wurden Versuche unternommen, letztere Größen durch die nächtliche Ausstrahlung einer schwarzen Fläche zu bestimmen; ihre Bedeutung wurde von F. M. Exner[1]) angezweifelt. Allein, wie in § 6 gezeigt werden wird, bestätigen sie vollständig die weiterhin entwickelte Theorie. Durch Laboratoriumsversuche hat Very[2]) das Strahlungsvermögen abgeschlossener Gasmassen zu bestimmen versucht; seine Messungsresultate sind leider in die Literatur übergegangen, obwohl sie, worauf auch E. Gold (loc. cit., S. 53) hinweist, unmöglich richtig sein können. Die Gasmasse ist in einem Rohr durch eine Steinsalzplatte und einen beweglichen, geschwärzten Stempel abgeschlossen, und das Ganze isotherm auf konstanter Temperatur gehalten. Die Strahlung des Stempels und der Gasmasse wird gemessen, der Stempel eine gemessene Strecke zurückgezogen, und nun eine größere Strahlung gemessen, die fälschlich der hinzugekommenen Gasmasse zugeschrieben wird. Denn die hin-

[1]) Felix M. Exner, Über den Wärmeaustausch zwischen Erdoberfläche und der darüber fließenden Luft. Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-phys. Klasse, Bd. CXX, Abh. IIa, Februar 1911.

[2]) Frank Very, Experimentaluntersuchung über atmosphärische Strahlung. Ausführliches Referat: Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXXVI S. 223, 1901.

zugekommene Gasmasse strahlt nicht nur, sondern sie absorbiert auch einen Teil der Strahlung des Stempels und zwar derart, daß nach dem Kirchhoffschen Gesetze gerade Kompensation eintreten muß. (Wie oben S. 65 gezeigt, kann eine isotherme Atmosphäre die Strahlung einer schwarzen Unterlage nicht ändern.) Bei einer fehlerfreien Versuchsanordnung muß die Stellung des Stempels ohne Einfluß auf die ausgesandte Strahlung sein. Daß seine Stellung dennoch von Einfluß ist, rührt daher, daß das Rohr nebst Stempel einen unvollkommenen schwarzen Hohlraumstrahler darstellt, der schwärzer, also besser strahlend wird, je mehr er sich durch Zurückziehen des Stempels einem vollkommenen Strahler, wie er von Lummer und Kurlbaum benutzt wird, nähert.

§ 2. Strahlungsgleichgewicht bei grauer Strahlung.

Eine Atmosphäre strahle grau, d. h. ihr Absorptionsvermögen a und der Absorptionskoeffizient k sind unabhängig von der Wellenlänge λ; die Wärmeabgabe bei grauer Strahlung ist durch Gleichung (9) bestimmt.

Die z-Achse legen wir von oben nach unten, d. i. der Schwerkraft entgegen. Eine Schicht von der Dicke dz sei ausgezeichnet durch die Dichte ϱ, die Temperatur T, den Absorptionskoeffizienten k und das Absorptionsvermögen $a = k\varrho\, dz = k\, dm$, dm die Masse per Querschnittseinheit. Diese Schicht gibt nach jeder Seite $e = aE = k\, dm E \frac{\text{Grammkal.}}{\text{cm}^2\ \text{min}}$ ab. E ist die entsprechende Größe für einen schwarzen Strahler von gleicher Temperatur. In Richtung $+z$ und $-z$ wird die Schicht von Energieströmen B und A durchsetzt, geliefert durch die Strahlung der höher resp. tiefer liegenden Schichten und etwa vorhandener, äußerer Strahlungsquellen. Diese Ströme werden beim Durchsetzen der Schicht um den Bruchteil $a = k\,dm$ durch Absorption geschwächt, und durch die Strahlung der Schicht um den Betrag $aE = k\, dm E$ verstärkt. Berücksichtigen wir, daß B in Richtung z, A in Richtung $-z$ verläuft,

so erhalten wir die beiden Hauptgleichungen, die allen weiteren Betrachtungen zu Grunde liegen:

26) $$\frac{dB}{dm} = -kB + kE$$

27) $$\frac{dA}{dm} = kA - kE.$$

Ist die Temperaturverteilung, also auch Verteilung von E bekannt, so könnte B und A für jede Stelle z der Atmosphäre berechnet werden; denn durch Auflösung der beiden Differentialgleichungen enthalten wir B und A als Funktion der Masse m, die pro cm² zwischen einem Ausgangsniveau und der betrachteten Stelle liegt; und mit Hilfe des Temperaturverteilungsgesetzes kann, auf ähnliche Weise, wie unten gezeigt werden wird, die Abhängigkeit von z ermittelt werden. Ist E resp. T unbekannte Funktion von z resp. m, so ist die Lösung unbestimmt, da die beiden Gleichungen 3 Unbekannte B, A und E verbinden. Jede weitere Bedingungsgleichung macht die Lösung eindeutig. Wir verlangen Strahlungsgleichgewicht. Die gewonnene Wärmemenge $k\,dm\,B + k\,dm\,A$ muß für jede Schicht gleich der nach beiden Seiten abgegebenen Wärmemenge $2k\,dm\,E$ sein. Wir erhalten also die Bedingungsgleichung des Strahlungsgleichgewichtes

28) $$2kE = kB + kA.$$

Ohne diese Bedingung folgt aus (26) und (27)

29) $$\frac{dB}{dm} + \frac{dA}{dm} = -k(B - A).$$

Die Bedingungsgleichung liefert

30) $$\frac{dB}{dm} - \frac{dA}{dm} = 0,$$

so daß sich ergibt

30a) $$B - A = \text{const} = 2\gamma.$$

Wir haben also den Satz: Herrscht bei grauer Strahlung Strahlungsgleichgewicht, so ist die Differenz der Energieströme B und A konstant. Diese Konstante wird im folgenden stets mit 2γ bezeichnet.

Aus (28), (29), (30) folgt

$$\frac{dB}{dm} = -k\gamma; \quad \frac{dA}{dm} = -k\gamma$$

und die Lösung des Problems

$$(31) \qquad \begin{cases} B = -k\gamma m + B_0 \\ A = -k\gamma m + A_0 \\ E = -k\gamma m + E_0. \end{cases}$$

B_0 und A_0 sind dem jeweiligen Spezialfalle anzupassende Integrationskonstanten. Stets ist

$$(32) \qquad \gamma = \frac{B_0 - A_0}{2}; \qquad E_0 = \frac{B_0 + A_0}{2}.$$

Ansatz und Lösung dieses Strahlungsproblems sind von K. Schwarzschild (loc. cit.) gegeben.

Da $E = sT^4$ folgt: Bei Strahlungsgleichgewicht grauer Strahlung nimmt die Temperatur mit der Tiefe ab, zu oder ist konstant, je nachdem $\gamma > 0$, < 0, $= 0$.

Wir sehen von einer Veränderlichkeit des Wertes g der Schwerkraft ab und können 31 schreiben, da der Druck $p = gm$ ist,

$$(33) \qquad E = sT^4 = -\frac{k\gamma}{g}p + sT_0^4,$$

worin T_0 durch die Temperatur an der Grenze der Atmosphäre $(m = 0,\ p = 0)$ bestimmt ist.

Wir untersuchen mit Schwarzschild die mechanische Stabilität bei Strahlungsgleichgewicht. Für jedes mechanische Gleichgewicht muß die Bedingung $dp = g\varrho\, dz$ erfüllt sein, die wir mit Hilfe der Zustandsgleichung der Gase $\frac{p}{\varrho} = gRT$

schreiben können $\frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT}$. Verbinden wir damit die Beziehung, die sich ergibt, wenn wir (33) logarithmisch differenzieren, so erhalten wir den Zusammenhang zwischen T und z in der Form

$$\frac{dz}{R} = \frac{4\,T^4\,dT}{T^4 - T_0^4}. \tag{34}$$

Damit stabiles Gleichgewicht vorhanden ist, darf der Temperaturgradient $\frac{dT}{dz}$ nicht größer sein als der Temperaturgradient $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{1}{R}$, der für indifferentes Gleichgewicht gilt[1]). Bedingungsgleichung für Stabilität ist deshalb

$$1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^4 < 4\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}. \tag{35}$$

Der Ausdruck rechts hat für 1 atomige ($\varkappa = \frac{5}{3}$), 2 atomige ($\varkappa = \frac{7}{5}$), 3 atomige ($\varkappa = \frac{4}{3}$), noch mehr atomige Gase ($\varkappa < \frac{4}{3}$) die Werte $\frac{8}{5}$, $\frac{8}{7}$, $1, < 1$. Wir schließen: Nimmt die Temperatur mit der Tiefe zu, so ist für 1, 2 und 3 atomige Gase stets Stabilität vorhanden. (Bei Temperaturabnahme nach unten ist selbstverständlich stets Stabilität vorhanden.)

Gleichung (34) läßt sich integrieren und wir erhalten, wenn wir noch die Höhe h, $dh = -dz$ einführen:

$$\text{const} + \frac{z}{R} = \text{const} - \frac{h}{R} = \tag{36}$$

$$= T_0\left[4\,\frac{T}{T_0} + \log\frac{T - T_0}{T + T_0} - 2\,\text{arctg}\,\frac{T}{T_0}\right]; \quad T > T_0, \quad \gamma < 0$$

$$= T_0\left[4\,\frac{T}{T_0} - \log\frac{T_0 + T}{T_0 - T} - 2\,\text{arctg}\,\frac{T}{T_0}\right]; \quad T < T_0, \quad \gamma > 0.$$

Schwarzschild hat die Gleichungen (31) angewandt auf die Sonne. An ihrer Oberfläche ist die Einstrahlung, also auch B_0, $= 0$;

---

[1]) R. Emden, Gaskugeln (Kap. XVII, §§ 10, 11, 12 und Kap. XIX, § 5), 1907.

A_0 ist bestimmt durch die Solarkonstante, also durch die effektive Sonnentemperatur, und E_0 resp. T_0, die Temperatur der äußersten Schichten, wird nach (32) $T_0 = \frac{T \text{ effektiv}}{\sqrt[4]{2}}$. (Vgl. die Ausführungen des folgenden Paragraphen.) Mit Hilfe dieses T_0 wurde Gleichung (36) numerisch ausgewertet.

Bevor wir die Gleichung (31) auf die Erde und ihre Atmosphäre anwenden, bringen wir noch einige formale Änderungen an, die sich später nützlich erweisen werden. Wir können B_0 und A_0 und dadurch E_0 bestimmen durch die Werte von B, A, E an der oberen Grenze der Atmosphäre, die wir $\bar{B}$, $\bar{A}$, $\bar{E}$ schreiben, und haben

$$
(37) \qquad
\begin{aligned}
B &= -k\gamma m + \bar{B} \\
A &= -k\gamma m + \bar{A} \\
E &= -k\gamma m + \bar{E} \\
\gamma &= \frac{\bar{B} - \bar{A}}{2}, \qquad \bar{E} = \frac{\bar{B} + \bar{A}}{2}
\end{aligned}
$$

Haben wir, wie bei der Erde, eine Atmosphäre von endlicher Masse M pro cm², so kann es zweckmäßig sein, A_0 zu bestimmen durch $\underline{A}$, den Wert von A an der unteren Grenze, $m = M$. (Im folgenden werden stets Werte, die sich auf die obere resp. untere Grenze beziehen, durch einen oben resp. unten angebrachten Querstrich ausgezeichnet.) Dann ergibt eine leichte Umrechnung

$$
38) \qquad
\begin{aligned}
B &= -k\gamma m + \bar{B} \\
A &= -k\gamma(m - M) + \underline{A} = -k\gamma m + \frac{k\bar{B}M + 2\underline{A}}{kM + 2} \\
E &= -k\gamma m + \bar{E} = -k\gamma\left(m - \frac{M}{2}\right) + \frac{\bar{B} + \underline{A}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\gamma = \frac{\bar{B} - \underline{A}}{kM + 2}; \quad \bar{E} = \frac{k\bar{B}M + \bar{B} + \underline{A}}{kM + 2}; \quad \underline{E} = \frac{k\underline{A}M + \bar{B} + \underline{A}}{kM + 2}.
$$

Ist der Wert von B und A für eine Stelle gegeben, etwa

$\overline{B}$ und $\overline{A}$ (Gleichung 37) oder $\underline{B}$ und $\underline{A}$ (Gleichung 38), so ist E resp. T für jede Stelle m eindeutig bestimmt. Soll aber T als Funktion von z resp. h ermittelt werden, so bleibt eine neu auftretende Integrationskonstante zu unserer Verfügung (vgl. Gleichung 36). Denn ist $m = f(T)$ und berücksichtigen wir die mechanische Gleichgewichtsbedingung

$$dp = -g\varrho dh = -\frac{gpdh}{RT},$$

so haben wir, da $p \propto m$

$$\int T d(\log f(T)) = -\frac{g}{R}\int dh.$$

Die Lösung ist wieder eindeutig, wenn T für ein bestimmtes h oder auch die ganze Masse M (endlich) gegeben ist.

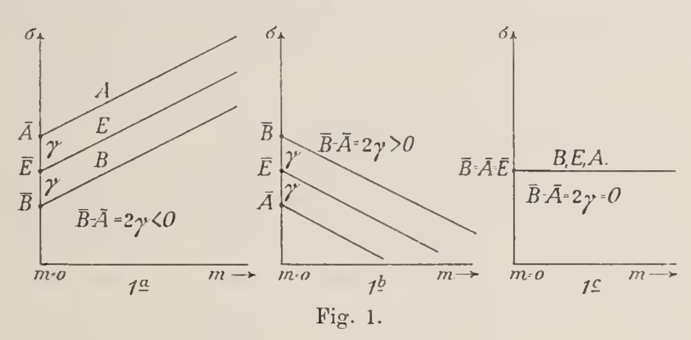


Fig. 1.

Den Inhalt der Gleichung (37) resp. (38) können wir auf einfache Weise graphisch zur Darstellung bringen (Fig. 1). Abszisse ist die durchstrahlte Masse m, Ordinate die Stärke des Energiestromes in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$. $\overline{B}$ ist eine „Solarkonstante". Für $m = 0$ treffen wir die Werte $\overline{B}$, $\overline{A}$, $\overline{E}$; die Ordinate bei $m = M$ bestimmt $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{E}$. Stets ist $E = \frac{B + A}{2}$ und die Neigung der unter sich parallelen Geraden ist proportional ihrem gegenseitigen Abstande, nach aufwärts oder abwärts gerichtet, je nachdem die Ausstrahlung oder Einstrah-

lung überwiegt. Sind beide gleich, so ist $E = \bar{E} = \bar{B} = \bar{A}$, und wir haben Isothermie. Würde die Erdatmosphäre nicht durch Konvektionsströme und die allgemeine Zirkulation gemischt, so würden in den nördlichen Gebieten die Temperaturverhältnisse im Winter der Fig. 1a, im Sommer der Fig. 1b sich anpassen.

Wir betrachten die Atmosphäre als Ganzes und durch genügend lange Zeiten. Da Ausstrahlung und Einstrahlung sich Gleichgewicht halten, haben wir $\bar{B} - \bar{A} = 2\gamma = 0$ (Fig. 1c) und nach (37)

$$(39) \qquad E = \text{const} = \bar{B} = B = A.$$

D. h. durch die ganze Atmosphäre hindurch ist die Temperatur konstant und gleich der Temperatur eines schwarzen Strahlers, der die über die Erde gleichmäßig ausgebreitete Sonnenstrahlung wieder zurückstrahlt. Diese Temperatur haben wir (vgl. § 1) effektive Erdtemperatur genannt. Die ganze Atmosphäre befände sich somit auf der effektiven Erdtemperatur, T eff. $= 254 = -19^0$ C. Bestimmen wir weiter die Oberflächentemperatur der Erde. Von unten muß in die Atmosphäre ein Energiestrom $\underline{A} = \underline{B} = \bar{B} = s\,T^4_{\text{eff.}}$ eintreten, geliefert dadurch, daß die Erdoberfläche einen Teil des unten aus der Atmosphäre austretenden Energiestromes $B = \bar{B}$ reflektiert und einen zweiten Teil gemäß ihrer Temperatur T grau ausstrahlt. Ist das Absorptionsvermögen der Erde a, so ist ihr Reflexionsvermögen $1 - a$, der erste Teil wird $(1 - a)\,\underline{B} = (1 - a)\,s\,T^4_{\text{eff.}}$, der zweite Teil $a\,s\,T^4$; wir haben die Bedingungsgleichung

$$40) \qquad (1 - a)\,s\,T^4_{\text{eff.}} + a\,s\,T^4 = s\,T^4_{\text{eff.}}$$

und erhalten die Temperatur der Erdoberfläche $T = T$ eff. $= 254 = -19^0$, unabhängig von ihrem Absorptions- resp. Strahlungsvermögen.

Wir erhalten als Resultat dieser Untersuchung:

Wird die von der Sonne zugestrahlte Energiemenge, vermindert um die Energiealbedo, gleich-

mäßig verteilt und graue Strahlung vorausgesetzt, so ist bei Strahlungsgleichgewicht die Atmosphäre isotherm, und ihre Temperatur, sowie die Temperatur der strahlenden Erdoberfläche sind gleich der effektiven Erdtemperatur $T = 254^0 = -19^0$ C.

Dies Resultat ist, da die Temperatur der oberen Inversionsschicht durch Beobachtung zu -55^0 C rund bestimmt ist und die Mitteltemperatur der Erdoberfläche $14{,}4^0$ C beträgt, ungenügend. Wir haben deshalb die vereinfachenden Voraussetzungen fallen zu lassen. k und a wurden unabhängig 1. von der Wellenlänge (graue Strahlung); 2. von der Höhe angenommen. Die zweite Annahme ist sicher unstatthaft, denn der in erster Linie absorbierende Wasserdampf nimmt mit der Höhe ab. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß der ausgesprochene Satz bestehen bleibt, wenn k resp. a beliebige Funktionen der Höhe sind. Denn führen wir ein die „optische“ Masse μ

$$\mu = \int_0^m k\, d\, m,$$

so können wir die beiden Hauptgleichungen schreiben

$$41)\quad \begin{aligned} \frac{dB}{d\mu} &= -B + E \\ \frac{dA}{d\mu} &= A + E \end{aligned}$$

und erhalten mit der Bedingungsgleichung $2kE = kB + kA$ wie oben die Lösungen

$$42)\quad \begin{aligned} B &= -\gamma\mu + B_0 \\ A &= -\gamma\mu + A_0 \\ E &= -\gamma\mu + E_0 \\ B - A &= \text{const} = 2\gamma \end{aligned}$$

und für $\overline{B} = \overline{A}$, $\gamma = 0$ ergibt sich wieder $E = \text{const} = \overline{B}$, also Isothermie von derselben Temperatur.

Wir haben also die erste Annahme, graue Strahlung, fallen zu lassen. Ehe wir dazu übergehen, haben wir uns mit

den Untersuchungen Humphreys und Gold's, die graue Strahlung voraussetzen, zu beschäftigen.

Anmerkung. Durch Gleichung 40 hat sich das scheinbar überraschende Resultat ergeben, daß die Temperatur der Erdoberfläche unabhängig von ihrem Absorptionsvermögen, also auch unabhängig von ihrem Emissionsvermögen ist. Dies beruht auf einem allgemeinen Satze: Graue Strahlung vorausgesetzt, bestimmt das Absorptionsvermögen wohl die umgesetzten Wärmemengen und damit die Geschwindigkeit der Einstellung, nicht aber die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes. Denn sind a, r und d die Bruchteile der auf einen Körper fallenden Strahlung S, die von diesem absorbiert, reflektiert und durchgelassen werden, so ist die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes bestimmt durch die Beziehung: abgegebene = zugestrahlte Wärmemengen

$$a\,s\,T^4 + r \cdot S + d \cdot S = S,$$

welche Gleichung durch die Beziehung

$$1 = a + r + d$$

die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes T

$$s\,T^4 = S$$

unabhängig von a bestimmt. Stets ergibt sich die Temperatur eines bestrahlten schwarzen Körpers. Eine versilberte Kugel, eine Gasmasse in einer vollkommen durchsichtigen Hülle eingeschlossen, und ein Schwarzkugelthermometer nehmen, unter denselben Bedingungen bestrahlt, dieselbe Temperatur an. Die Temperatur, auf welche sich ein fester oder gasförmiger Himmelskörper einstellt, ist unabhängig von seiner Albedo (immer graue Strahlung vorausgesetzt) gleich der Temperatur eines unter denselben Bedingungen bestrahlten schwarzen Körpers. Wir haben so den einfachsten Beweis, daß sich die Erdatmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht isotherm auf effektive Erdtemperatur einstellt. Das Absorptionsvermögen macht sich nur geltend, wenn noch Wärmemengen durch sogenannte äußere Wärmeleitung abgegeben werden. Setzen wir diese gleich $h\,(T - T_0)$, h das äußere Wärmeleitungsvermögen, T_0 die Temperatur der Umgebung, so bestimmt sich T aus der Bedingungsgleichung

$$a\,s\,T^4 + r \cdot S + d \cdot S + h\,(T - T_0) = S$$

und wird

$$s\,T^4 + \frac{h}{a}\,(T - T_0) = S,$$

also bei gleichem h mit a zu- und abnehmend. Bei kleinem a (versilberte Kugel $a = 0{,}03$) nimmt T beträchtlich kleinere Werte an wie für $a = 1$.

§ 3. Die Untersuchungen von W. J. Humphreys und E. Gold[1]).

Die Temperatur der oberen Inversion, der Stratosphäre, auf Grund von Strahlungsvorgängen zu bestimmen ist von W. J. Humphreys versucht worden. Seine Ausführungen werden sich als nicht stichhaltig erweisen. Da sie aber mehrfach in die Literatur übergegangen sind, und Humphreys das Verdienst zukommt, zuerst, wenn auch nicht einwurfsfrei, einen richtigen Ausdruck für diese Temperatur gefunden zu haben, müssen sie hier behandelt werden.

Eine strahlende Platte vom Absorptionsvermögen a sei zwischen zwei ihr parallele, schwarze Flächen von der Temperatur T eingeschlossen. Pro Flächeneinheit entnimmt sie dem von beiden Flächen zugestrahlten Betrage $2E_T = 2sT^4$ den Bruchteil a, und bei stationärem Zustande wird, da sie nach beiden Seiten ausstrahlt, ihre Temperatur T_2 bestimmt durch die Beziehung

a) $$2aE_T = 2asT_2^4; \qquad T_2 = T.$$

Die eine schwarze Fläche werde entfernt. Da die Platte nun nur noch von einer Seite her Strahlung empfängt, aber immer nach beiden Seiten ausstrahlt, bestimmt sich ihre neue Temperatur T_1 aus der Beziehung

b) $$aE_T = 2asT_1^4$$

und aus (a) und (b) folgt

43) $$T_1 = \frac{T}{\sqrt[4]{2}} = \frac{T}{1{,}19}.$$

Die Anwendung dieses Strahlungsschemas auf das zu behandelnde Problem ergibt sich nach Humphreys wie folgt: Die Sonnenstrahlen durchsetzen die Stratosphäre ohne nennenswert

[1]) W. J. Humphreys, Vertical Temperaturgradient of the Atmosphere, especially in the region of the upper inversion. Astrophys. Journal, vol. XXIX, p. 14, 1909.

E. Gold, The Isothermal Layer of the Atmosphere and Atmospheric Radiation. Proceedings of the Royal Society of London, series A, vol. 82, p. 43, 1909.

absorbiert zu werden und veranlassen die tiefer liegenden, wasserdampfhaltigen Schichten, schwarze Strahlung von der effektiven Erdtemperatur $T = 254^0$ auszusenden, die nun von der Stratosphäre zum Bruchteil a absorbiert wird. (Humphreys nimmt die atmosphärische Schicht mit $T = 254^0$ Mitteltemperatur als Strahlungsquelle an. Dies ist, wie bereits oben S. 59 erwähnt, nicht zulässig und durch die vorstehende Betrachtungsweise eliminiert.) Also berechnet sich nach Gleichung (43) die Temperatur der Stratosphäre zu

$$T_1 = \frac{254^0}{\sqrt[4]{2}} = 214^0 = -59^0 \text{ C},$$

während man sie auf Grund zahlreicher Messungen zu rund -55^0 C ansetzen kann. Diese glänzende Übereinstimmung und die Einfachheit der Überlegung haben Zweifel an deren Richtigkeit nicht aufkommen lassen. Daß sie nicht richtig ist, beweist schon die einfache Tatsache, daß sie zu einer unmöglichen Wärmebilanz führt. Denn die Sonne strahlt der Erde (nach Abzug der Albedo) pro Zeit und Flächeneinheit σ-Energieeinheiten zu, welche die Stratosphäre durchsetzen und die tiefer liegenden Schichten so erwärmen, daß diese wieder σ-Einheiten, nur in anderen Wellenlängen, zurückstrahlen. Ohne Zwischentreten der Stratosphäre würde sich also eine richtige Wärmebilanz ergeben. Allein die Stratosphäre absorbiert $a\sigma$-Einheiten und wird dadurch zur Temperatur $T_1 = \frac{T}{\sqrt[4]{2}}$ erhitzt, so daß sie nach jeder Seite hin $\frac{a\sigma}{2}$ Einheiten abgibt. Es verlassen also die Atmosphäre nach außen $\sigma - a\sigma + \frac{a\sigma}{2} = \sigma - \frac{a\sigma}{2}$ Einheiten, so daß die Erde als Ganzes pro Zeit und Flächeneinheit $\frac{a\sigma}{2}$ Einheiten gewinnen würde, was offenbar nicht möglich ist und dem Begriff des Strahlungsgleichgewichtes widerspricht.

Die Arbeit von E. Gold, die wir unten besprechen werden, wird häufig als wertvolle Ergänzung und Erweiterung der

Ausführungen Humphreys' betrachtet. Mit Unrecht, denn sie steht mit ihnen in direktem Gegensatze. Sie bestimmt die Temperatur der Atmosphäre bei Voraussetzung grauer Strahlung richtig durchwegs konstant zu $T = 254^0$, also gleich der effektiven Erdtemperatur.

Das der Formel (b) zu Grunde liegende Strahlungsschema gibt uns bereits einigen Einblick in die nächtlichen Strahlungsverhältnisse bei Strahlungswetter. Die Erdoberfläche gebe pro Minute und Quadratzentimeter S-Wärmeeinheiten ab. Fehlt nachts die Einstrahlung der Sonne und ist die Atmosphäre sehr trocken, ihr Absorptionsvermögen infolgedessen außerordentlich klein, so wird diese Wärmemenge in den Weltenraum ausgestrahlt. Die nächtliche Temperatur der Erdoberfläche kann dann selbst nach heißen Sommertagen sehr tiefe Werte erreichen. (Oparakane: 9. Sept. 1904 12 Uhr mittags 40° C, 12 Uhr nachts — 9° C). Wird durch Beimischung von Wasserdampf das Absorptionsvermögen der Atmosphäre auf den Wert a gebracht, so absorbiert sie $a\,S$-Einheiten und sendet bei einer Temperatur T' nach oben und unten je S'-Einheiten aus. Die Erdoberfläche verliert nur noch $S - S'$-Einheiten und in den Weltenraum werden $S - aS + S'$ Einheiten ausgestrahlt. Hierbei haben wir, da wir nicht die einzelnen Wellenlängen berücksichtigten, graue Strahlung der Atmosphäre angenommen. Wir lassen in erster Annäherung die Erdoberfläche schwarz strahlen; namentlich für tiefe Wassermassen dürfte dies mit Rücksicht auf ihr geringes Reflexionsvermögen zutreffen. Ist Strahlungsgleichgewicht vorhanden, so ist $S' = \frac{a\,S}{2}$ und der Wärmeverlust der Erdoberfläche wird von S auf $S - \frac{a\,S}{2}$ herabgesetzt. Schon geringe Wasserdampfmengen genügen, die Erdstrahlung kräftig absorbieren zu lassen. Wir schließen: Die strahlende Erdoberfläche vermag eine wasserdampfhaltige Atmosphäre derart anzuheizen, daß ihr eigener Wärmeverlust durch Gegenstrahlung im Maximum auf den halben Wert herabsinkt.

Dieser Strahlungsschutz der feuchten Atmosphäre tritt noch stärker in Erscheinung, wenn wir statt Strahlungsgleichgewicht die in Wirklichkeit vorhandenen Temperaturen berücksichtigen. Wir geben der Erdoberfläche eine Temperatur von 12° C, $T = 285^0$. Schwarz strahlend gibt sie $0{,}50 \frac{\text{Grammkal.}}{\text{cm}^2 \text{ min.}}$ ab, und bei Strahlungsgleichgewicht wird die Temperatur der Atmosphäre, unabhängig von ihrem Gehalt an Wasserdampf, $T = \frac{285^0}{\sqrt[4]{2}} = 239^0 = -34^0$ C. Diese abnorm kalte Atmosphäre könnte bereits bei genügendem Gehalt an Wasserdampf den Wärmeverlust der Erdoberfläche auf 50% herabsetzen. Bei höheren Temperaturen, die selbstverständlich nicht durch Strahlungsgleichgewicht bedingt sind, steigt die Gegenstrahlung stark an, proportional T^4. Diese Verhältnisse werden in § 6 eingehend behandelt werden.

Die gediegenen Untersuchungen von E. Gold, deren Studium und Verständnis durch eine sehr gedrängte Darstellungs- und mathematische Bezeichnungsweise erschwert werden, verdienen eine eingehendere, kritische Durchsicht. Wir haben bereits S. 56 aufmerksam gemacht, daß Gold für Strahlungsgleichgewicht zwei Bedingungen als gleichwertig ansetzt: 1. Gleichheit absorbierter und emittierter Strahlung jeder Schicht (enthalten in unserer Gleichung (28)); 2. Gleichheit der Energieströme B und A, welche die Schicht in entgegengesetzten Richtungen durchsetzen. Wie die Untersuchungen des § 2 zeigten, ist das erste Kriterium weit allgemeiner und gilt die zweite Bedingung nur für den Spezialfall der Wärmebilanz Null, $B - A = 0$. Da aber Gold nur diesen Spezialfall näher untersucht, entsteht kein weiterer Nachteil. Das erste Hauptresultat der Goldschen Untersuchungen (loc. cit., S. 5) „or the temperature for the isothermal state must be such, that a full radiator at that temperature would radiate with an intensity equal to the average vertical component of the intensity of solar radiation“ deckt sich mit den Ergebnissen

unseres § 2. Dies Resultat ergab sich uns bei Voraussetzung grauer Strahlung der Atmosphäre. Gold hingegen (sein b entspricht unserem k) bemerkt S. 55 ausdrücklich, obwohl b nicht den Index λ trägt, where b may vary with λ; und sein Satz ist ohne weitere Einschränkung der b abgeleitet. Allein es ist a priori klar, daß in dieser Allgemeinheit der Satz nicht richtig sein kann. Denn würde die Atmosphäre nur in zwei Wellenlängen λ_1 und λ_2 strahlen und absorbieren, so ist die Ausstrahlung $b_1 E_{\lambda_1} + b_2 E_{\lambda_2}$ bestimmt durch die Temperatur, die Absorption $b_1 S_{\lambda_1} + b_2 S_{\lambda_2}$ aber abhängig, wie die Strahlungsbestandteile S_{λ_1} und S_{λ_2} in der einfallenden Strahlung gemischt sind. Die Goldsche Schreibweise erschwert den Fehler aufzufinden. Gold schließt (S. 58): Again if we substitute in equation II, we find

$$\text{a)} \qquad \int_0^\infty V_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty 2\pi J_\lambda \, d\lambda \int_0^\infty x^{-3} e^{-u(o,\, p_1)} \, dx$$

(die linke Seite gibt die Strahlung der Sonne, die rechte Seite die Strahlung aller Schichten plus der Erde, welche eine Ebene beim Drucke p_1 durchsetzen)

and if p_1 is small, this becomes

$$\text{b)} \qquad \int_0^\infty V_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty \pi J_\lambda \, d\lambda = \pi J.$$

b) liefert den ausgesprochenen Satz. Allein schreiben wir (a) ausführlicher, unter Weglassung von Unwesentlichem und bezeichnen die Sonnenstrahlung mit S, so haben wir

$$a') \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, e^{-\frac{b_\lambda p_1}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta = \int_0^\infty 2\pi J_\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, e^{-\frac{b_\lambda p_1}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta .$$

Die Glieder, die b_λ enthalten, sind Funktion φ von λ; wir haben also

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\lambda) \, S_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty 2\pi \varphi(\lambda) J_\lambda \, d\lambda$$

und so lange $\varphi(\lambda)$ nicht spezialisiert ist, können keinerlei Schlüsse über den Zusammenhang zwischen $\int_0^\infty S_\lambda \, d\lambda$ und $\int_0^\infty J_\lambda \, d\lambda$ gezogen werden. Gold kommt zu seinem Satze lediglich dadurch, daß er, indem $p_1 = 0$ gesetzt wird, b_λ aus den Gleichungen entfernt. Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn in (α') b_λ konstant gesetzt, also graue Strahlung angenommen wird.

Die Goldsche Behandlung atmosphärischer Strahlungsprobleme unterscheidet sich in zwei Punkten von unserem in § 2 und auch weiterhin benützten Verfahren. Wir haben in § 1 gezeigt, daß die Absorption diffuser Strahlung, soweit sie hier in Betracht kommt, sich mit genügender Genauigkeit behandeln läßt, wenn sie als parallele Strahlung mit doppeltem Absorptionskoeffizienten angesetzt wird. Die Ungenauigkeit tritt vollständig zurück gegenüber der Tatsache, daß wir die Zahlenwerte derselben kaum der Größenordnung nach kennen. Gold rechnet formal streng. Dies hat aber den Nachteil, daß das ganze Zahlenmaterial seines Abschnittes VI nur durch mühsame, mechanische Quadratur gewonnen werden kann, während wir, wie sich unten zeigen wird, übersichtliche, geschlossene Ausdrücke erhalten, die sich leicht numerisch ausrechnen lassen. Gold behandelt zweitens Sonnenstrahlung, Erdstrahlung und atmosphärische Strahlung getrennt. Wir haben nach dem Schwarzschildschen Ansatze lediglich die Energieströme B und A zu berechnen; der Einfluß der Sonnen- resp. Erdstrahlung kommt (Gleichung 38) in den Integrationskonstanten $\overline{B}$ (oben auffallende Sonnenstrahlung) und $\underline{A}$ (unten einfallende Erdstrahlung) zur Geltung.

Die Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes ist bei Gold mit Aufdeckung der Isothermie von der effektiven Erdtemperatur erledigt. Das Resultat ist, wie wir oben (S. 79) sahen, unbefriedigend und steht in keinem Verhältnis zu dem großen angewandten mathematischen Apparat. Von neuen Gesichtspunkten geht der Abschnitt VI aus: Application to the Earth Atmosphere taking into account the Diminution of Watervapour with Height. Limits to which Convective Equilibrium

can subsist. Wir nehmen mit Gold k und a als unabhängig von der Wellenlänge an, setzen also Graustrahlung der Atmosphäre voraus. Ist die Atmosphäre in konvektivem Gleichgewichte, so ist bekanntlich $T \sim p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$, $\varkappa$ für atmosphärische Luft $= \frac{7}{5}$, also $T = p^{\frac{1}{3,5}}$. Die Ausstrahlung ist bei grauer Strahlung $\sim T^4$, also $\sim p^{\frac{4}{3,5}}$. Dies würde zu unangenehmen Ausdrücken führen, da Integrale von der Form $\int x^{\frac{8}{7}} e^x \, dx$ auftreten würden. Wir setzen deshalb in Annäherung $T \sim p^{\frac{1}{4}}$ und erzielen so $E \sim p$. Wir haben damit $\varkappa = \frac{4}{3}$ angenommen; unsere Betrachtungen wären deshalb für eine 3atomige Gasmasse strenge richtig.

Die Temperaturabnahme bei dieser Annahme berechnet sich[1]) zu 0,85° pro 100 m, ist also 15% kleiner als der bekannte, adiabatische Temperaturgradient 1° pro 100 m. Da $p \sim m$, der Masse, die unterhalb der oberen Grenze der Atmosphäre liegt, haben wir auch $T^4 \sim E \sim m$. Ist die ganze Masse pro cm^2 M und beziehen sich T_0 resp. E_0 auf die untere Begrenzung der Atmosphäre, so haben wir für konvektives Gleichgewicht in dieser Annäherung

44) $$E = E_0 \frac{m}{M}$$

und unsere beiden Hauptgleichungen (S. 73) werden:

45) $$\frac{dB}{dm} = -kB + kE_0 \frac{m}{M}$$

45a) $$\frac{dA}{dm} = \quad kA - kE_0 \frac{m}{M}.$$

Wir nehmen erst k konstant an. Dann erhalten wir die Lösungen:

46) $$B = B_0 e^{-km} + \frac{E_0 m}{M} - \frac{E_0}{kM}.$$

47) $$A = A_0 e^{km} + \frac{E_0 m}{M} + \frac{E_0}{kM}.$$

[1]) Vgl. R. Emden, Gaskugeln, S. 355. Leipzig 1907.

Nehmen wir weiter an, daß Sonnenstrahlung im Betrage σ einfällt ($B = \sigma$ für $m = 0$) und die Atmosphäre ohne Temperatursprung auf der Erdoberfläche aufliegt ($A = E_0$ für $m = M$), so erhalten wir:

$$B = \left(\sigma + \frac{E_0}{kM}\right) e^{-km} + \frac{E_0 m}{M} - \frac{E_0}{kM} \tag{48}$$

$$A = -\frac{E_0}{kM} e^{k(m-M)} + \frac{E_0 m}{M} - \frac{E_0}{kM}. \tag{49}$$

Diese Atmosphäre ist nun nicht im Strahlungsgleichgewichte. Bilden wir für die Schicht von m bis $m + dm$ den Überschuß der absorbierten über die ausgestrahlte Energie, also den Ausdruck $k\,dm\,(B + A) - 2\,k\,dm\,E$, so erhalten wir

$$\text{Absorption} - \text{Emission} = k\,dm\left[\left(\sigma + \frac{E_0}{kM}\right)e^{-km} - \frac{E_0}{kM} e^{k(m-M)}\right] \tag{50}$$

und selbst wenn wir von Sonnenstrahlung absehen ($\sigma = 0$)

$$\text{Absorption} \gtrless \text{Emission, wenn } m \lessgtr \frac{M}{2}. \tag{51}$$

Strahlt die Sonne, so erstreckt sich der Überschuß noch auf tiefere Schichten. Der angenommene Temperaturgradient wird somit durch Strahlung gebrochen (selbstverständlich, denn bei grauer Strahlung ist Strahlungsgleichgewicht isotherm), aber im besonderen so, daß mindestens (bei $\sigma = 0$ genau) die obere Hälfte (der Masse nach) der Atmosphäre gewärmt, die untere Hälfte abgekühlt werden. Der Temperaturgradient 1^0 auf 100^m wird, da die Temperatur nach oben stärker abnimmt, noch rascher gebrochen. Daraus zieht Gold folgende Schlüsse. Treten Konvektionsströme auf, so werden der Erdoberfläche Wärmemengen entnommen und in die Atmosphäre übergeführt. Reichen diese Konvektionsströme bis in die obere Hälfte der Atmosphäre empor, so bewirken die emporgeführten Wärmemengen, daß die Temperaturen steigen und somit der adiabatische Temperaturgradient noch rascher gebrochen wird. In den tiefen

Schichten aber können die emporgeführten Wärmemengen die zu große Ausstrahlung decken und das konvektive Gleichgewicht aufrecht halten. Konvektives Gleichgewicht und damit Konvektion sind also nur möglich, wo die Ausstrahlung die Absorption überwiegt, also in der unteren Hälfte der Atmosphäre. So erklärt sich die seltsam scheinende 5. Annahme Golds (loc. cit., S. 46). V. A necessary condition for convection, which forms the keystone of the present discussion, is that, in the upper part of the convective system, the radiation from any horizontal layer (or any elementary sphere) should exceed the absorption by it. Wiederholen wir, um Mißverständnissen vorzubeugen, nochmals mit den Worten Golds (loc. cit., S. 44): I propose to show, that in an atmosphere which is not transparent, but absorbs and emits radiation, the process of radiation would prevent the establishment of the temperature gradient necessary for convective equilibrium, in the upper layers of the atmosphere; and that in the lower layers of our atmosphere it can be maintained only by transference of energy from the earth to the atmosphere by direct convection or by the process of evaporation of water at the earth's surface and subsequent condensation in the atmosphere.

Diese Betrachtungen werden vertieft, indem die Wirkung des Wasserdampfes in Rechnung gezogen wird. Die Menge desselben nimmt mit der Höhe ab; seine Wirkung angenähert darzustellen, setzt Gold $k = \frac{a}{q - m}$, wo a und q geeignete Konstanten sind. Für q werden die Werte $\frac{9}{8} M$ und $\frac{5}{4} M$ angesetzt, welche die Abnahme der Absorption rascher resp. langsamer darstellen sollen, als sie der wirklichen Abnahme des Wasserdampfes entspricht. Senkrecht einfallende Strahlung wird beim Durchlaufen der Atmosphäre um den Bruchteil $\left(\frac{q-M}{q}\right)^a$ geschwächt, wie eine leichte Rechnung ergibt. Für a werden zwei Annahmen zu Grunde gelegt. Angenommen, daß 25°/₀ der Erdstrahlung ungeschwächt durchgelassen, und zwei Drittel des Restes absorbiert werden, ergeben sich für die

beiden q-Werte $a = 0{,}5$ und $0{,}68$. Wird aber die Erdstrahlung bis auf verschwindend kleine Beträge absorbiert, so ist $a = 2$ resp. 4 zu setzen.[1]) Wir setzen also in den beiden Hauptgleichungen (S. 73) $k = \frac{a}{q - m}$. Ist die Atmosphäre isotherm auf der Temperatur $T = T_0$, $E = E_0$, so erhalten wir als Lösungen

52) $$B = B_0 \left(\frac{q - m}{q}\right)^a + E_0$$

53) $$A = A_0 \left(\frac{q}{q - m}\right)^a + E_0 .$$

Bestimmen wir die Integrationskonstanten so, daß die Strahlung σ einfällt, $(\overline{B} = \sigma)$, und die Atmosphäre auf der Erdoberfläche von der Temperatur T_0 aufliegt $(\underline{A} = \underline{E_0})$, so ergibt sich

54) $$B = (\sigma - E_0) \left(\frac{q - m}{q}\right)^a + E_0$$

54 a) $$A = E_0 .$$

Nehmen wir anderseits an, daß sich die Atmosphäre in nahezu konvektivem Gleichgewichte befindet, so daß wir in den Hauptgleichungen $E = E_0 \frac{m}{M}$ setzen können, so erhalten wir die Lösungen

55) $$B = B_0 \left(\frac{q - m}{q}\right)^a - \frac{E_0}{M} \frac{a\,q}{a - 1} \frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M} q$$

55 a) $$A = A_0 \left(\frac{q}{q - m}\right)^a - \frac{E_0}{M} \frac{a\,q}{a + 1} \frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M} q,$$

und spezialisieren wir wieder für $\overline{B} = \sigma$; $\underline{A} = E_0$, so ergibt sich

56) $$B = \left(\sigma + \frac{E_0}{M} \frac{q}{a - 1}\right)\left(\frac{q - m}{q}\right)^a - \frac{E_0}{M} \frac{a\,q}{a - 1} \frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M} q$$

56 a) $$A = -\frac{E_0}{M} \frac{q - M}{a + 1} \left(\frac{q - M}{q - m}\right)^a - \frac{E_0}{M} \frac{a\,q}{a + 1} \frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M} q .$$

---

[1]) Den Einfluß des Wasserdampfes werden wir in unseren Untersuchungen § 5 durch andere, besser begründete Ausdrücke darstellen.

Abstrahieren wir von der Sonnenstrahlung, so ist in (54) und (56) $\sigma = 0$ zu setzen; sehen wir von der Erdstrahlung ab ($A = 0$), so erhalten wir an Stelle von (53) und (55a)

$$57) \qquad A = -E_0\left(\frac{q-M}{q-m}\right)^a + E_0$$

$$57) \qquad A = -\frac{E_0}{M}q\left(1 - \frac{a}{a+1}\frac{q-M}{q}\right)\left(\frac{q-M}{q-m}\right)^a - \frac{E_0}{M}\cdot\frac{aq}{a+1}\cdot\frac{q-m}{q} + \frac{E_0}{M}q.$$

Die geschlossenen Ausdrücke (52) bis (57) gestatten die Berechnung des von Gold in Abschnitt VI durch mechanische Quadratur gewonnenen Zahlenmaterials mit mehr als hinreichender Genauigkeit. Die eingehendere Anwendung derselben zeigt:

Mit Berücksichtigung des Wasserdampfes tritt für die Atmosphäre im konvektiven Gleichgewicht an Stelle der Gleichung (51) in genügender Annäherung die Gleichung

$$58) \qquad \text{Absorption} \gtrless \text{Emission, wenn } m \lessgtr \frac{M}{4}.$$

Und wie oben schließt Gold, daß jetzt Konvektionsströme nicht über das Niveau $m = \frac{1}{4}$, das ist eine Höhe von zirka 9200 m, emporreichen können. Unterhalb des Niveaus $m = \frac{M}{4}$ halten sie das konvektive Temperaturgefälle gegen die Wirkung der Strahlung aufrecht, oberhalb unterstützen sie die Strahlung in ihrem Erwärmungsprozeß. Innerhalb des Niveaus von $m = \frac{M}{4}$ und $m = \frac{M}{2}$ ist die Differenz Ausstrahlung — Absorption so klein, daß nur Konvektionsströme von geringer Intensität bis in diesen Teil der Atmosphäre emporsteigen müssen. Oberhalb $m = \frac{M}{4}$ stellt der Strahlungsprozeß Isothermie her. (Gold setzt ihre Temperatur gleich der Temperatur, die durch die

Konvektionsströme bei $m = \frac{M}{4}$ bewirkt wird ($J_c = \frac{1}{4} J$), nach meiner Meinung nicht richtig, denn die Isothermie ist bestimmt als Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes, also gleich der effektiven Erdtemperatur.)

Zusammenfassend ergibt sich das Resultat c (Gold, loc. cit., S. 47); It is found that if the atmosphere consists of to skells, the inner in the adiabatic, the outer in the isothermal state: 1) the inner cannot extend to a height greater than that for which $m = \frac{1}{4} M$ (10500 m); 2) the inner must extend to a height greater than that for which $m = \frac{1}{2} M$ (5500 m)[1]).

Diesen Ausführungen habe ich folgendes beizufügen. Sie können sich selbstverständlich nur auf Konvektionsströme beziehen, die durch geringe Überschreitung des angenommenen, adiabatischen Temperaturgradienten ausgelöst werden. Ich habe an anderer Stelle[2]) gezeigt, daß die atmosphärischen Strömungen sich in zwei Arten sondern lassen, die ich als „kurze" und „lange" Zykeln bezeichnete. Nur die ersteren, die sich auf verhältnismäßig kleinen Gebieten abspielen, wie etwa die Wärmegewitter, die Tornados usw., haben labiles Gleichgewicht der Atmosphäre zur Vorbedingung. Der größte Teil aller ihrer Bewegungsvorgänge, wie sie etwa in den Hoch- und Tiefdruckgebieten sich einstellen, wird durch andere Energie, als der Senkung des Schwerpunktes der über diesen Gebieten sich mischenden Luftmassen, gespeist. Sie haben keinen besonderen Temperaturgradienten zur Vorbedingung, sondern dieser wird umgekehrt durch sie erzwungen. Soweit sie emporreichen, werfen sie die durch Strahlung bedingten Temperaturen über den Haufen. Davon abgesehen verleitet das Goldsche Resultat c leicht zu der Meinung, daß durch graue Strahlung allein die Teilung der

---

1) Die Höhenangaben sind nicht genau; sie entsprechen der Teilung der Atmosphäre bei Isothermie von 0^0. Wir haben aber die entsprechenden Höhen bei konvektivem Gleichgewicht anzusetzen; sie sind bei einer Bodentemperatur von 0^0 9200 m und 5000 m; für eine Bodentemperatur von t^0 aber $t \cdot 4\,^0/_{00}$ größer.

2) R. Emden, Gaskugeln, S. 363 f. Leipzig 1907.

Atmosphäre bei $m = \frac{M}{4}$ in diese sich so verschieden verhaltenden Gebiete verursacht würde; etwa folgendermaßen überlegend. Die ganze Atmosphäre sei in konvektivem Gleichgewichte. Der Teil über $m = \frac{M}{4}$ wird durch den Strahlungsprozeß angewärmt, bei festgehaltener Bodentemperatur können die Konvektionsströme nicht mehr störend eingreifen, es muß sich also die Isothermie des Strahlungsgleichgewichtes einstellen. Unterhalb $m = \frac{M}{4}$ tritt durch Strahlung Abkühlung ein, bei festgehaltener Bodentemperatur bilden sich also instabile Temperaturgradienten aus und Konvektionsströme treten auf, bis $m = \frac{M}{4}$ emporsteigend, die Instabilität vermindernd. Der Strahlungsprozeß allein würde also bei festgehaltener Bodentemperatur unterhalb $m = \frac{M}{4}$ stets Konvektionsströme neu erzeugen und die Trennung der Atmosphäre in Troposphäre und Stratosphäre in richtiger Höhe wäre durch den Strahlungsprozeß allein erklärt. Es ist nicht ersichtlich, ob Gold so oder ähnlich geurteilt hat, noch welche praktische Bedeutung er seinem Resultat c beimißt. Eine Schlußfolgerung wie die angegebene aber ist unrichtig. In den ersten Zeitmomenten tritt die angegebene Temperaturänderung ein, was sich aber in den folgenden Zeiten abspielt, läßt sich nicht mehr überblicken. Wohl aber läßt sich das Endprodukt des Strahlungsvorganges angeben; denn von beliebigem Anfangszustande ausgehend muß sich Strahlungsgleichgewicht einstellen. Für die Wärmebilanz Null ergibt sich somit graue Strahlung (wie bei Gold) vorausgesetzt stets Isothermie von der effektiven Erdtemperatur, mag die Absorption auch beliebige Funktion der Höhe sein. Für diese Wärmebilanz stellt sich der Erdboden ebenfalls auf effektive Erdtemperatur ein. Würden wir seine Temperatur künstlich höher halten, etwa durch Wärmezufluß aus dem Erdinnern, oder wäre vorherige intensive Bestrahlung genügend lange

nachwirkend, so wären die Wärmebilanz Null und die Isothermie gestört, und es könnten sich Temperaturgradienten ausbilden. Stets aber wird durch die ganze Atmosphäre hindurch stabiles Gleichgewicht hervorgerufen (vgl. oben S. 75); denn unter allen Umständen hat graue Strahlung Stabilität durch die ganze Atmosphäre hindurch zur Folge und kann keine Trennung in Troposphäre und Stratosphäre bewirken. Lassen wir aber, im Gegensatze zu Gold, die Voraussetzung grauer Strahlung fallen, so ändern sich diese Verhältnisse, wie in § 5 gezeigt werden wird, vollkommen.

Eine geistreiche Überlegung ermöglicht Gold die tiefsten Temperaturen zu bestimmen, die in der Atmosphäre auf die Dauer möglich sind. Ist die Atmosphäre in konvektivem Gleichgewichte, so ist jedes Teilchen auf der tiefsten Temperatur, die bei gegebener Bodentemperatur mit Stabilität verträglich ist und emittiert deshalb ein Minimum von Strahlung. Die geringste Strahlungsmenge empfängt offenbar die oberste atmospärische Schicht: die Temperatur, auf welche sich diese bei Strahlungsgleichgewicht einstellt, ist deshalb die tiefste Temperatur, die der Strahlungsaustausch zuläßt. Sie bestimmt sich aus der Beziehung $2\overline{E} = \overline{B} + \overline{A}$, wenn $\overline{B} = 0$, zu $\overline{E} = \frac{\overline{A}}{2}$. Gold berechnet entsprechend seiner Annahme über die Verteilung und Wirkung des Wasserdampfes $T = 198^0$, 173^0; 193^0 und 154^0; bei einer Bodentemperatur von $T = 300^0$.

Die Ergebnisse der Goldschen Untersuchungen lassen sich wie folgt zusammenfassen. Graue Strahlung vorausgesetzt ergibt sich:

1. a) Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre von gleichmäßiger Zusammensetzung ist Isothermie von der effektiven Erdtemperatur, $T = -19^0$ C.

b) Die Differenz Absorption — Emission ist durch Gleichung (51) bestimmt.

2. Wird der Wirkung des Wasserdampfes Rechnung getragen, so folgt weiter:

a) Satz 1a bleibt bestehen. (Dieser Satz ist bei Gold nicht

besonders angeführt, er ergibt sich aber leicht aus dessen Ansätzen. Allgemein, d. h. für k beliebige Funktion von m haben wir den Satz oben S. 79 bewiesen.)

b) An Stelle der Gleichung (51) tritt die Gleichung (58). Konvektives Gleichgewicht wird durch den Strahlungsprozeß gebrochen, derart, daß in den ersten Zeiten oberhalb $m = \frac{M}{4}$ Konvektion verhindert, unterhalb Konvektion begünstigt wird.

3. Der Wirkung des Wasserdampfes Rechnung tragend werden für eine Bodentemperatur $T = 300$ die niedersten Temperaturen von Schichten, die sich im Strahlungsgleichgewicht befinden, zwischen $T = 150$ und 200 bestimmt. Da aber Sonnenstrahlung ausgeschlossen ist, würden diese Temperaturen mit der Bodentemperatur rasch sinken.

§ 4. Die Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes.

Wir schließen an die Untersuchungen des § 2 an. Wir setzen nicht mehr graue Strahlung voraus, sondern schreiben der Atmosphäre für jede Wellenlänge λ ein besonderes Absorptionsvermögen a_λ, k_λ zu. Dann werden die beiden Hauptgleichungen in leichtverständlicher Bezeichnung:

59)
$$\frac{dB_\lambda}{dm} = -k_\lambda B_\lambda + k_\lambda E_\lambda$$
$$\frac{dA_\lambda}{dm} = k_\lambda A_\lambda - k_\lambda E_\lambda .$$

Dies Aufgeben der grauen Strahlung hat die weitgehende Konsequenz, daß wir das Absorptionsvermögen nicht mehr als beliebige Funktion der Höhe ansetzen können. Denn wollten wir entsprechend den Gleichungen (41) und (42) eine optische Masse einführen, so würde dieselbe reelle Masse in jeder Wellenlänge einer anderen optischen Masse entsprechen. Das Absorptionsvermögen sei also nur Funktion der Wellenlänge. Bei Strahlungsgleichgewicht muß jetzt für jedes m an Stelle von Gleichung (28) die integrale Beziehung

60) $$2\int_0^\infty k_\lambda E_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty k_\lambda (B_\lambda + A_\lambda)\, d\lambda$$

erfüllt sein.

Setzen wir weiter $B_\lambda - A_\lambda = 2\gamma_\lambda$, so folgt durch Addition der Hauptgleichungen

61) $$\frac{dB_\lambda}{dm} + \frac{dA_\lambda}{dm} = -k_\lambda (B_\lambda - A_\lambda) = -2k_\lambda \gamma_\lambda$$

mit der Folge

62) $$\int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda + \int_0^\infty A_\lambda \, d\lambda = -2\int dm \int_0^\infty k_\lambda \gamma_\lambda \, d\lambda + \text{const};$$

und durch Subtraktion, mit Rücksicht auf Strahlungsgleichgewicht, Gleichung (60),

$$\frac{d}{dm}\int_0^\infty (B_\lambda - A_\lambda)\, d\lambda = 0$$

63) $$\int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda - \int_0^\infty A_\lambda \, d\lambda = +2\int_0^\infty \gamma_\lambda \, d\lambda = \text{const},$$

d. h. die Differenz der ab- und aufsteigenden Energieströme ist konstant. Dieser Satz (vgl. oben S. 74) ist also nicht auf graue Strahlung beschränkt.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise führen wir ein

$$E = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda; \quad B = \int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda; \quad A = \int_0^\infty A_\lambda \, d\lambda; \quad \gamma = \int_0^\infty \gamma_\lambda \, d\lambda;$$

Aus (62) und (63) folgt

64) $$B = -\int_0^m dm \int_0^\infty k_\lambda \gamma_\lambda \, d\lambda + \overline{B}$$
$$A = -\int_0^m dm \int_0^\infty k_\lambda \gamma_\lambda \, d\lambda + \overline{A},$$

während (61) noch die merkwürdige Beziehung liefert

65) $$\int_0^\infty \frac{1}{k_\lambda}(B_\lambda + A_\lambda)\, d\lambda = -2m\gamma + \text{const} = -(\overline{B} - \overline{A})\, m + \text{const}.$$

Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen Isothermie vorhanden sein kann. In den Gleichungen (59) setzen wir dementsprechend E_λ konstant, d. h. unabhängig von m, und erhalten durch Integration

$$66)\qquad \begin{aligned} B_\lambda &= B_{0\lambda} e^{-k_\lambda m} + E_\lambda \\ A_\lambda &= A_{0\lambda} e^{+k_\lambda m} + E_\lambda \end{aligned}$$

und daraus mit Rücksicht auf Strahlungsgleichgewicht (Gleichung 63)

$$\int_0^\infty B_\lambda d\lambda - \int_0^\infty A_\lambda d\lambda = \int_0^\infty (B_{0\lambda} e^{-k_\lambda m} - A_{0\lambda} e^{k_\lambda m}) d\lambda$$

$$= 2\int_0^\infty \gamma_\lambda d\lambda = \overline{B} - \overline{A} = \text{const.}$$

Es muß also sein $B_{0\lambda} = A_{0\lambda} = 0$ mit der Folge

$$\overline{B} = \overline{A} = \underline{B} = \underline{A}$$

$$B_\lambda = A_\lambda = E_\lambda \text{ unabhängig von } m.$$

Wir haben den Satz: „Soll Isothermie vorhanden sein, so muß nicht nur (wie bei grauer Strahlung) sich **integral** die Wärmebilanz Null ergeben, $\overline{B} = \overline{A}$, sondern in jeder einzelnen Wellenlänge; und die auf- und absteigenden Energieströme müssen an jeder Stelle in jeder Wellenlänge übereinstimmen in einer Intensität gleich $E_\lambda d\lambda$.

Damit die Erdatmosphäre sich auf Isothermie einstellen könnte, müßte sie mit der Strahlung, die ein schwarzer Körper auf ihrer Temperatur aussendet, beleuchtet werden, und statt auf der nach anderer spektraler Verteilung emittierenden Erdoberfläche auf einer vollkommen schwarzen, gleich temperierten oder vollkommen spiegelnden Unterlage aufliegen. **Nach den in Wirklichkeit vorhandenen Bedingungen kann die Erdatmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht nicht isotherm sein.**

Um weiteren Einblick zu erhalten, integrieren wir die Hauptgleichungen (59), indem wir E_λ als unbekannte Funktion von m betrachten und erhalten

$$B_\lambda = \overline{B}_\lambda e^{-k_\lambda m} + e^{-k_\lambda m} \int_0^m e^{k_\lambda m} k_\lambda E_\lambda \, dm$$

67)
$$= e^{-k_\lambda m} (\overline{B}_\lambda - \overline{E}_\lambda) + E_\lambda - e^{-k_\lambda m} \int_0^m e^{k_\lambda m} \frac{dE_\lambda}{dm} \, dm$$

$$A_\lambda = \overline{A}_\lambda e^{k_\lambda m} - e^{k_\lambda m} \int_0^m e^{-k_\lambda m} k_\lambda E_\lambda \, dm$$

68)
$$= e^{k_\lambda m} (\overline{A}_\lambda - \overline{E}_\lambda) + E_\lambda - e^{k_\lambda m} \int_0^m e^{-k_\lambda m} \frac{dE_\lambda}{dm} \, dm.$$

Da A_λ den aufsteigenden Energiestrom mißt, kann es oft zweckmäßiger sein, an Stelle von $\overline{A}_\lambda$ den Wert an der unteren Grenze der Atmosphäre, $\underline{A}_\lambda$, einzuführen. Hat die Atmosphäre eine Mächtigkeit M, so ergibt sich durch leichte Umformung von (68)

69) $$A_\lambda = e^{k_\lambda (m-M)} (\underline{A}_\lambda - \underline{E}_\lambda) + E_\lambda + e^{k_\lambda m} \int_m^M e^{-k_\lambda m} \frac{dE_\lambda}{dm} \, dm.$$

Kann die Masse der Atmosphäre, wie etwa bei sehr großen Gaskugeln, praktisch unendlich große Werte annehmen, während die Energiemengen endlich bleiben sollen, so wird Gl. 68 $A_\lambda = A'_\lambda e^{k_\lambda m} + e^{k_\lambda m} \int_m^\infty e^{-k_\lambda m} k_\lambda E_\lambda \, dm$. A'_λ muß gleich Null sein. Das Integral bleibt endlich und wir erhalten

70) $$A_\lambda = E_\lambda + e^{k_\lambda m} \int_m^\infty e^{-k_\lambda m} \frac{dE_\lambda}{dm} \, dm.$$

Für Strahlungsgleichgewicht ergibt sich, infolge (63), die Bedingung in Form einer Integralgleichung

$$\int_0^\infty e^{-k_\lambda m}(\bar{B}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty e^{-k_\lambda m} d\lambda \int_0^m e^{k_\lambda m} \frac{dE_\lambda}{dm}\,dm - \int_0^\infty e^{k_\lambda m}(\bar{A}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda$$

71 a)
$$+\int_0^\infty e^{k_\lambda m}\,d\lambda \int_0^m e^{-k_\lambda m}\,\frac{dE_\lambda}{dm}\,dm = +2\gamma = \text{const}$$

oder

$$\int_0^\infty e^{-k_\lambda m}(\bar{B}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty e^{-k_\lambda m}\,d\lambda \int_0^m e^{k_\lambda m}\,\frac{dE_\lambda}{dm}\,dm$$

71 b)
$$-\int_0^\infty e^{k_\lambda (m-M)}(\underline{A}_\lambda - \underline{E}_\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty e^{k_\lambda m}\,d\lambda \int_m^M e^{-k_\lambda m}\,\frac{dE_\lambda}{dm}\,dm = +2\gamma\ \text{const}$$

oder schließlich, falls $M = \infty$ werden kann

$$\int_0^\infty e^{-k_\lambda m}(\bar{B}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty e^{-k_\lambda m}\,d\lambda \int_0^m e^{k_\lambda m}\,\frac{dE_\lambda}{dm}\,dm$$

71 c)
$$-\int_0^\infty e^{k_\lambda m}\,d\lambda \int_m^\infty e^{-k_\lambda m}\,\frac{dE_\lambda}{dm}\,dm = +2\gamma = \text{const.}$$

In diesen Gleichungen ist k_λ durch das Gas, welches die Atmosphäre aufbaut, als Funktion der Wellenlänge gegeben. Für E_λ gilt die Plancksche Beziehung

72)
$$E_\lambda\,d\lambda = 5{,}304.10^{-11}\,\frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{1,462}{\lambda T}} - 1}\,d\lambda\,\frac{\text{kal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}\,.$$

Nach ausgeführter Integration nach λ erhalten wir eine Integralgleichung, die mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen bei $m = 0$ und $m = M$ die Temperatur T als Funktion von m, oder mit Hilfe der Beziehung $\frac{dm}{m} = \frac{dz}{RT}$ (oben S. 75) als Funktion von z bestimmt. Die Gleichungen (71) enthalten somit die vollständige Lösung des gestellten Problems. Ihrer

Auflösung scheinen selbst in den einfachsten Fällen allzu große mathematische Schwierigkeiten zu begegnen. Leicht zugänglich sind sie lediglich in 2 Spezialfällen.

1. Spezialfall. Wir setzen in (71 b) $\overline{B}_\lambda = \overline{E}_\lambda$, $\underline{A}_\lambda = \underline{E}_\lambda$. Dann folgt ohne weiteres $\frac{d E_\lambda}{d m} = 0$, $\gamma = 0$. Wir erhalten somit $E_\lambda =$ const, also Isothermie, mit der Folge $\overline{B}_\lambda = \overline{E}_\lambda = \underline{E}_\lambda = \underline{A}_\lambda$. Dasselbe ergibt sich, wenn wir von $E_\lambda =$ const ausgehen. Wir erhalten das bereits auf andere Weise ermittelte Resultat: Isothermie ist bei Strahlungsgleichgewicht dann und nur dann möglich, wenn die Atmosphäre von beiden Seiten her mit gleicher, schwarzer Strahlung beleuchtet wird; ihre Temperatur wird der Art, daß ein gleich temperierter schwarzer Strahler Strahlung gleich der ihr zugesandten Strahlung aussendet. Während die vereinfachende Annahme grauer Strahlung nur die integrale Wärmebilanz Null für Isothermie erfordert, muß bei Eingehen auf die einzelnen Wellenlängen nicht nur diese Wärmebilanz für jede einzelne Wellenlänge vorhanden sein, sondern auch. um dies zu ermöglichen, schwarze Strahlung einfallen. Dies so gänzlich verschiedene Verhalten ist in letzter Linie darin begründet, daß graue Strahlung von bestimmter Intensität auf unendlich viele verschiedene Arten, schwarze Strahlung von bestimmter Intensität nur auf eine einzige Art und Weise erhalten werden kann.

2. Spezialfall. Die Strahlung sei grau. Wir setzen in (71 b) k_λ konstant gleich k. Um die Konstante 2γ wegzuschaffen, wird nach m differentiert, und wenn wir mit C eine neue, beliebige Konstante bezeichnen, spaltet sich, wie leicht ersichtlich, die Gleichung in die 2 Gleichungen

$$- e^{-km}(\overline{B} - \overline{E}) - e^{-km}\int_0^m e^{km}\frac{dE}{dm}\,dm = C$$

$$e^{k(m-M)}(\underline{A} - \underline{E}) + e^{km}\int_m^M e^{-km}\frac{dE}{dm}\,dm = C.$$

Wird nochmals differentiert und das bleibende Integral partiell integriert, ergibt sich leicht die Beziehung $\frac{d^2 E}{d m^2} = 0$ und die allgemeine Lösung für graue Strahlung

$$E = C m + C_1 .$$

Die Integrationskonstanten lassen sich auch leicht bestimmen, so daß sich die Gleichungen (38) ergeben.

§ 5. Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre und die Temperatur der oberen Inversion.

Die Untersuchungen des § 2, die graue Strahlung zur Voraussetzung hatten, führten zu dem unbefriedigenden Resultate, daß bei Strahlungsgleichgewicht die Atmosphäre sich durchwegs auf konstante Temperatur gleich der effektiven Erdtemperatur, $T = 254^0 = -19^0$ C einstellt. Anderseits sind die Formeln des § 4, welche dem verschiedenen Absorptionsvermögen der einzelnen Wellenlängen Rechnung tragen und die exakte Lösung des Problems enthalten, weiterer Behandlung nicht zugänglich. Wir nähern uns in diesem Paragraphen dieser Lösung auf einem Wege, der dadurch ermöglicht wird, daß die die Atmosphäre durchsetzenden Strahlen sich in zwei Gruppen von gänzlich verschiedener Temperatur anordnen lassen. Die von der Sonne ausgehende Strahlung hat ihr Energiemaximum bei $\lambda = 0{,}47\ \mu$ (die Planksche Formel (72) liefert hiefür 25000 Einheiten für $T = 6000^0$); der Beitrag, den Wellenlängen größer als etwa $2\ \mu$ liefern, ist zu vernachlässigen. Die Strahlung der Erde und der angewärmten Atmosphäre hat für $T = 285^0$ ihr Energiemaximum bei $\lambda = 10\ \mu$ (die Planksche Formel gibt hiefür etwa 300 Einheiten), der Anteil in Wellenlängen $< 2\ \mu$ ist zu vernachlässigen. Wir zerlegen dementsprechend die Strahlung in 2 Teile: der Teil 1 umfaßt $0 < \lambda < 2\ \mu$, der Teil 2 umfaßt $2\ \mu < \lambda < \infty$. Wir setzen also

$$B = B_1 + B_2$$
$$A = A_1 + A_2$$
$$E = E_1 + E_2$$

und werden später A_1 gegen A_2, E_1 gegen E_2 vernachlässigen, hüten uns aber, auch B_2 klein gegen B_1 anzunehmen, denn die absteigende Strahlung B besteht nicht nur aus der kurzwelligen Sonnenstrahlung B_1, sondern es tritt noch die langwellige Ausstrahlung der angewärmten Atmosphäre dazu. Wir nehmen weiter vereinfachend an, daß jedes dieser Strahlenbündel mit einem mittleren Absorptionskoeffizienten k_1 resp. k_2 behandelt werden kann.

Entgegen vielfach verbreiteter Meinung ist der Fehler, den man begeht, für die einfallende Sonnenstrahlung einen mittleren Absorptionskoeffizienten anzusetzen, nicht bedeutend, falls nur ein etwas kleinerer Wert für die Solarkonstante angenommen wird. So kann nach Abbot und Fowle (loc. cit., S. 94 ff.) die Intensität der Sonnenstrahlung auf dem Mount Wilson und Washington bis zu einer Zenithdistanz $\Theta = 75^0$ mit großer Genauigkeit dargestellt werden in der Form $J = 1{,}84\,(0{,}894)^{\sec\Theta}$ resp. $J = 1{,}78\,(0{,}787)^{\sec\Theta}$. Wird die Solarkonstante aber um $n\,{}^0/_0$ geändert, so ändern sich die Temperaturen nur um $\frac{n}{4}\,{}^0/_0$; ein Betrag, der gegenüber dem Umstande, daß wir die thermodynamischen Absorptionskoeffizienten nur unvollkommen kennen (§ 1), nicht in Betracht kommt. Mit weit geringerer Ungenauigkeit kann die aufsteigende Strahlung A_2, da bei den tiefen Temperaturen $\frac{dE_\lambda}{dT}$ klein ist, mit einem mittleren k_2 behandelt werden.

Wir schreiben dementsprechend die beiden Hauptgleichungen (§ 2) in der Form

$$\frac{dB}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_1 E_1 + k_2 E_2$$

$$\frac{dA}{dm} = k_1 A_1 + k_2 A_2 - k_1 E_1 - k_2 E_2$$

und die Bedingungsgleichung für Strahlungsgleichgewicht:

$$2(k_1 E_1 + k_2 E_2) = k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_1 A_1 + k_2 A_2$$

folgern wieder

$$\frac{dB}{dm} - \frac{dA}{dm} = 0, \qquad B - A = \text{const} = 2\gamma$$

und

$$\frac{dB}{dm} + \frac{dA}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_1 A_1 + k_2 A_2$$

und erhalten aus beiden Gleichungen:

$$73) \quad 2\frac{dB}{dm} = 2\frac{dA}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_1 A_1 + k_2 A_2.$$

Gemäß unseren vereinfachenden Voraussetzungen vernachlässigen wir A_1 gegen A_2, ebenso $k_1 A_1$ gegen $k_2 A_2$, was um so mehr gestattet ist, als nicht nur A_1 klein gegen A_2 ist, sondern sich auch k_1 klein gegen k_2 ergeben wird, und erhalten

$$74) \quad 2\frac{dB}{dm} = 2\frac{dA}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_2 A_2$$

nebst

$$B_1 + B_2 - A_2 = 2\gamma$$

und daraus

$$75) \quad \begin{aligned} \frac{dB}{dm} &= \frac{k_2 - k_1}{2} B_1 - k_2 \gamma \\ \frac{dA}{dm} &= \frac{k_2 - k_1}{2} B_1 - k_2 \gamma. \end{aligned}$$

Wären k_1 und k_2 unabhängig von m, so könnten wir unmittelbar integrieren. Allein die Absorptionsverhältnisse der Atmosphäre sind in erster Linie durch ihren Gehalt an Wasserdampf bedingt. Wir setzen mangels besserer experimenteller Unterlagen die Absorptionskoeffizienten jeder Schicht proportional ihrem Gehalt an Wasserdampf, solange dieser nicht unter einen zu geringen Prozentsatz heruntergeht, und haben in erster Linie diesen als Funktion von m zu ermitteln.

Es hat sich gezeigt[1]), daß die Abnahme der Dichte des Wasserdampfes mit der Höhe mit einer für unsere Zwecke genügenden Genauigkeit bis in Höhen von etwa 8 km (soweit liegen Messungen vor) dargestellt werden kann durch die Beziehung

[1]) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, S. 170. Leipzig 1906.

$$f = f_0 \, 10^{-\frac{h}{6000}}.$$

Wir haben f auszudrücken als Funktion der über h liegenden Luftmasse m. Da die Dichte mit genügender Genauigkeit zu $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{h}{8000}}$ angesetzt werden kann, ergibt sich

$$m = M e^{-\frac{h}{8000}} = M \, 10^{-\frac{h}{18400}}$$

und daraus die Menge w des Wasserdampfes über h und dessen Dichte f

76) $$w = W\left(\frac{m}{M}\right)^3; \qquad f = f_0\left(\frac{m}{M}\right)^3.$$

Die Masse M der Erdatmosphäre werden wir weiterhin $= 1$ setzen. Den Absorptionskoeffizienten jeder Schicht setzen wir proportional f, also

$$k = b\, m^3$$

und bestimmen b gemäß dem Absorptionsvermögen der Atmosphäre unter mittleren Bedingungen. Dit Strahlung J_0 wird beim Durchlaufen der ganzen Atmosphäre, $M = 1$, geschwächt auf den Betrag

$$J = J_0 e^{-\int_0^1 b\, m^3\, dm} = J_0 e^{-\frac{b}{4}}$$

und entsprechend dem Transmissionsvermögen der Atmosphäre 0,9 für die kurzwellige Sonnenstrahlung und 0,1 für die langwellige Erdstrahlung (vgl. § 1) erhalten wir

$$\frac{b_1}{4} = 0{,}1 \quad \text{und} \quad \frac{b_2}{4} = 2{,}3$$

und somit

77) $$k_1 = b_1 m^3 = 0{,}4\, m^3$$
$$k_2 = b_2 m^3 = 9{,}2\, m^3.$$

So unsicher diese Werte ihrer absoluten Größe nach auch sein mögen, reichen sie für unseren Zweck aus, da es in erster Linie nur auf das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ ankommen wird.

Wir sind nun in der Lage, das in Gleichungen (75) auftretende B_1 zu bestimmen. Dies ist der Wert der von der Sonne zugestrahlten, gleichmäßig über die Erde verteilten Sonnenstrahlung im Niveau m. Bezeichnen wir mit σ den vierten Teil der Solarkonstanten, nach Abzug der Albedo, $\sigma = \frac{2.0,63}{4} = \frac{0,315 \text{ Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$ (vgl. oben § 1), so erhalten wir

$$B_1 = \sigma e^{-\int\limits_0^m b_1 m^3 dm} = \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4}$$

und die Gleichungen (75) werden

78)
$$\frac{dB}{dm} = \sigma \frac{b_2 - b_1}{2} m^3 e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - b_2 m^3 \gamma$$
$$\frac{dA}{dm} = \sigma \frac{b_2 - b_1}{2} m^3 e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - b_2 m^3 \gamma .$$

Wir integrieren und erhalten

79)
$$B = -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma + C_B$$
$$A = -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma + C_A .$$

Die Integrationskonstante C_B bestimmen wir aus der Bedingung $B = B_1 = \sigma$ für $m = 0$, und C_A aus der Bedingung $\overline{B} - \overline{A} = \text{const} = 2\gamma = \overline{B} - \overline{A} = \sigma - C_A$ und erhalten schließlich

80)
$$B = -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma \left(1 - e^{-\frac{b_1}{4} m^4}\right) + \sigma - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma$$
$$A = -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma \left(1 - e^{-\frac{b_1}{4} m^4}\right) + \sigma - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma - 2\gamma .$$

Wir spezialisieren gleich auf den mittleren Zustand der Atmosphäre; er ist bedingt durch die Wärmebilanz Null, d. h. zugestrahlte und ausgestrahlte Mengen sind sich gleich; $\overline{B} - \overline{A} = 2\gamma = 0$, und wir erhalten

$$B = A = \frac{b_2 - b_1}{2\,b_1}\,\sigma\left(1 - e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right) + \sigma$$
81)
$$= \sigma\left\{\frac{b_2 + b_1}{2\,b_1} - \frac{b_2 - b_1}{2\,b_1}\,e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right\}.$$

Um die Temperatur der Atmosphäre in der Stelle m zu bestimmen, gehen wir aus von der Bedingungsgleichung für Strahlungsgleichgewicht:

$$2\,\{k_1 E_1 + k_2 E_2\} = k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_2 A_2.$$

Da E_1 sehr klein gegen E_2 ist, können wir die linke Seite gleich $2\,\{k_2 E_1 + k_2 E_2\} = 2\,k_2 E$ setzen. Die rechte Seite wird mit Rücksicht auf (74) gleich

$$2\left(k_2 A_2 - \frac{dB}{dm}\right) = 2\left(k_2 A - \frac{dB}{dm}\right),$$

und benützen wir die entwickelten Ausdrücke für A, $\frac{dB}{dm}$ und k_2, so erhalten wir

82) $$E = \sigma \cdot \frac{b_1 + b_2}{2\,b_1\,b_2} \cdot \left[b_2 - (b_2 - b_1)\,e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right].$$

Da aber $E = s\,T^4$, $\sigma = s\,\tau^4$, $\tau = 254^0 =$ effektive Erdtemperatur, ergibt sich schließlich

83) $$T^4 = \tau^4\,\frac{b_1 + b_2}{2\,b_1\,b_2}\left[b_2 - (b_2 - b_1)\,e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right], \qquad \tau = 254^0 \text{ abs.}$$

Da bei dem ermittelten Werte von b_1 der Maximalwert von $\frac{b_1}{4}\,m^4 = 0{,}1$ ist, können wir mit längst genügender Genauigkeit schreiben

84) $$B = A = \sigma\left[1 + (b_2 - b_1)\,\frac{m^4}{8}\right]$$

85) $$T^4 = \tau^4\,\frac{b_1 + b_2}{2\,b_2}\left[1 + (b_2 - b_1)\,\frac{m^4}{4}\right].$$

Für k_1 und k_2 konstant, also unabhängig von m, hätte sich ergeben

84 a) $$B = A = \sigma \left[\frac{k_2 + k_1}{2 k_1} - \frac{k_2 - k_1}{2 k_1} e^{-k_1 m}\right]$$

85 a) $$T^4 = \tau^4 \frac{k_1 + k_2}{2 k_1 k_2} \left[k_2 - (k_2 - k_1) e^{-k_1 m}\right]$$

und für $k_2 = k_1$, graue Strahlung, $T = \tau$, also Isothermie von der effektiven Erdtemperatur. Dieselbe Isothermie würde sich auch für $b_1 = b_2$ ergeben. Vgl. oben S. 79.

Anwendung der gewonnenen Beziehungen. Gleichung (81) zeigt, daß durch die ganze Atmosphäre hindurch die Strahlungen B und A sich gleich sind. Eine Platte, die in der Atmosphäre in beliebiger Höhe horizontal aufgestellt wird, erhält durchschnittlich (d. h. im Laufe eines Jahres) auf beiden Seiten gleiche Wärmemengen zugestrahlt.

An der oberen Grenze der Atmosphäre ist $m = 0$. Wir erhalten hier $B = A = \sigma$ und

86) $$T = 254^0 \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{b_1}{b_2}}{2}} = 254^0 \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{k_1}{k_2}}{2}}.$$

In diesen obersten Schichten wird der Wasserdampf in so außerordentlich geringer Dichtigkeit vorhanden sein, daß von einer besonderen Absorption desselben nicht mehr gesprochen werden kann und die Gleichungen (77) ihre Bedeutung verlieren. (Die Absorption gleicher, durchstrahlter Massen nimmt mit zunehmender Dichte ab.) Da wir das verschiedene Verhalten der Atmosphäre in Übereinstimmung mit den Beobachtungen dem Gehalt an Wasserdampf zuschrieben, ist es angezeigt, diesen Unterschied mit verschwindendem Wasserdampfgehalt verschwinden zu lassen. Wir machen deshalb die Annahme, daß in den höchsten Schichten k_1 und k_2 einem gemeinschaftlichen, kleinen Werte k zustreben, so daß wir erhalten

$$T = 254^0 = -19^0 \text{ C} = \tau,$$

d. h. die Temperatur der höchsten Schichten der Atmosphäre ist gleich der effektiven Erdtemperatur.

Gehen wir in die Tiefe, so bleiben B und $A = \sigma$, so lange $e^{-k_1 m}$ gleich 1 gesetzt werden kann. In 11 km Höhe, etwa der unteren Grenze der Stratosphäre entsprechend, ist m rund $\frac{1}{4}$; k_1 ist aber bedeutend kleiner als 0,1 zu setzen, da dieser Wert mit Berücksichtigung der tiefen, besonders wasserdampfhaltigen Schichten gewonnen wurde. Dazu kommt, daß in dem Maße, wie in die Tiefe gegangen wird, allmählich die Gleichungen (77) zur Wirkung gelangen und die Exponentialfunktion in einer höheren Potenz abnimmt. Bis in diese Tiefe etwa können wir deshalb von einer thermodynamischen Absorption der kurzwelligen Strahlung absehen und in Gleichung (81—84) $B = A = \sigma$ annehmen. Nun sind aber die Gleichungen (83) und (85) gewonnen, indem die Absorptionskoeffizienten nach Gleichung (77) variabel angenommen wurden. In höheren Niveaus gelten diese Beziehungen nicht mehr und die k ändern sich nach anderen unbekannten Gesetzen. Teilen wir aber die Atmosphäre in Schichten von so geringer Mächtigkeit, daß wir in jeder k_1 und k_2 als konstant annehmen können, so gilt für jede Schichte die Gleichung (85a) und zwar mit demselben Werte von τ, da B hier oben, wie auseinandergesetzt, genügend konstant ist. Die Temperatur jeder Schicht oberhalb etwa 11 km bestimmt sich deshalb zu

86) $$T = 254^0 \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{k_1}{k_2}}{2}}$$

und ist nur bestimmt durch das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$, das in den höchsten Schichten den Wert 1 hat, um mit zunehmender Tiefe allmählich den Wert $\frac{1}{23}$ anzunehmen (Gleichung 77). Wir erhalten für verschiedene Werte dieses Verhältnisses folgende Temperaturen

$\frac{k_1}{k_2}$	T	
1	254°	= — 19° C
$\frac{1}{2}$	238°	= — 35° C
$\frac{1}{5}$	224°	= — 49° C
$\frac{1}{10}$	219°	= — 54° C
$\frac{1}{23}$	215,87°	= — 57,23° C
0	213,7°	= — 59,3° C.

Gehen wir von den oberen Grenzen der Atmosphäre h in die Tiefe, so nimmt, solange $e^{-k_1 m}$ gleich 1 gesetzt werden kann, in dem Maße, wie mit zunehmender Menge des Wasserdampfes seine Eigenschaft, langwellige Strahlung stärker zu absorbieren wie kurzwellige Strahlung, zur Geltung kommt, die Temperatur ab, um einem Minimalwerte $T = 213{,}7^0 = -59{,}3^0$ zuzustreben.

Die Temperaturen der unteren Schichten der Stratosphäre bestimmen sich demnach durch ihren Gehalt an Wasserdampf. Die Menge desselben ist in dieser Höhe von 9—11 km gering; allein, daß sie hinreicht optisch bereits stark zur Wirkung zu gelangen, zeigen die Zirruswolken, die gerade in dieser Höhe aufzutreten pflegen. Auch andere Wolkenformen können hier noch beobachtet werden[1]). Maßgebende, für seine Temperatur bestimmende Wirkung ist aber nicht sein Absorptionsvermögen, sondern lediglich das Verhältnis $k_1 : k_2$. Würden die Gleichungen (77) hier oben bereits voll gelten, so ergäbe sich $T = -57{,}2^0$ C, bei dem Verhältnis $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{10}$ (statt $\frac{1}{23}$) $T = -54^0$ C. Diese Temperaturen fallen mit den wirklich beobachteten Temperaturen der Stratosphäre zusammen. Die entwickelte Strahlungstheorie zeigt ferner in Übereinstimmung mit der Beobachtung, daß mit wachsender Höhe die Temperaturen der Stratosphäre in dem Maße,

[1]) J. Hann, Lehrbuch d. Meteorol., 2. Aufl.. S. 207 u. f. Leipzig 1906.

wie der Wasserdampf an Masse und Dichte abnimmt, langsam zunehmen. Als tiefste mögliche Temperatur ergibt sich $-59{,}3^0$; tiefere Temperaturen sind unmöglich Folge des Strahlungsprozesses, sondern resultieren durch adiabatische Abkühlung der vor nicht zu langer Zeit als Ganzes gehobenen Stratosphäre.

Die Temperatur $T = \tau \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2\;3}}{2}}$, die „Inversionstemperatur“ bezeichnen wir im folgenden mit T_i.

Gehen wir, von Konvektion absehend, von der unteren Grenze der Stratosphäre, der Höhe von 9—11 km etwa, weiter in die Tiefe, so gelangt in den Gleichungen (81—85) das Glied mit m zur Wirkung und die Temperatur steigt. Um die Temperatur der untersten atmosphärischen Schicht, T_0, zu erhalten, haben wir in Gleichung (83) $m = 1$ zu setzen und erhalten

87) $$T_0 = T_i \sqrt[4]{1 + 2{,}2} = 288{,}8^0 = +15{,}8^0\,C,$$

also außerordentlich nahe der durch Beobachtungen erhaltenen, mittleren Temperatur[1]) von $14{,}4^0$ C.

Wir bestimmen weiter die Temperatur der Erdoberfläche. Die untere Begrenzung der Atmosphäre wird von zwei Energieströmen B und A durchsetzt, die sich nach Gleichung (84) zu

88) $$B = A = s \cdot 254^4\,(1 + 1{,}1)$$

bemessen. Die Erdoberfläche wird von der Strahlung B getroffen und durch Erwärmung befähigt, die Strahlung A emporzusenden. Das Reflexionsvermögen der Erde für diffuse, kurzwellige Strahlung ist sehr gering, nach Abbot und Fowle (loc. cit., S. 161) im Maximum 8 %, welche Größe bei Bildung der Albedo bereits berücksichtigt ist. Eine Änderung der ausgesandten Strahlung um 8 % würde nur eine Änderung von 2 % der Temperatur erfordern. In Bezug auf die Erwärmung nehmen wir B als graue Strahlung an, der gegenüber die Erdoberfläche sich auf Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes

[1]) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 2. Aufl., S. 115. Leipzig 1906.

einstellt. Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen spielen dann keine Temperatur bestimmende Rolle (vgl. oben S. 78) und wir erhalten

$$T_{\text{Erde}} = 254^0 \sqrt[4]{2{,}2} = 309^0 = +36^0. \tag{89}$$

An der Berührungsfläche Atmosphäre und Erde ergibt sich somit ein Temperatursprung von 20° C, der in Wirklichkeit durch äußere Wärmeleitung stark herabgesetzt wird, namentlich auf Wasser, wo der Wasserdampf mit der Temperatur der Oberfläche in die Atmosphäre übertritt. Auch diese Strahlungstemperatur der Erdoberfläche hat einen durchaus annehmbaren Wert.

Wir untersuchen die Stabilität der Atmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht. Dazu haben wir aus Gleichung (83) die Temperaturgradienten zu bilden. Für jeden Gleichgewichtszustand gilt $dp = g\varrho\, dz$, was wir mit Hilfe der Zustandsgleichung $p = g\varrho R T$ auch schreiben können $\frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT}$. In Gleichung (85) ersetzen wir die über einem bestimmten Niveau liegende Masse m durch den hier herrschenden Wert des Druckes $p = gm$ und erhalten durch Differentiation leicht die Beziehungen

$$\begin{gathered} \frac{T^3\, dT}{T^4 - T_i^4} = \frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT} \\ \frac{dT}{dz} = \frac{1}{R}\, \frac{T^4 - T_i^4}{T^4}. \end{gathered} \tag{90}$$

Damit Stabilität herrscht, muß sein (vgl. oben S. 75).

$$\frac{dT}{dz} < \frac{1}{R}\, \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = < \frac{1}{R}\, \frac{2}{7},$$

wenn wir für atmosphärische Luft $= \frac{7}{5} = 1{,}40$ ansetzen. In Verbindung mit Gleichung (90) sehen wir: *Befindet sich die Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht, so sind nur jene Schichten in einem mechanisch stabilen Gleichgewicht, für welche*

91) $$T < T_i \sqrt[4]{\frac{5}{7}}, \text{ d. i. } < 234{,}8^0 = -38{,}2^0 \text{ C.}$$

Das Gleichgewicht der höher temperierten, tiefer liegenden Schichten ist instabil; die Instabilität nimmt mit wachsender Tiefe zu.

Um den Zusammenhang zwischen Temperatur und Höhe zu erhalten, integrieren wir Gleichung (90), nachdem wir an Stelle der abwärts gerichteten z-Achse die Höhe h, $dz = -dh$, eingeführt haben, und erhalten

$$\text{const} - \frac{h}{R} = \frac{T_i}{4}\left[4\frac{T}{T_i} + \lg\frac{T - T_i}{T + T_i} - 2 \operatorname{arctg}\frac{T}{T_i}\right]$$

und bestimmen wir die Integrationskonstante, daß für $h = 0$ sich $T = T_0$ ergibt, so folgt schließlich

92) $$h = \frac{R T_i}{4}\left[4\frac{T_0 - T}{T_i} + \lg\frac{T_0 - T_i}{T_0 + T_i}\cdot\frac{T + T_i}{T - T_i} - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{T_0 - T}{T_i + \frac{T \cdot T_0}{T_i}}\right)\right].$$

Daraus berechnet sich folgende kleine Tabelle:

T	$-\frac{dT}{dh}$	h_{met}
215,87 = − 57,43⁰ C	0	∞
216,0 = − 57⁰ C	0,000081	11500
216,1 = − 56,9⁰ C	0,00014	10530
216,2 = − 56,8 C⁰	0,00021	9960
216,3 = − 56,7⁰ C	0,00029	9540
220 = − 53⁰ C	0,00249	5830
230 = − 43⁰ C	0,00765	3770
234,82 = − 38,28⁰ C	0,0098	3130
240 = − 33⁰ C	0,0118	2730
250 = − 23⁰ C	0,0152	1990
260 = − 13⁰ C	0,0178	1380
270 = − 3⁰ C	0,0202	860
280 = + 7⁰ C	0,0221	386
288,8 = + 15,8 C	0,0235	0

Gleichung (92) liefert selbstverständlich die Temperatur T_i für $m = 0$, also $h = \infty$. Wir haben aber bereits ausgeführt,

daß die Gleichung (77) und somit die Gleichung (85) nur bis in Höhen gelten, in welchen der Wasserdampf noch genügend zur Wirkung gelangt. Die Zahlen dieser Tabelle gelten deshalb nur bis in Höhen von 9—11 km, wo wir die untere Grenze und die Temperatur der Stratosphäre erreichen. Nach oben zu nehmen mit abnehmendem Wasserdampfgehalt die Temperaturen langsam zu, gemäß der Tabelle S. 109, um für $h = \infty$ gleich der effektiven Erdtemperatur zu werden. In der Troposphäre in die Tiefe gehend treffen wir, bei stabilen Gradienten, steigende Temperaturen an (die m enthaltenden Faktoren kommen zur Geltung), bis in einer Höhe von 3130 m die kritische Temperatur 234,82° und ein indifferenter Gradient auftritt. Das Gleichgewicht der tiefer liegenden Schichten ist instabil; die Temperaturen und die Instabilität nehmen nach unten immer rascher zu.

Dieser Untersuchung des mechanischen Gleichgewichtes war trockene Luft zu Grunde gelegt. In einer feuchten Atmosphäre können bereits kleinere Gradienten wie $1^0 : 100^m$ Instabilität ergeben, letztere in größere Höhen hinaufreichen. Allein bei diesen tiefen Temperaturen kann mit genügender Genauigkeit hievon abgesehen werden.

In Höhen unterhalb rund 3000 m wird deshalb Strahlungsgleichgewicht nicht von Bestand sein. Durch Abkühlung von oben werden, selbst bei mäßiger Bodentemperatur, sich namentlich in den unteren Partien Temperaturgradienten größer wie 1° auf 100 m ausbilden, und Konvektionsströme werden das Auftreten der tiefen Temperaturen der Tabelle verhindern. Wir nehmen an, diese Konvektionsströme erstrecken sich bis in die Höhe h. Dadurch wird die Strahlung B, welche das Niveau h von oben durchsetzt, nicht geändert. Es muß deshalb infolge der Wärmebilanz Null derselbe Energiestrom $A = B$ in Form langwelliger Strahlung von unten in die über h liegenden Schichten zurückgestrahlt werden. Die Instabilität mit ihren Folgen vermag deshalb die Strahlungs-

temperaturen der von den Konvektionsströmen nicht mehr erreichten Schichten nicht zu ändern. Auch die Konvektionsströme der langen Zykeln[1]), die an Hoch- und Tiefdruckgebiete gebunden sind, können aus demselben Grunde Strahlungstemperaturen nur ändern, soweit sie emporreichen. Die Temperaturgradienten nahezu Null der Stratosphäre zeigen ein höher liegendes Niveau an. Die gegenüber der Tabelle S. 112 geänderte Massen- und Temperaturanordnung der Troposphäre ist deshalb ohne Einfluß auf die berechneten Temperaturen der Stratosphäre. Dies gilt selbstverständlich nicht mehr für die Bodentemperatur der Atmosphäre und die Temperatur des Erdbodens. Mit geänderter Temperatur und Massenordnung ändern sich Absorption und Emission jeder Schicht, kurz gesagt, der innere Strahlungsprozeß und damit die Strahlungen B und A am Grunde der Atmosphäre. Dabei bleibt der kurzwellige Anteil B_1 ungeändert, denn seine Absorption ist nach unseren Voraussetzungen lediglich abhängig von der durchstrahlten, optischen Masse, unabhängig von ihrer Anordnung; allein mit anderer Massenverteilung ändert sich der Anteil B_2, den die erwärmten Luftmassen nach unten liefern. Beachtet man aber, daß diese Änderung von B_2 zurücktritt gegen den Wert von B_2 und B_1, sowie daß die Temperaturen sich ändern wie $\sqrt[4]{B}$, so werden die berechneten Werte von T_0 und T_{Erde} sich nur wenig ändern.

In einer unbewegten Atmosphäre („Strahlungswetter“) würde in den untersten 3000 m durch den Strahlungsprozeß allein sich eine ganz außerordentlich instabile Temperatur- und Massenanordnung einstellen, die sich in den bekannten Erscheinungen der kurzen Zykeln auflösen muß. Die Ausbildung instabiler Atmosphäre bei diesen Wetterlagen wird in erster Linie der Ausbildung von Konvektionsströmen über dem stark erhitzten Erdboden, der Heizung von unten zugeschrieben. Die Theorie der Strahlung zeigt, daß auch Abkühlung von

[1]) R. Emden, Gaskugeln, S. 363 f. Leipzig 1907.

oben wirksam sein kann, denn die Temperaturen in Höhen von 2000—4000 m, denen die Luftmassen durch den Strahlungsprozeß zustreben, sind, wie die Tabelle zeigt, ganz außerordentlich tief. Die Instabilität durch Konvektion ist notwendig mit einer Temperatursteigerung bis in Höben verbunden, in welche die Konvektionsströme noch emporreichen, denn infolge ihrer geringen, kinetischen Energie können diese nur in kältere Luftschicbten eintreten. Instabilität durch Abkühlung von oben infolge Ausstrahlung kann die tiefen Temperaturen der Höhe liefern, welche der Cirrusschirm vor Ausbruch eines Wärmegewitters anzeigt und die bei Hagelfällen vorhanden sein müssen. Sie erklärt ferner die Bildung instabiler Atmospbären über den Meeren der Roßbreiten, diesen Gürteln maximaler Gewitterhäufigkeit und über den Meeren der Tropen, den Geburtsstätten der tropischen Zyklonen, also in Regionen, wo die Konstanz der Temperatur der Meeresoberfläche und die geringe Temperaturdifferenz gegen die auflagernde Atmosphäre Überhitzung von unten nicht zuläßt. Und die bekannte Tatsache, daß die Gewitter über den Meeren in größter Häufigkeit sich in der zweiten Hälfte der Nacht einstellen, findet ihre Erklärung durch die tiefen Temperaturen, die sich in der Höhe namentlich durch nächtliche Ausstrahlung einstellen können. Die Strahlungstheorie liefert so tiefe Temperaturen und Instabilitäten von solcber Intensität, daß die Wolkenkunde und die dynamische Meteorologie Strahlungsvorgängen mehr Beachtung schenken muß, wie bisher.

Überblicken wir in Kürze die Unterlagen und Ergebnisse der entwickelten Theorie. Würde die von der Sonne zugestrablte Energie im Betrage von $2\,\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$ gleichmäßig über die Oberfläche der festen, ihrer Atmosphäre beraubten Erdoberfläche verteilt, so würde, graue Strahlung vorausgesetzt, diese sich unabhängig von ihrem Emissions-(Absorptions-) Vermögen auf die Temperatur eines Strahlungsgleichgewichtes im Betrage $T = 285^0 = 12^0$ C einstellen. Wird mit Rücksicht auf die Albedo der Erde der Zufluß an Strahlung

um $37\,^0/_0$ vermindert, so erniedrigt sich diese Temperatur auf $T = 254^0 = -19^0$ C. Diese Temperatur bezeichneten wir als effektive Erdtemperatur. Überdecken wir nun die Erde mit einer beliebigen Atmosphäre, so stellt sich diese, mag sie schichtweise beliebig arm oder reich an Wasserdampf sein, beliebig schwach oder stark absorbieren, bei Strahlungsgleichgewicht mit ihrer Unterlage isotherm auf die effektive Erdtemperatur $T = 254^0 = -19^0$ C ein (Übereinstimmung mit Gold), falls nur graue Strahlung beibehalten, d. h. ihr Absorptionsvermögen für alle Wellenlängen von gleicher, aber beliebiger Größe angenommen wird. Gehen wir auf das Verhalten in einzelnen Wellenlängen ein, so werden wir auf eine Integralgleichung geführt, die sich, namentlich mangels der nötigen physikalischen Daten, nicht auswerten läßt. Wir haben deshalb einen Mittelweg eingeschlagen, der Art, daß wir die kurzwellige Zustrahlung der Sonne und die langwellige Rückstrahlung der Atmosphäre jede für sich zusammensetzten zu einer Strahlung, die als grau, aber mit anderem Absorptionskoeffizienten, behandelt wurden. Dabei wurde die Absorption (Emission) jeder atmosphärischen Schicht proportional ihrem Gehalt an Wasserdampf gesetzt, klein für die auffallende, kurzwellige, groß für die rückkehrende, langwellige Strahlung, nur bei sehr geringem Gehalt an Wasserdampf sich einem gemeinschaftlichen, sehr kleinen Werte nähernd. Auf dieser Grundlage ergab sich folgendes: Oberhalb eines Niveaus, bis zu dem hinabsteigend die einfallende Strahlung nur wenig geschwächt wird, ist die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes jeder Schicht lediglich bestimmt durch das Verhältnis, in welchem ihr Gehalt an Wasserdampf kurzwellige und langwellige Strahlung absorbiert, unabhängig von den absoluten Werten. Für den Wert 0 dieses Verhältnisses ergibt sich die Minimaltemperatur, die bei Strahlungsgleichgewicht eintreten kann, $\sqrt[4]{2}$ mal kleiner als die effektive Erdtemperatur, also $213{,}7 = -59{,}3^0$ C. Für mittlere Feuchtigkeitsverhältnisse haben wir dies Verhältnis zu $\frac{1}{23}$ abschätzen können, was zu einer Temperatur von -57^0

führt; der Wert $\frac{1}{10}$ würde -54^0 ergeben. Dies sind die bekannten Temperaturen der Stratosphäre. In die Höhe steigend nimmt mit abnehmendem Wasserdampfgehalt das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ zu, die Temperaturen steigen, um für dessen Wert 1 gleich der effektiven Erdtemperatur zu werden. Sind die höchsten Schichten der Atmosphäre, wie zu vermuten, hinreichend arm an Wasserdampf, so sind sie entgegen vielfach verbreiteten Anschauungen nicht durch tiefe Temperaturen ausgezeichnet, sondern befinden sich durchwegs auf der Temperatur -19^0 C. Die Atmosphäre geht auf dieser Temperatur isotherm mit wachsender Verdünnung durch Zustände, die wir mangels physikalischer Kenntnisse nicht näher behandeln können, in den sogenannten leeren Weltenraum über. Gehen wir anderseits in die Tiefe, so nehmen mit wachsender Absorption die Temperaturen ebenfalls zu. Da aber nun die absoluten Werte des Absorptionsvermögens des Wasserdampfes für kurzwellig und langwellig zur Wirkung kommen, sind die berechneten Temperaturen wesentlich unsicherer. Doch gelang es in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung, die Temperaturen der Bodenschichten der Atmosphäre zu $+15{,}8^0$ C zu berechnen. Dabei ergab sich das wichtige Resultat, daß von etwa 3000 m an abwärts die Atmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht mechanisch instabil gebaut ist. Konvektion wird die berechneten Temperaturen weit hinauf verdecken, doch vermag sie die Temperatur oberhalb ihres Bereiches nicht, die Temperaturen der Bodenschichten nur wenig zu ändern.

Nun ist aber bekanntlich die Atmosphäre unterhalb einer durchschnittlichen Höhe von etwa 10 km in vertikaler Richtung beinahe stets durchsetzt von den Konvektionsströmen der langen Zykeln, den charakteristischen Erscheinungen der Hoch- und Tiefdruckgebiete, sowie jenen Konvektionsströmen, in welchen die allgemeine atmosphärische Zirkulation klar in Erscheinung tritt. Für diese gilt aus denselben Gründen, was oben S. 114 dargelegt wurde. Die Strahlungstemperaturen

oberhalb des angegebenen Niveaus werden nicht, die der Bodenschichten wenig beeinflußt. Oberhalb dieses Niveaus ist aber die Absorption der einfallenden Strahlung so gering, daß die Temperaturen nach der kleinen Tabelle S. 109 berechnet werden können. Wir erhalten also mit jeder wünschenswerten Genauigkeit die durch Beobachtung ermittelten Temperaturen der Stratosphäre als Temperaturen des Strahlungsgleichgewichtes dieser Schichten, bestimmt durch das Verhältnis, in welchem ihr Wasserdampfgehalt kurzwellige und langwellige Strahlung absorbiert. Die Strahlungstheorie liefert mit jeder wünschenswerten Genauigkeit die Temperaturen der Stratosphäre. Sie gibt vollständigen Aufschluß über die thermische Unstetigkeit, die mit der mechanischen Unstetigkeit bei der Scheidung der Atmosphäre in Troposphäre und Stratosphäre verbunden ist. Diese mechanische Unstetigkeit selbst vermag die entwickelte Strahlungstheorie vorerst nicht zu begründen; doch scheint die Möglichkeit einer Begründung nicht ausgeschlossen. Dies einzusehen machen wir uns erst den Unterschied klar zwischen unseren Ergebnissen und dem zweiten Resultate von Gold (vgl. oben S. 94). Graue Strahlung vorausgesetzt, wie bei Gold, wird die Atmosphäre stets, mag die Absorption beliebige Funktion der Höhe sein, durch Strahlung stabil angeordnet. Von einem konvektiven Zustande ausgehend kann wohl vorübergehend bei $m = \frac{M}{4}$ eine Scheidung der Atmosphäre bewirkt werden, so daß in der unteren Partie Konvektionsströme ausgelöst werden. Aber das Endprodukt ist stets Stabilität, bei der Wärmebilanz Null Isothermie. Im Gegensatze zeigt unsere Theorie, daß durch Strahlung allein in den untersten 3 km der Atmosphäre dauernd Instabilität erzeugt wird, in den tiefsten Partien von sehr großer Intensität, so daß eine dauernde Ursache von Konvektionsströmen vorhanden ist. In einer nicht durch die allgemeine Zirkulation beeinflußten Atmosphäre muß deshalb durch Strahlung allein eine Trennung entsprechend der Troposphäre und Stratosphäre eintreten in einer Höhe, bis zu

welcher die auftretenden Konvektionsströme emporreichen. Diese Höhe wäre durch die Bedingung gegeben, daß die unterhalb liegenden, durch Konvektion durchmischten Schichten ebensoviel Strahlung emporsenden, wie bei Strahlungsgleichgewicht; und es müßte gezeigt werden, daß die Instabilität Konvektionsströme bis in diese Höhe hinauftreiben kann. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich eine annehmbare Höhe ergeben wird. Allein selbst dann wäre es unsicher und bedenklich, die Teilung der Atmosphäre diesen Strahlungsvorgängen zuzuschreiben. Denn die allgemeine Zirkulation kann die Strahlung an Temperatur bestimmender Wirkung übertreffen; und im folgenden Paragraphen werden wir darlegen, daß bereits die Luftmassen mittlerer Breiten ihr Strahlungsvermögen nicht an Ort und Stelle, sondern namentlich im Winter in äquatorialen Gebieten empfangen und uns von dort zugeführt haben. Auf alle Fälle aber verdient die aufgedeckte Instabilität eingehende Beachtung, namentlich in ihrer Wirkung in Gebieten und zu Zeiten, die durch „Strahlungswetter" ausgezeichnet sind.

Die berechneten Temperaturen sind proportional der effektiven Erdtemperatur, deren 4. Potenz durch die Solarkonstante und die Albedo der Erde bestimmt werden. Erstere Größe ist mit genügender Genauigkeit gemessen; eine Änderung der Albedo um 10% ihres Wertes würde die effektive Erdtemperatur um rund $4^1/_2{}^0$, die Inversionstemperatur und damit die Temperaturen der Stratosphäre um rund $3^1/_2{}^0$ ändern. Die Übereinstimmung mit der Beobachtung wäre noch immer vorzüglich, namentlich wenn wir bedenken, daß wir zu tiefe Temperaturen durch Abnahme des Wasserdampfgehaltes der Stratosphäre kompensieren können. Bedenklicher erscheint die Vereinfachung, die darin besteht, daß wir den Energiezufluß gleichmäßig über die ganze Erdoberfläche ausbreiteten, wodurch diese (Albedo = 0,37) pro Quadratzentimeter $\frac{2.0,63}{4} = 0,315 \frac{\text{Grammkal}}{\text{min}}$ erhält, was zu der effektiven Erdtemperatur

von $254^0 = -19^0$ C führte. Denn die Jahressumme der Sonnenstrahlung beträgt für den 50. Breitekreis nur 70%, für den Pol nur 42% des Wertes am Äquator. Selbst wenn wir von den Polarkalotten absehen, würden die höheren Breiten bei der angenommenen Verteilung, falls nur die geometrischen Verhältnisse der Bestrahlung für die Temperaturbestimmung maßgebend wären, zu viel erhalten. Allein daß es nicht angängig ist, effektive Erdtemperaturen für die verschiedenen Breitenkreise gemäß ihrer Bestrahlung einzuführen, zeigt sofort der Versuch, auch den Einfluß der Jahreszeiten zu berücksichtigen. So erhält der 50. Breitekreis im Sommerhalbjahr Sonnentrahlung im Betrage von 183, im Winterhalbjahr von 67 Äquatorialtagen[1]; für den 60. Breitekreis ergeben sich 169,5 und 38 Einheiten. Die effektiven Erdtemperaturen (und die diesen proportionalen, berechneten Strahlungstemperaturen) müßten sich verhalten wie die 4. Wurzeln; für den 50. Breitekreis wie 1 : 1,25, für den 60. Breitekreis wie 1 : 1,45. Die Sommer- und Wintertemperaturen dieser Breitenkreise sind $291,1^0$ ($+ 18,1^0$ C) und 266^0 ($- 7^0$ C) resp. 287^0 ($+ 14^0$ C) und $257,2^0$ ($- 15,8^0$ C), verhalten sich also nur wie 1 : 1,09 resp. 1 : 1,12. Die Temperaturen der höheren Breiten werden sonach nicht durch Sonnenstrahlung an Ort und Stelle erzeugt. Die Sonnenstrahlung bedingt wohl die mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche als Ganzes: ihre Veränderung mit der Breite nud die jahreszeitlichen Abweichungen vom Mittelwert werden noch durch andere Faktoren erzwungen. Die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre schafft durch Transport höher temperierter Luftmassen Entropiemengen nach höheren Breiten, und in demselben Maße, wie sie Ausgleich der Temperaturen im Wechsel der Jahreszeiten reguliert, besorgt sie auch die gleichmäßige Verteilung der Sonnenstrahlung, die unserer Theorie zu Grunde liegt. Die Temperaturen der tieferen Schichten der Stratosphäre werden aber durch die Strahlung der tieferen Schichten der Troposphäre mitbedingt (wir würden

[1]) J. Hann, Handbuch der Klimatologie, Bd. I, S. 100. Stuttgart 1908.

sonst Temperaturen gleich der effektiven Erdtemperatur antreffen); die allgemeine Zirkulation hindert deshalb auch die sonst starke örtliche und jahreszeitliche Schwankung der Inversionstemperaturen. Daß sich aber auch bei diesen der Einfluß der Jahreszeiten noch geltend macht, zeigen die Ausführungen Wagners[1]), wonach die maximale Temperatur der Stratophäre im Juni mit — 52°, die minimale Temperatur im Januar mit — 61,4° ermittelt wurde. Die Schwankung 9,4° ist geringer als die jahreszeitliche Schwankung an der Erdoberfläche. Unsere Theorie gibt befriedigenden Aufschluß. Die Atmosphäre, also auch die tiefen Schichten der Stratosphäre, sind im Sommer reicher an Wasserdampf; je geringer der Gehalt an Wasserdampf, desto höher die Temperatur dieser Schichten (vgl. die kleine Tabelle S. 109). Die tiefere Temperatur der strahlenden Schichten der Troposphäre wird durch geringeren Wasserdampfgehalt der oberen Inversion zum Teil kompensiert. In diese Verhältnisse werden die Untersuchungen des folgenden Paragraphen weiteren Einblick geben.

§ 6. Die Strahlung der Atmosphäre.

Die Untersuchungen des letzten Paragraphen bestimmten die Temperaturen des Strahlungsgleichgewichtes der Atmosphäre, falls die Wärmebilanz gegeben ist. In diesem Paragraphen behandeln wir das umgekehrte Problem. Gegeben seien die Temperaturen der Atmosphäre und die äußere Zustrahlung; wir fragen nach den Strahlungen, die jeden Querschnitt der Atmosphäredurch setzen und an ihren Grenzflächen austreten. Wir gehen von denselben Voraussetzungen aus: jede Schicht absorbiert und emittiert proportional ihrem Gehalte an Wasserdampf; die kurzwellige Sonnenstrahlung und die langwellige Strahlung von der tiefen Temperatur der Erdoberfläche und Atmosphäre sollen jede für sich als grau betrachtet, d. h. durch

[1]) A. Wagner, Die Temperaturverhältnisse in der freien Atmosphäre. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. III, S. 57, 1910.

einen mittleren Absorptionskoeffizienten k_1 resp. k_2 behandelt werden können.

Die absteigende Strahlung B besteht aus den Bestandteilen B_1 und B_2, B_1 die kurzwellige Sonnenstrahlung, B_2 die langwellige Strahlung der erwärmten Atmosphäre. Die aufsteigende Strahlung A, herrührend von der Strahlung der Erdoberfläche und der Atmosphäre ist so tief temperiert, daß wir den kurzwelligen Anteil A_1 gegenüber A_2 vernachlässigen können. Ebenso berücksichtigen wir von der Strahlung eines schwarzen Körpers von der Temperatur der Atmosphäre lediglich den langwelligen Teil, setzen also $E_2 = E = s\,T^4$. Dann lauten die beiden Hauptgleichungen wie im vorangehenden Paragraphen:

$$\frac{dB}{dm} = \frac{dB_1}{dm} + \frac{dB_2}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_2 E_2$$
$$= -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_2 E$$

$$\frac{dA}{dm} = \frac{dA_2}{dm} = k_2 A_2 - k_2 E_2 = k_2 A - k_2 E$$

und entsprechend der Gleichung (77) setzen wir

$$k_1 = b_1 m^3; \quad k_2 = b_2 m^3,$$

worin für mittlere Feuchtigkeitsverhältnisse $b_1 = 0{,}4$, $b_2 = 9{,}2$ angenommen werden kann. Statt Strahlungsgleichgewicht anzunehmen, betrachten wir die Temperaturverteilung der Atmosphäre, also E als Funktion von m gegeben, und integrieren. Wie oben S. 105 erhalten wir $B_1 = \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4}$ und

$$B_2 = \bar{B}_2 e^{-\frac{b_2}{4} m^4} + b_2 e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m m^3 e^{\frac{b_2}{4} m^4} E\,dm.$$

Beachten wir, daß B_2 (der Wert B an der oberen Grenze der Atmosphäre) gleich Null ist, so erhalten wir schließlich nach leichter Umformung

93) $$B = \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - \bar{E} e^{-\frac{b_2}{4} m^4} + E - e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m e^{\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm}\, dm,$$

worin $\bar{E}$ den Wert von E an der oberen Grenze der Atmosphäre bedeutet. Ebenso ergibt sich

$$A = \bar{A} e^{\frac{b_2}{4} m^4} - b_2 e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m m^3 e^{-\frac{b_2}{4} m^4} E\, dm$$

und nach leichter Umformung

94) $$A = (\bar{A} - \bar{E}) e^{\frac{b_2}{4} m^4} + E - e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm}\, dm,$$

oder wenn wir statt der Werte $\bar{A}$ und $\bar{E}$ an der oberen Grenze die Werte $\underline{A}$ und $\underline{E}$ an der unteren Grenze $m = M$ der Atmosphäre einführen

94a) $$A = (\underline{A} - \underline{E}) e^{\frac{b_2}{4} (m^4 - M^4)} + E + e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_m^M e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm}\, dm.$$

Hätten wir die Absorption unabhängig von der Höhenlage der Schicht anzunehmen, so wären in den Gleichungen (93), (94) und (94a) lediglich $\frac{b_1}{4} m^3$ durch $k_1 = 0{,}1$ und $\frac{b_2}{4} m^3$ durch $k_2 = 2{,}3$ zu ersetzen. Die Gleichungen (93), (94) und (94a) enthalten die vollständige Lösung des Problems. Bilden wir ihnen entsprechend

95) $$(2 k_2 E - k_1 B_1 - k_2 B - k_2 A)\, dm,$$

so erhalten wir die Energieabgabe jeder Schicht, und dadurch ihre Abkühlungsgeschwindigkeit. Integration nach m gibt die Wärmeabgabe atmosphärischer Schichten von endlicher Dicke.

Anwendung der gewonnenen Gleichungen.

Wir stellen erst in der folgenden kleinen Tabelle die Temperaturen zusammen, bei denen ein schwarzer Strahler die Menge $E \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ \text{min}}$ ausstrahlt.

$E\,\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$	T	$E\,\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$	T
0,148	210	0,467	280
0,212	230	0,500	285
0,252	240	0,537	290
0,296	250	0,615	300
0,347	260	0,701	310
0,403	270	1,014	340

I. Die nächtliche Strahlung einer isothermen Atmosphäre.

Die Temperatur sei T. Konstanz der Temperatur hat Konstanz von E zur Folge. Also ist $\frac{dE}{dm} = 0$, $\bar{E} = \underline{E} = E$. Den nächtlichen Verhältnissen Rechnung tragend setzen wir in (93) $\sigma = 0$ und erhalten

96) $$B = E\left(1 - e^{-\frac{b_2}{4} m^4}\right)$$

97) $$A = (\underline{A} - E)\, e^{\frac{b_2}{4}(m^4 - M^4)} + E.$$

Da wir nur die Strahlung der Atmosphäre selbst beurteilen wollen, nehmen wir weiter an, daß die Erdoberfläche ebenfalls auf gleicher Temperatur sei und wie ein schwarzer Körper strahle, oder bei geringerem Strahlungsvermögen sich auf etwas höherer Temperatur befinde, so daß wir haben $\underline{A} = E$, und wir erhalten

97 a) $$A = E.$$

Die für unsere Untersuchung ungleich wichtigere Strahlung B wird durch diese Vereinfachung nicht beeinflußt! Gleichung (97 a) liefert wieder den S. 65 ausgesprochenen Satz, daß eine isotherme Atmosphäre die Strahlung einer gleich temperierten schwarzen Fläche nicht ändert. Eine auf ihrer Oberseite spiegelnde, auf ihrer Unterseite schwarze, horizontale Fläche würde an jeder Stelle der Atmosphäre eine von der Höhe unab-

hängige Strahlung an Intensität gleich der Erdstrahlung messen. Umgedreht mißt die Fläche die durch (96) bestimmte, erdwärts gerichtete Strahlung der Atmosphäre. Der Faktor $1 - e^{-\frac{b_2}{4} m^4}$ ist, wie leicht ersichtlich, das Absorptionsvermögen der oberhalb des Niveaus m gelegenen Schichten, so daß Gleichung (96) der Ausdruck des Kirchhoffschen Satzes ist, der hier, da wir einen isothermen Strahler annehmen, unverändert gilt. Für die Bodenschicht, $m = 1$, ist bei mittleren Feuchtigkeitsverhältnissen $e^{-\frac{b_2}{4} m} = 0{,}1$, so daß die Erdoberfläche von der Atmosphäre Wärmemengen zugestrahlt erhält gleich 90 % der Strahlung eines gleich temperierten schwarzen Strahlers! Mit zunehmender Erhebung nimmt die Zustrahlung der Atmosphäre rasch ab. Wir stellen in folgender, kleinen Tabelle die Zustrahlung der Atmosphäre für verschiedene Temperaturen in verschiedenen Höhen zusammen, ausgedrückt in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$, die Höhen genügend genau berechnet für $T = 0^0$ C.

T	— 20⁰	— 10⁰	0⁰	10⁰	20⁰
$h =$ 0 m	0,28	0,32	0,38	0,44	0,50
1000 „	0,23	0,27	0,315	0,37	0,42
2000 „	0,18	0,21	0,23	0,28	0,32
3000 „	0,12	0,14	0,16	0,19	0,22
4000 „	0,08	0,10	0,11	0,13	0,15
5540 „	0,04	0,05	0,055	0,06	0,07

An direkten Messungen liegen vor[1]):

	Neapel 60 m	Wien 220 m	Zürich 440 m	Rauris 950 m	Sonnblick 3100 m	
Beobachtete Temperatur	22⁰	19⁰	15⁰	— 6⁰	— 1⁰	— 12⁰
Gegenstrahlung der Atmosphäre	0,40	0,41	0,37	0,21	0,23	0,12

Die Differenzen berechnet — beobachtet sind (mit einer

[1]) W. Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, S. 456. Leipzig und Berlin 1911.

Ausnahme) positiv, mit wachsender Höhe abnehmend, beides selbstverständlich, da der Rechnung mit der Höhe konstante Temperatur zu Grunde liegt.

Die Zahlen zeigen im Vergleich mit den Zahlen der vorangehenden, den Zusammenhang zwischen E und T darstellenden Tabelle den gewaltigen Strahlungsschutz einer isothermen Atmosphäre bei mittleren Feuchtigkeitsverhältnissen. Im Meeresniveau beträgt die Gegenstrahlung dieser Atmosphäre 90°/₀ der Ausstrahlung der maximal (schwarz) strahlenden Erdoberfläche, sie kann also deren Wärmeverlust auf den 10. Teil herabsetzen. Sie zeigt ferner den außerordentlichen Einfluß des Wasserdampfes, denn die Abnahme der Zahlen mit der Höhe ist in erster Linie der Abnahme des Wasserdampfes in höher liegenden Niveaus zuzuschreiben.

Um die von einer atmosphärischen Schicht abgegebene Wärmemenge dQ zu berechnen, bilden wir Gleichung (95), erhalten

98) $$dQ = +Ee^{-\frac{b_2}{4}m^4} b_2 m^3 dm$$

und integriert

98 a) $$Q = E\left(e^{-\frac{b_2}{4}m_1^4} - e^{-\frac{b_2}{4}m_2^4}\right).$$

Die oberhalb m gelegenen Schichten geben deshalb Wärme ab im Betrage

$$Q = E\left(1 - e^{-\frac{b_2}{4}m}\right),$$

das ist die durch die Strahlung B beförderte Menge. Die von jeder Schicht abgegebene Wärme wandert also nur in Richtung Erde. Selbstverständlich, denn der konstante Energiestrom A, der die Atmosphäre in Richtung Weltenraum verläßt, tritt an ihrer Unterfläche ein.

Die Temperatur jeder Schicht sinkt in der Minute um den Betrag

99) $$\Delta T = \frac{Ee^{-\frac{b_2}{4}m^4} b_2 m^3}{c_p}$$

und die Mitteltemperatur der Schicht von m_1 bis m_2 um

99a) $$\Delta T = \frac{E\left(e^{-\frac{b_2}{4} m_1^4} - e^{-\frac{b_2}{4} m_2^4}\right)}{c_p(m_2 - m_1)}.$$

Die Temperatur sinkt nicht in allen Schichten gleich rasch. Die Isothermie wird infolge des Strahlungsprozesses aufhören, allerdings sehr langsam. Die rascheste Temperaturänderung erleidet die Schicht $m^4 = \frac{3}{b_2}$ (wie aus (99) leicht zu ermitteln ist); also in einer Höhe von rund 2250 m; ihre Temperatur sinkt bei $T = 270^0$ per Minute um $0{,}00323^0$; zu einem Grad Abkühlung sind 5 Stunden 10 Min. erforderlich. Für Abkühlung im Mittel um 1^0 benötigt die unterste Schicht von 1 km Höhenerstreckung 7 Stunden 20 Min., die ganze Atmosphäre 10 Stunden 45 Min. Der Strahlungsprozeß einer Nacht vermag deshalb eine isotherme Atmosphäre nicht wesentlich zu ändern, die tiefsten, staubbeladenen Schichten ausgenommen; die tiefen Temperaturen der Stratosphäre reagieren nicht mehr bemerkbar auf den Wechsel von Tag und Nacht.

II. Die nächtliche Strahlung einer polytropen Atmosphäre[1]).

Wir rechnen unter denselben Grenzbedingungen wie in dem eben erledigten Falle, setzen also $\sigma = 0$ und $\bar{A} = \bar{E}$ und erhalten aus den Gleichungen (93) und (94), da in jeder polytropen Atmosphäre die Temperatur bei konstantem Werte von g linear mit der Höhe abnimmt, also $\bar{E} = 0$ wird,

$$B = E - e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m e^{\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm} dm$$

$$A = E + e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_m^M e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm} dm.$$

---

[1]) R. Emden, Gaskugeln, Kap. XVII, § 2. Leipzig 1907.

Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, setzen wir

$$E = E_0 \frac{m}{M}, \quad M = 1.$$

Da $m \sim p$ und $E \sim T^4$, haben wir die Polytrope

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{4}},$$

also $\varkappa = \frac{4}{3}$; dies gibt das Temperaturgefälle

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{1}{\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot R} = -0{,}0085^0/\text{m}.$$

Die Temperatur nimmt $0{,}85^0$ per 100 m ab, also ausnahmsweise stark, während wir oben ausnahmsweise kleines Temperaturgefälle berücksichtigten. Wir können deshalb die Strahlung unter mittleren Verhältnissen beurteilen. In der § 3 besprochenen Arbeit hat Gold dieselben Temperaturgradienten angenommen; wir sind deshalb in der Lage, seine Ergebnisse mit unserer vervollkommneten Theorie vergleichen zu können.

Wir erhalten so

$$100) \qquad B = E_0 \left[m - e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m e^{\frac{b_2}{4} m^4} \, dm \right]$$

$$100\,\text{a}) \qquad A = E_0 \left[m + e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_m^M e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \, dm \right].$$

Die Integrale lassen sich durch Entwicklung in Reihen auswerten, die, da $\frac{b_2}{4} = 2{,}3$, namentlich für den Maximalwert $m = M = 1$ schlecht konvergieren. (Für $m = 1$ wurde noch das 10. Glied $\frac{1}{9!\,.\,33}\left(\frac{b_2}{4}\right)^9 m^{33}$ berücksichtigt.)

Für die Gegenstrahlung B legen wir die Ergebnisse der Rechnung in einer kleinen Tabelle fest. T_0 ist die Bodentemperatur der Atmosphäre.

T_0	-20^0	-10^0	0^0	10^0	20^0	30^0
$h =$ 0 m	0,26	0,29	0,335	0,39	0,45	0,51
1000 "	0,18	0,21	0,27	0,28	0,32	0,36
2000 "	0,12	0,14	0,155	0,18	0,21	0,24
3000 "	0,07	0,08	0,09	0,11	0,13	0,14
4000 "	0,04	0,05	0,05	0,065	0,07	0,08
5540 "	0,015	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03

Die zugestrahlten Energiemengen sind selbstverständlich kleiner wie bei isothermer Atmosphäre; für $\underline{B}$ ergibt sich 0,798 E_0 statt 0,9 E.

Zum Vergleiche führen wir nochmals die wenigen vorliegenden Beobachtungen an und fügen die Temperatur T_0 bei, die sich auf Grund des angenommenen Gradienten ergeben würde.

	Neapel 60 m	Wien 220 m	Zürich 440 m	Rauris 950 m	Sonnblick 3100 m	
Beobachtete Temperatur .	22^0	19^0	15^0	-6^0	-1^0	-12^0
T_0 berechnet	22^0	21^0	19^0	$+2^0$	$+25^0$	$+14^0$
Gegenstrahlung beobachtet	0,40	0,41	0,37	0,21	0,23	0,12
Gegenstrahlung isotherm berechnet	0,50	0,48	0,44	0,29	0,16	0,14
Gegenstrahlung polytrop berechnet	0,46	0,42	0,38	0,24	0,14	0,12

Die Übereinstimmung mit den beobachteten Werten ist so vollständig, als mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Messung und die der Rechnung zu Grunde gelegten mittleren Verhältnisse erwartet werden kann. Auffällig ist die Nichtübereinstimmung mit der Messung 0,23 auf dem Sonnblick (die zweite Messung gibt vollständige Übereinstimmung); im Vergleiche mit den übrigen Messungsresultaten erscheint dieser Wert ausnahmsweise groß. Diese Übereinstimmung beweist, daß wir mit unserer vereinfachenden Annahme,

die Strahlung nur in kurzwellige und langwellige Strahlung zu zerlegen, den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen sehr gut Rechnung tragen.

Würden wir, um uns mittleren Verhältnissen mehr zu nähern, den Exponenten der Polytropen $\varkappa = \frac{7}{6}$ wählen, so würden wir die Temperaturgradienten $0{,}49^0/_{100}$ m. erhalten, und wir hätten Integrale von der Form

$$\int_0^m e^{\pm \frac{b_2}{4} m^4} m^{-\frac{3}{7}} dm$$

auszuwerten. Für diesen Aufbau der Atmosphäre erhalten wir $B = 0{,}838\, E_0$ statt der eben berechneten $0{,}798\, E_0$, resp. $0{,}9\, E_0$ isotherm. Die beiden kleinen Tabellen reichen deshalb zur Beurteilung mittlerer Verhältnisse vollständig aus.

Die Strahlung A kann nach (100a) für jedes Niveau berechnet werden. Ein Freiballon würde bei Nacht pro cm² horizontalen Querschnittes die Strahlung $B + A$ erhalten; er kann, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll, als Strahlungsmesser dienen. Für die Strahlung $\bar{A}$, welche die Atmosphäre an ihrer oberen Begrenzung verläßt, ergibt sich $\bar{A} = 0{,}7274\, E_0$, also 73 % des Betrages, der unten in die Atmosphäre eintritt. [Für den Temperaturgradienten 0,49 ergibt sich $\bar{A} = 0{,}826\, E_0$.] Der Strahlungsgewinn der Atmosphäre beträgt deshalb

$$E_0\,(1 - 0{,}7274 - 0{,}798) = -\,0{,}525\, E_0 \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}.$$

Sie wird sich infolgedessen um $0{,}00090\,^0/\text{m}$ oder 1^0 in $18^h\,30^m$ abkühlen, falls die Bodentemperatur 0^0 C beträgt. Die Abkühlung des untersten Kilometers ist selbstverständlich kleiner als $7^h\,20^m$, wie sich für isotherm ergab. Die Abkühlungen während der Nacht sind somit außerordentlich gering. Um die Wärmeabgabe dQ allgemein zu finden, bilden wir mit Hilfe der Gleichung (100) die Gleichung (95) und erhalten

$$101) \quad dQ = \left[e^{-\frac{b_2}{4}m^4} \int_0^m e^{\frac{b_2}{4}m^4} dm - e^{\frac{b_2}{4}m^4} \int_m^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4} dm \right] b_2 m^3 dm$$

und für die endliche Schichte von m_1 bis m_2

$$101\,a) \qquad Q = e^{-\frac{b_2}{4}m_1^4} \int_0^{m_1} e^{\frac{b_2}{4}m^4} dm - e^{-\frac{b_2}{4}m_2^4} \int_0^{m_2} e^{\frac{b_2}{4}m^4} dm$$

$$+ e^{\frac{b_2}{4}m_1^4} \int_{m_1}^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4} dm - e^{\frac{b_2}{4}m_2^4} \int_{m_2}^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4} dm,$$

woraus sich für $m_1 = 0$, $m_2 = M$ wieder der bereits berechnete Betrag ergibt. Uns interessiert das durch den Klammerausdruck bedingte Vorzeichen von dQ in Gleichung (101). Für größere m erhalten wir Wärmeabgabe, $dQ > 0$; wir untersuchen für kleine m. Entwickeln wir die Integrale und Exponentialfunktionen und vernachlässigen m^4 und höhere Potenzen von m, so wird der Klammerausdruck

$$2m - \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{b_2}{4}\right),$$

also

$$dQ \lesseqgtr 0, \text{ je nachdem } m \lesseqgtr 0{,}27.$$

In allen Schichten, für welche $m \lesseqgtr 0{,}27$, ist die Ausstrahlung $\lesseqgtr$ Absorption. Durch den Strahlungsprozeß werden die höher wie $m = 0{,}27$ gelegenen Schichten gewärmt, die tieferen abgekühlt. Berechnen wir die Höhe dieser Schicht. Da der Temperaturgradient $\frac{dT}{dh} = -\frac{1}{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R}$ beträgt, aus der Polytropen $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ sich $dT = T_0 dp^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ ergibt und $p = m$, $p_0 = M = 1$ gesetzt werden kann, erhalten wir Beziehung zwischen m und h

$$1 - m^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{h}{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R T_0}, \tag{102}$$

für unseren Wert $\varkappa = \frac{4}{3}$ und $m = 0{,}27$ ergibt sich $1 - m^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 0{,}28$ und für $T_0 = 273$

$$h = 8950 \text{ m}.$$

Für die Temperaturgradienten $0{,}49^0/_m$ hätte sich 8200 m [für $0{,}1^0/_m$ 8650 m ergeben, um mit isothermer Atmosphäre bis ∞ zuzunehmen]. An Stelle unseres Wertes $m = 0{,}27$ fand Gold (vgl. oben § 2) unter anderer Annahme über die Verteilung des Wasserdampfgehaltes 0,25. Oberhalb dieser Höhe würde eine polytrope Atmosphäre durch den Strahlungsprozeß erwärmt, unterhalb abgekühlt werden. Die Folgen dieses Umstandes haben wir bereits oben § 3 besprochen.

III. Atmosphärische Strahlung und Sonnenstrahlung.

Um unsere Anschauungen über die Erwärmung der Erde von mancherlei konventioneller Unklarheit zu reinigen, stellen wir die Frage:

Kann der Betrag von Strahlung, den die Erdoberfläche auffängt, durch eine zwischen Erde und Sonne gestellte, absorbierende Atmosphäre erhöht werden?

Die Antwort wird bejahend ausfallen. Dies leuchtet ein, wenn wir die Frage in anderer Form stellen: Würde nach Wegnahme der Atmosphäre die mittlere Temperatur der Erdoberfläche steigen oder fallen? Bei höherer Temperatur, also stärkerer Ausstrahlung, muß ihr offenbar auch mehr Wärme zugeführt werden. Rechtfertigt die Atmosphäre ihre Auffassung als „Wärmeschutz", also die Temperatur erhöhend, so muß sie die Bestrahlung vermehren.

Die Tatsache, daß eine absorbierende Substanz die sie passierende Strahlung verstärken kann, erscheint uns widersinnig, da wir unwillkürlich an die Versuchsanordnung denken,

mittelst der wir Absorptionskoeffizienten im Laboratorium bestimmen. Zwischen auffangende, messende Fläche und Strahlungsquelle ist die absorbierende Substanz eingeschaltet. Dabei müssen, was wesentlich ist, um die schlechthin als Absorption bezeichnete Größe zu messen, absorbierende Substanz und Meßfläche auf wesentlich tieferer Temperatur wie die Strahlungsquelle sein, so daß nur die Schwächung der Strahlung bestimmt wird. Mit steigender Temperatur der absorbierenden Substanz ändern sich die Verhältnisse vollständig. Nehmen wir etwa als Strahlungsquelle eine schwarze, glühende Fläche und schalten ein kaltes Gas vor, so erscheinen die dunklen Absorptionslinien; bei einem heißeren Gase überwiegt trotz der Absorption die Emission, so daß die Linien hell erscheinen. Sorgen wir andererseits dafür, daß die strahlenden, absorbierenden resp. auffangenden Körper Wärme nur unter sich durch Strahlung austauschen können, so stellt sich dies System auf Strahlungsleichgewicht ein und jeder absorbierende Körper emittiert schwarze Strahlung.

Die Erdoberfläche ohne Atmosphäre wird sich bei gleichmäßiger Austeilung der Sonnenstrahlung auf die effektive Erdtemperatur einstellen. Fügen wir die Atmosphäre wieder bei, setzen graue Strahlung voraus und warten Strahlungsgleichgewicht ab, so stellt sich auch die Atmosphäre isotherm auf dieselbe Temperatur ein (§ 2) und jede Schicht wird, aufwärts und abwärts, unabhängig von ihrer Höhe, von demselben Energiestrom durchsetzt. Die Strahlung, welche die Erdoberfläche erhält, bliebe ungeändert, und der „Wärmeschutz“ dieser Atmosphäre wäre Null. Strenge genommen wäre er negativ. Die diffuse Reflexion und Wolken vermindern die nutzbare Strahlung um 37 %, den Wert der Albedo; aber zweckmäßig schalten wir diesen Energiebetrag, da er nicht in das thermodynamische System eintritt, stets aus unseren Betrachtungen aus.

Lassen wir die zu unbefriedigenden Resultaten führende Annahme grauer Strahlung fallen und teilen wieder die Strahlung ein in kurzwellig und langwellig, so wird die Erdober-

fläche bei Strahlungsgleichgewicht von einer Strahlung $\underline{B}$ getroffen, die durch Gleichung (81) bestimmt ist. Bezeichnen wir mit σ die auf die obere Begrenzung der Atmosphäre einfallende Strahlung, so erhalten wir

$$\underline{B} = \sigma \sqrt[4]{2{,}2} = 1{,}218 \cdot \sigma.$$

Wärmeschutz ist vorhanden; die zwischengeschaltete Atmosphäre verstärkt die einfallende Strahlung um 22%. Der Mechanismus des Strahlungsprozesses ist klar. Die Atmosphäre wird nicht nur durch die oben einfallende Strahlung σ, sondern hauptsächlich durch die Rückstrahlung der Erdoberfläche, die ihrerseits durch Sonnenstrahlung und Gegenstrahlung der Atmosphäre bedingt wird, gewärmt. Die Strahlungen $\underline{B} = \underline{A} = 1{,}218\ \sigma$ werden durch Absorption und Emission der Atmosphäre auf die Werte $\overline{B} = \overline{A} = \sigma$ an der oberen Begrenzung herabgesetzt, so daß für das Ganze sich die Wärmebilanz Null ergibt.

Die Konvektionsströme der langen Zykeln hindern die Ausbildung des Strahlungsgleichgewichtes innerhalb der Troposphäre. Die Temperaturen der Stratosphäre werden dadurch nicht geändert; ihre tiefe Temperatur und der geringe Gehalt an Wasserdampf lassen sie nur geringe Strahlungsmengen aussenden. Die Gegenstrahlung der Atmosphäre ist beinahe ausschließlich bedingt durch die Anordnung der Troposphäre, namentlich in ihren der Erde näheren Schichten. Wir kommen deshalb mittleren Verhältnissen sehr nahe, wenn wir die Temperaturabnahme $0{,}5^0/_{100}$ m. ansetzen; die Temperaturverhältnisse der tieferen, in erster Linie maßgebenden Schichten sind dadurch genügend dargestellt. Nach S. 130 berechnet sich dann die Gegenstrahlung der Atmosphäre genügend genau zu·

103) $$\underline{B} = 0{,}84\ E_0 = 0{,}84 \cdot s \cdot T_0^4,$$

wenn T_0 die Bodentemperatur der Atmosphäre mißt. Um den in Wirklichkeit vorliegenden Verhältnissen möglichst Rechnung zu tragen, verlassen wir die Annahme, daß die Sonnenstrah-

lung gleichmäßig über die Erdoberfläche verteilt, diese durchgehends auf einer mittleren Temperatur sei. Wir untersuchen mit Berücksichtigung der geographischen Breite. Dazu setzen wir in (103) für T_0 die mittlere Temperatur des Breitenkreises, nach Spitaler, und zwar für das Jahr, den Juli als wärmsten und den Januar als kältesten Monat. Damit berechnen wir die Gegenstrahlung $\underline{B}$ der Atmosphäre und vergleichen mit ihr die Strahlung, welche die Sonne diesem Parallelkreis an der oberen Grenze der Atmosphäre zukommen läßt und zwar mit dem vollen Betrag an Strahlung $\sigma = 2 \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$, ohne Abzug der Albedo. (Denn es wäre zu umständlich und unsicher, die Albedo jedes Breitenkreises zu berechnen.) Die Resultate der Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Die ersten 3 Reihen geben die mittleren Temperaturen der angegebenen Breitekreise nördlicher Breite, die 4. und 5. Reihe die mittlere jährliche Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen[1]) und in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$. In letzterem Maße enthält die 6. Reihe die Gegenstrahlung der Atmosphäre, falls ihre Bodentemperatur gleich der mittleren Jahrestemperatur des Parallelkreises angenommen wird, und die 9. Reihe die Gegenstrahlung für den Juli, als wärmsten Monat. Reihe 7 und 8 geben die Sonnenstrahlung zur Zeit ihres Maximums, für den 20^0-60^0 am 21. Juni; für den 0. und 15. Breitekreis am 20. März und

[1]) Die Beträge der Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen sind entnommen: J. Hann, Handbuch der Klimatologie, Bd. I, S. 94 f., 1908. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche empfängt der Äquator (1 Tag = 1440 min, Verhältnis des Erdumfanges zum Erddurchmesser $= \pi$, σ Solarkonstante) $\frac{1440}{\pi}\sigma = 458{,}4 \cdot \sigma \cdot \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$; die Wanderung der Sonne innerhalb der Wendekreise macht im jährlichen Mittel diesen Betrag 0,9592 mal kleiner. Ein Äquatorealtag entspricht also einer Wärmezufuhr von

$$0{,}9592 \cdot 458{,}4 \cdot \sigma = 439{,}7\,\sigma = 879{,}4 \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}.$$

Tabelle I.

N. Breite		0°	15°	20°	30°	40°	50°	60°
1. Jahrestemperatur		25,9°	26,3	25,6	20,3	14,0	5,6	− 0,1
2. Julitemperatur		25,5°	27,9	28,1	27,4	23,8	18,1	14,1
3. Januartemperatur		26,2°	23,9	21,7	13,9	3,9	− 7,2	− 16,0
4. Mittlere jährliche Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen		365	354	345	321	288,5	250	208
5. Mittlere jährliche Sonnenstrahlung in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$		880	852	830	773	694	601	500
6. Mittlere jährl. Gegenstrahlung der Atmosphäre in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$		733	736	732	681	624	554	510
7. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	21. Juni	381	387	398	411	421,5	421	416
8. Sonnenstrahlung in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$	21. Juni	917	933,5	958	998	1015	1015	1002
9. Gegenstrahlung der Atmosphäre in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$	Juli	730	753	755	750	713	660	624
10. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	21. Dez.	358	285	258	198	135	75	21
11. Sonnenstrahlung in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$	21. Dez.	863	687	621	477	326	181	51
12. Gegenstrahlung der Atmosphäre in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$	Januar	736	713	694	622	540	460	403

1. Mai. Reihe 10 und 11 geben die Sonnenstrahlung für den tiefsten Sonnenstand, den 21. Dezember; Reihe 12 die Gegenstrahlung der Atmosphäre für den kältesten Monat, den Januar. (Die kleinen Polarkalotten, deren Schneebedeckung durch Schmelz und Gefrierprozesse die Wärmebilanz außerordentlich beeinflußt, bleiben unberücksichtigt; die Rechnung bis zum 60. Breitekreis gibt genügenden Überblick.)

Betrachten wir erst die mittleren jährlichen Verhältnisse. Selbst in äquatorealen Gebieten ist die Gegenstrahlung der Atmosphäre nur um 20—10% kleiner wie der Zufluß an Strahlung auf ihre obere Grenze. Da der Gehalt der Atmosphäre an Wasserdampf in diesen Regionen sicher größer ist wie der angenommene mittlere Gehalt, wird ihre Gegenstrahlung noch größer sein. (Sie kann, da wir $\underline{B} = 0{,}84 \cdot s T_0^4$ ansetzten, noch immer um 16% größer werden.) Bereits zwischen 50° und 60° werden beide Strahlungen einander gleich. Von der berechneten Sonnenstrahlung geht aber ein beträchtlicher Teil durch Reflexion an Wolken und diffuse Reflexion für die Bestrahlung der Erdoberfläche verloren. Setzen wir den diffus reflektierten Teil, wie üblich zu 19% an, so wird bereits hierdurch die Sonnenstrahlung unter die atmosphärische Strahlung herabgedrückt. Wir haben also den Satz:

Die jährliche Gegenstrahlung der Atmosphäre ist nur wenig kleiner als die jährliche Sonnenstrahlung, welche die Atmosphäre an ihrer äußeren Begrenzung trifft, und größer als die jährliche Sonnenstrahlung, welche den festen Erdboden erreicht.

Reduzieren wir die angegebenen Werte der Sonnenstrahlung um 37%, den Mittelwert der Albedo, so erhalten wir zwischen 0° und 30°, also für die halbe Erdoberfläche, etwa $840 \cdot 0{,}63 = 530$ Kal.; für die angenommene polytrope Atmosphäre wäre die Ausstrahlung der Erde plus Atmosphäre ziemlich genau gleich den angegebenen Werten der Gegenstrahlung; denn wir fanden S. 130 für den Gradienten 0,49°/100 m

$$\underline{B} = 0{,}84\,E_0, \quad A = 0{,}83\,E_0.$$

Die Wärmebilanz würde also nicht mehr stimmen, da im Laufe des Jahres mehr aus- als eingestrahlt würde. Allein der angenommene Gradient gilt nur für die tieferen Schichten der Atmosphäre, welche in erster Linie die Gegenstrahlung bestimmen. Durch diesen Gradienten haben wir die höheren Schichten, welche die Ansstrahlung nach oben mitbedingen, viel zu hoch temperiert; in Höhen von 10 km würden wir etwa -25^0 bis -30^0 C, statt der Temperaturen der Stratosphäre, -50^0 bis -57^0, angesetzt haben. Die Ausstrahlung wird deshalb bedeutend kleiner ausfallen. (Vgl. das oben S. 113 über Wirkung der Konvektion auf höhere Niveaus Auseinandergesetzte); rechnen wir mit der Strahlung der Stratosphäre im Strahlungsgleichgewichte, so erhalten wir statt rund $\frac{720 \text{ Kal}}{\text{cm}^2\ 24 \text{ St.}}$ im Mittel der Gegenstrahlung, $1440 \cdot 0{,}315 = \frac{455 \text{ Kal}}{\text{cm}^2\ 24 \text{St.}}$ gegenüber den 530 einfallenden Kalorien. Da aber mit zunehmender Breite die atmosphärische Strahlung überwiegt, wird sich mit genügender Genauigkeit die Wärmebilanz Null ergeben.

Die folgenden Reihen der Tabelle I gestatten die größte und kleinste tägliche Gegenstrahlung der Atmosphäre mit der größten und kleinsten täglichen Sonnenstrahlung zu vergleichen. Daß mit zunehmender Breite die Sonnenstrahlung zur Zeit höchsten Sonnenstandes die Gegenstrahlung immer mehr übertrifft, war zu erwarten. Überraschend ist, in welchem Maße zur Zeit tiefsten Sonnenstandes die Gegenstrahlung der Atmosphäre überwiegt. Reduzieren wir die 181 Kal. Sonnenstrahlung, die unter 50^0 Breite einfallen, noch um den Wert der Albedo, so erhalten wir 110 Kal., während die Gegenstrahlung 460 Kal. liefert. In Mitteleuropa erhält der Erdboden im Januar durch die Gegenstrahlung der Atmosphäre zwei bis dreimal so viel Wärme zugeführt als durch Sonnenstrahlung.

Um den Wärmeschutz der Atmosphäre noch auf andere Weise beurteilen zu können, haben wir die Tabelle II angelegt. Wir bezeichnen als „Strahlungstemperatur“ die Temperatur,

Tabelle II.

N. Breite		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
1. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	Jahr	365	360	345	321	288,5	250	208
2. Strahlungstemperatur	Jahr	26,5	25,6	23,1	17,1	9,3	− 0,7	− 12,8
3. Gemessene Temperatur	Jahr	25,9	26,3	25,6	20,3	14,0	5,6	− 0,1
4. Δ	Jahr	− 0,6	+ 0,7	+ 2,5	+ 3,2	+ 4,7	+ 6,3	+ 12,7
5. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	Sommerhalbjahr	182,0	193,3	198,5	198,4	193	182,9	169,5
6. Strahungstemperatur	Sommerhalbjahr	26,5	37,8	32,9	32,9	30,7	26,6	21,1
7. Julitemperatur		25,5	27,9	28,1	27,4	23,8	18,1	14,1
8. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	Winterhalbjahr	182,6	166,9	146,7	122,6	95,6	66,8	38,2
9. Strahlungstemperatur	Winterhalbjahr	26,5	19,1	10,6	− 2,9	− 18,2	− 40	− 73,2
10. Januartemperatur		26,2	23,9	21,7	13,9	3,9	− 7,2	− 16,0

auf welche die Erdoberfläche, graue Strahlung vorausgesetzt, durch die einfallende Sonnenstrahlung gebracht wird (Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes). Dauert die Bestrahlung nicht zu kurze Zeit, etwa einige Tage, so würde die Erdoberfläche, da Wärmeleitung in vertikaler und meridionaler Richtung nur eine untergeordnete Rolle spielt, sich auf diese Temperaturen einstellen. Reihe 2 enthält diese Strahlungstemperaturen für die verschiedenen Breiten bei mittlerer jährlicher Bestrahlung. Die beobachteten mittleren Jahrestemperaturen der Atmosphäre sind nur unbedeutend höher, in 50° Breite rund 6°. Für die klimatischen Verhältnisse ist dies ein außerordentlicher Betrag; allein vom thermodynamischen Standpunkte aus, der hier allein maßgebend ist, haben wir mit der absoluten Temperatur zu vergleichen und erhalten

so nur eine Differenz von 2%. Der mittlere jährliche Wärmeschutz der Atmosphäre ist demnach sehr klein. Reihe 6 gibt die Strahlungstemperatur für die mittlere Strahlung des Sommerhalbjahres. Selbst die Julitemperaturen liegen tiefer. Im Sommerhalbjahr ist der Wärmeschutz der Atmosphäre negativ.

Überraschend groß ist ihr Wärmeschutz im Winter. Die mittlere Winterstrahlung der Sonne gibt außerordentliche tiefe Strahlungstemperaturen (sie würden für Dezemberstrahlung noch bedeutend tiefer ausfallen), sie liegen bereits in 20° Breite 11° unter der Januartemperatur. Der 50. Breitekreis würde ohne Atmosphäre sich im Laufe des Winters im Durchschnitt auf —40°, der 60. auf —73° C einstellen; die Atmosphäre erhöht diese Temperaturen um 33° resp. 57°. Wir erhalten somit im Winter außerordentlich großen positiven, im Sommer kleinen negativen, im Laufe des Jahres kleinen positiven Wärmeschutz der Atmosphäre. Was sich im großen zwischen Sommer und Winter abspielt, wiederholt sich im kleineren Maßstabe im Laufe von Tag und Nacht.

Den bekannten Untersuchungen Augots über die Verteilung der Sonnenstrahlung mit Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption kommt deshalb nur eine eng umgrenzte Bedeutung zu. Sie geben lediglich den Einfluß der Atmosphäre auf die direkte Sonnenstrahlung; je kleiner das Transmissionsvermögen der Atmosphäre, desto mehr werden die höheren Breiten, und der Winter im Verhältnis zum Sommer benachteiligt. Handelt es sich jedoch um die Nutzbarmachung der Sonnenstrahlung für den Erwärmungsprozeß des Erdbodens und dessen Bedeckung, so verhält sich die Sache gerade umgekehrt. Je kräftiger die Atmosphäre emittiert (absorbiert), desto mehr kommt auf diesem Umwege die Sonnenstrahlung den höheren Breiten wenig im Jahr, gewaltig im Winter zugute. Im Sommer ist ihr Wärmeschutz negativ, aber im Winter zehren wir in mittleren und namentlich höheren Breiten von Sonnenstrahlung, die auf dem Umweg über atmosphärische Strahlung zugeführt wird. Der

Umstand, daß durch Gegenstrahlung der Atmosphäre die Strahlungstemperatur der mitteleuropäischen Breiten um 30°—60° heraufgesetzt werden, beweist, daß die Atmosphäre nicht durch Bestrahlung in diesen Breiten ihr großes Strahlungsvermögen empfangen hat. Die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre, die infolge der großen Temperaturdifferenzen namentlich im Winter kräftig funktioniert, bringt die in äquatorealen Gebieten mit großen Entropiemengen beladenen, strahlungsfähigen Luftmassen in höheren Breiten. Die allgemeine Zirkulation gleicht, um ein Bild zu gebrauchen, einem gewaltigen Föhn, der in dem tropischen Kalmengürtel aufsteigt, die Passatregion und die Roßbreite überfließt und im Niedersteigen infolge der hohen potentiellen Temperaturen bei mittlerem Gehalte an Wasserdampf zu kräftiger Strahlung befähigt ist.

Um zu entscheiden, ob den höheren Breiten und Landmassen Wärme in erster Linie nur durch Sonnenstrahlung und atmosphärische Strahlung zugeführt wird, haben wir noch den Einfluß der Kondensationsvorgänge zu berücksichtigen. Wenn Wasserdampf kondensiert, werden Entropiemengen verfügbar, so daß Arbeit und Wärmeabgabe bestritten werden könne. Ist die Arbeitsleistung hinreichend klein, so ist, falls die Kondensation bei 0° geschieht, die Wärmeabgabe rund 600 $\frac{\text{Grammkal}}{\text{Gramm}}$ (bei —10°, 0°, +10° = 613, 607 resp. 589 Kal.). Nehmen wir eine jährliche Regenhöhe von 120 cm, so liefert die Kondensation täglich rund 200 $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2}$, während die Gegenstrahlung der Atmosphäre rund von 3 fachem Betrage ist. Nun hat aber Brückner[1]) gezeigt, daß jeder Regentropfen durchschnittlich über dem Festlande dreimal niederfällt, ehe er wieder in den Ozean zurückkehrt. Deshalb sind $^2/_3$ der durch Kondensation verfügbaren Wärme dem Festlande selbst während der Verdampfung entnommen. Bei einer jährlichen Regen-

---

[1]) E. Brückner, Über die Herkunft des Regens. Geographische Zeitschrift II, S. 89, 1900.

menge von 120 cm beträgt die durch den dem Ozean entnommenen Wasserdampf zugeführte und durch Kondensation verfügbare Wärmemenge nur etwa 67 $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$; also rund 10 % der Gegenstrahlung der Atmosphäre, während über dem Ozean selbst das Verhältnis ungleich kleiner ist. Die Wärmezufuhr durch kondensierenden Wasserdampf ist klein gegenüber der Wärmezufuhr der durch Strahlung in tropischen Gebieten erwärmten, strahlenden Luftmassen.

Den Ausführungen dieses Paragraphen wurde ein konstanter, mittlerer Gehalt der Atmosphäre an Wasserdampf zu Grunde gelegt. Das Absorptiosvermögen der Atmosphäre als Funktion des Gehaltes an Wasserdampf ist viel zu wenig bekannt. um die nach Ort und Zeit so variable Menge desselben mit genügender Sicherheit in Rechnung ziehen zu können. Diese für den Wärmehaushalt der Erde so überaus wichtige Größe kann auf Grund der entwickelten Theorie durch systematische Messungen der Gegenstrahlung der Atmosphäre gewonnen werden.

Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden.

Von **Ludwig Berwald.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Die zuerst von Monge behandelten nicht-zylindrischen Flächen, auf denen die beiden Scharen von Krümmungslinien in eine einzige zusammenfallen, sind namentlich in letzter Zeit, nachdem Herr Stäckel die Aufmerksamkeit der Geometer von neuem auf sie gelenkt hatte, ziemlich häufig behandelt worden. Dennoch scheint eine möglichst rein geometrische Ableitung ihrer wichtigsten Eigenschaften bisher noch nicht versucht worden zu sein. Diese Lücke soll der erste Abschnitt (Nr. 1 bis 6) der vorliegenden Arbeit ausfüllen, der naturgemäß keine wesentlichen neuen Resultate bringt. Die gewonnene geometrische Anschauung führt zu einer einfachen Erzeugungsweise der betrachteten „Mongeschen" Flächen mit Hilfe einer unebenen „isotropen" Fläche (d. h. eines Minimalkegels oder der Tangentenfläche einer krummen Minimallinie); diese Erzeugung, sowie die aus ihr fließenden analytischen Darstellungen bilden den Hauptinhalt des zweiten Abschnittes (Nr. 7—12). Den erwähnten beiden Möglichkeiten bei der Wahl der „zugehörigen" isotropen Fläche entspricht eine Einteilung in Mongesche Flächen erster und zweiter Art. Flächen erster Art und konstanten Krümmungsmaßes gibt es nicht: ihre Stelle nehmen die Kugeln ein; die Fläche zweiter Art konstanten Krümmungsmaßes sind unter dem Namen Serretsche Flächen bekannt. Bei der analytischen Darstellung aller dieser

Flächen stützt sich die Arbeit großenteils auf die von Herrn Study neuerdings entwickelte Theorie der charakteristischen Invarianten der krummen Linien auf Minimalkegeln und der krummen Minimallinien[1]).

Im Anschluß an die analytische Darstellung werden einige geometrische Eigenschaften der Mongeschen Flächen erster Art angegeben (Nr. 8), namentlich aber gelingt die Bestimmung aller algebraischen Mongeschen Flächen (Nr. 8 und 9). Geometrisch sind diese algebraischen Flächen dadurch charakterisiert, daß ihre Zentrakurve entweder eine algebraisch rektifizierbare krumme, nicht-isotrope Linie oder eine algebraische krumme Minimallinie ist. Man gelangt zu diesem Satze mit Hilfe eines Formelsystems, das aus der gegebenen Flächendarstellung für die Zentrakurve einer Mongeschen Fläche folgt, und das besonders dadurch bemerkenswert ist, daß es eine Lösung der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen darstellt; wie ich nachträglich bemerkte, ist dieses Formelsystem bereits von Herrn de Montcheuil[2]) angegeben worden, jedoch ziemlich unbekannt geblieben (Nr. 10). Ein zweites für die Zentrakurven der Mongeschen Flächen auftretendes Gleichungssystem gestattet die Darstellung der charakteristischen Differentialinvarianten einer beliebigen nicht-isotropen krummen Linie, mit Ausnahme der Kreise, durch die einfachste charakteristische Invariante einer Minimalevolute und die Ableitungen der Bogenlänge der gegebenen Kurve nach einem natürlichen Parameter

---

[1]) E. Study, a) Zur Differentialgeometrie der analytischen Curven. Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), p. 1—50. (Der Amer. Math. Soc. vorgelegt am 10. September 1908.)

b) Die natürlichen Gleichungen der analytischen Curven im Euclidischen Raume. Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910), p. 249—279. (Der Amer. Math. Soc. vorgelegt am 26. Februar 1910.)

a) wird weiterhin als A. C., b) als N. Gl. zitiert.

[2]) Die Literatur hierüber siehe Nr. 10, Anm.

der Minimalevolute[1]). Anschließend werden alle Mongeschen Flächen bestimmt, die eine gegebene krumme Linie zur Zentrakurve haben, und ihre Verteilung auf die beiden Arten angegeben (Nr. 11). Endlich wird noch eine bisher übersehene, wenigstens nirgends ausdrücklich ausgesprochene Doppelverhältnis-Eigenschaft abgeleitet (Nr. 12).

Der dritte Abschnitt (Nr. 13—16) bespricht die einfachsten algebraischen Mongeschen Flächen, namentlich diejenigen dritter Ordnung. Es handelt sich dabei um die gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invarianten drei Typen solcher Flächen dritter Ordnung. Nach einer Diskussion von Flächen, die sie repräsentieren (Nr. 13 und 14), wird der Nachweis geliefert, daß diese drei Typen die einzigen sind (Nr. 15). Speziell existiert auch keine Serretsche Fläche dritter Ordnung; die einfachste Serretsche Fläche ist von der vierten Ordnung (Nr. 16).

Der letzte Abschnitt (Nr. 17—20) beschäftigt sich ausführlicher mit den Mongeschen Flächen erster Art, namentlich mit ihrer Abwickelung aufeinander (Nr. 17) und auf die Flächen zweiter Art (Nr. 20). Die Eigenschaft aller aufeinander abwickelbaren Flächen erster Art, aus einer beliebigen unter ihnen durch Bewegung oder Umlegung hervorzugehen, führt auf eine besondere Klasse dieser Flächen, die mit der Theorie der automorphen Funktionen in nahem Zusammenhang steht: jede dieser „automorphen“ Mongeschen Flächen erster Art ist dadurch ausgezeichnet, daß sie durch eine bestimmte („zugehörige“) Gruppe von Rotationen um die Spitze des zugehörigen Minimalkegels auf sich selbst abgewickelt wird (Nr. 18). Eine Anwendung dieser Betrachtungen auf gewisse, in einem besonderen quadratischen R_3 gelegene, krumme Minimallinien des R_4 ist angefügt (Nr. 19).

Da die mir bekannt gewordene Literatur über die Mongeschen Flächen in den vorhergegangenen Arbeiten nur unvollständig angeführt ist, so mag zum Schlusse noch ein chrono-

[1]) Wegen der Benennungen vgl. auch E. Study, A. C.

logisches Verzeichnis derselben hier Platz finden, das übrigens keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt[1]):

1. G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie [5. éd. par J. Liouville. Paris (1850), § XIX. De la surface dont les deux rayons de courbure en chaque point sont égaux entre eux et dirigés du même coté. p. 196–211][2]).
2. J. A. Serret, Note sur une équation aux dérivées partielles. Journ. math. p. appl. (1) 13 (1848), p. 361–368.
3. O. Bonnet, Note sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. C. R. Ac. sc. Paris 42 (1856), p. 1067—1070.
4. L. Lévy, Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles. J. math. p. appl. (4) 8 (1892), p. 351—383 [nur p. 372 f.].
5. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris I (1887), p. 84 Anm.; III (1894), p. 294 f., 315.
6. S. Lie, Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 48 (1896), p. 466–477[3]).

---

[1]) Die Arbeiten, die in diesem Verzeichnis genannt sind, werden weiterhin so zitiert, daß z. B. [Einl. 8)] die hier unter 8) genannte Arbeit bedeutet.

[2]) Mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung dieser Flächen

$$4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 = 0$$

hat sich Monge bereits in der Abhandlung: Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles, Hist. Mém. math. phys. Ac. sc. Paris, année 1784 (1787), p. 118—192 beschäftigt [p. 145 ff.].

[3]) Bekanntlich hat schon Monge [1)] angegeben, daß eine beliebige Fläche mit gleichen und gleichgerichteten Krümmungsradien [variablen Krümmungsmaßes] Enveloppe einer Schar von Kugeln ist, deren Mittelpunkt eine willkürliche [von Monge als reell vorausgesetzte] krumme Linie beschreibt, und deren Halbmesser gleich der Bogenlänge dieser krummen Linie ist. Die entsprechende geometrische Erzeugungsweise der Serretschen Flächen als Enveloppen einer Schar von Kugeln konstanten Halbmessers, deren Mittelpunkt eine beliebige krumme Minimallinie beschreibt, dürfte dagegen Lie als erster erkannt und ausgesprochen haben. Daß Lie die geradlinigen Flächen, die durch Bewegung einer Minimalgeraden entstehen, schon um 1870 gekannt hat, steht nach einer Bemerkung des Herrn Stäckel in [7)] fest. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Engel entnehme ich, daß diese Flächen zwar implizite unter den Integralflächen gewisser partieller Differentialgleichungen erster Ordnung enthalten sind, die Lie in der Arbeit: Über Complexe, insbe-

7. P. Stäckel, Beiträge zur Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 48 (1896). p. 478—504. [I. Zur Theorie der Krümmungslinien; auch: II. Über die Fundamentalgrößen der Flächentheorie, Nr. 4.]
8. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen. Leipzig (1902), p. 115—116, (165), 175, 177, 213, 227—229, 240—241, 354.
9. P. Stäckel, Beiträge zur Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 54 (1902), p. 101—120. [VIII. Über die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen.]
10. M. de Montcheuil, Sur une classe de surfaces. Thèse prés. à la fac. sc. Toulouse, No. 23 (juin 1902). Paris, 4⁰, 75 Seiten. [Seconde partie: Applications II. 2o: Surfaces à rayons de courbure égaux et de même sens, p. 39—42; III. Trois fonctions sont nulles, p. 42 f.]
10a. J. Drach, Sur certaines déformations remarquables. C. R. Ac. sc. Paris, 136 (1903), p. 996—998 [auf p. 997].
11. Burke Smith, Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugate lines. Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1906), p. 164—170. [Einleitende Bemerkung und p. 167 f.]
12. U. Sbrana, Le superficie di Serret negli spazi a curvatura costante. Atti Acc. Lincei (mat. fis.) (5) 15 (1906), p. 537—542.
13. L. Bianchi, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Mem. mat. fis. Soc. It. (dei XL) (3) 14 (1907), p. 3—74 [§§ 22—24].
14. U. Sbrana, Sulle trasformazioni delle superficie a linee di curvatura coincidenti. Mem. mat. fis. Soc. It. (dei XL) (3) 14 (1907), p. 275—289.
15. J. Lipke, On the shortest distance between consecutive straight lines. Bull. Amer. math. Soc. 13 (1907), p. 489—497 [§ 3. Geometric interpretations. Theorem VII.]
16. L. Raffy, Sur les surfaces à lignes de courbure confondues. C. R. Ac. sc. Paris 146 (1908), p. 459—462.
17. L. Raffy, Applicabilité et modes divers de représentation des surfaces à lignes de courbure confondues. C. R. Ac. sc. Paris 146 (1908), p. 618—620.

---

sondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. 5 (1872), p. 146—256 [auf p. 192 ff.] bespricht; daß Lie sie aber, außer in der im Texte genannten Abhandlung, nirgends ausdrücklich erwähnt. Man wird also annehmen dürfen, daß auch Lies Kenntnis der erwähnten geometrischen Erzeugung der Serretschen Flächen bis etwa 1870 zurückreicht. Nach Lie findet sich diese Erzeugung wohl zuerst in: E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre etc. Paris (1898), p. 70.

18. L. Raffy, Sur les résaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima. C. R. Ac. sc. Paris 146 (1908), p. 740—742.

Die Noten 16)—18) geben die wichtigsten Resultate von:

19. L. Raffy, Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues. Bull. Soc. math. France 36 (1908), p. 150—184.
20. E. Study, Minimalcurven und Serretsche Flächen. Amer. J. math. 32 (1910), p. 264—278.
21. H. Beck, Die Gruppe der Minimalgeraden. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 64 (1912), p. 35—56 [nur Abschn. 1 auf p. 50].
22. L. Weickmann, Beiträge zur Theorie der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden. Inaug.-Diss. München (Univ.) 1912. 8⁰. 51 S.
23. L. P. Eisenhart, Ruled surfaces with isotropic generators. Rend. Circ. mat. Palermo 34 (1912), p. 29—40.
24. P. Franck, Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als kugelgeometrisches Analogon der abwickelbaren Flächen. Mitt. math. Ges. Hamburg 5 (1913), Heft 2.

Endlich sei auf eine demnächst erscheinende Arbeit:

25. H. Beck, Zur Lehre von den Mongeschen Flächen. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. 22 (1913)

hingewiesen, in der eine außerordentlich einfache explizite Darstellung aller Mongeschen Flächen gegeben wird. Die Auffindung der Serretschen Flächen wird auf das Problem der Traktrix oder der Kurven eines Nullsystems zurückgeführt.

Den Hinweis auf die unter 6) bzw. 12) und 14) genannten Arbeiten verdanke ich der Freundlichkeit der Herren F. Böhm und Weickmann. Herrn Engel bin ich für seine Mitteilungen über das Auftreten der behandelten Flächen bei Lie, und über einen ihm von Lie angegebenen Beweis, den ich in den Text aufgenommen habe, Herrn Beck für die Mitteilungen über seine oben angeführte, noch nicht erschienene Arbeit zu bebesonderem Danke verpflichtet.

I. Geometrische Ableitung der Eigenschaften der Mongeschen Flächen.

1. Wir stellen zunächst einige Definitionen und Sätze aus der Geometrie in einer Minimalebene, die weiterhin benutzt werden, ohne Beweis auf[1]).

---

[1]) Einige dieser meist ganz elementaren Sätze, die übrigens alle bekannt sein dürften, findet man bei L. Raffy, Contribution à la géo-

(1) (a) Satz: Alle Minimalgeraden[1]) einer Minimalebene sind untereinander parallel.

(b) Satz: Alle Geraden, die eine Minimalgerade μ senkrecht schneiden, liegen in der Minimalebene m durch μ; umgekehrt schneidet jede Minimalgerade μ einer Minimalebene m alle Geraden von m senkrecht. μ ist mithin eine Normale von m.

Folgesatz: Jede Minimalgerade μ steht auf sich selbst und auf allen parallelen Minimalgeraden senkrecht.

(2) Erklärung: Eine nicht-isotrope[2]) Gerade γ wird orientiert,

---

métrie des élements isotropes. Bull. sc. math. (2) 32 (1908), p. 264—278. Weiteres über den Gegenstand in: H. Beck, Zur Geometrie in der Minimalebene. Stzgsb. Berl. Math. Ges. 12 (1913), p. 14—30.

[1]) In der vorliegenden Arbeit werden, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist, ausschließlich eigentliche Punkte, Gerade, Ebenen betrachtet.

[2]) Wir stellen hier zur besseren Übersicht die mittels der Beiworte „isotrop" und „nicht-isotrop" gebildeten Termini, mit Angabe ihrer Bedeutung, zusammen.

isotrope Kurve = (gerade oder krumme) Minimalkurve	nicht-isotrope Kurve = (gerade oder krumme) Nicht-Minimalkurve [Study]
isotrope Gerade = Minimalgerade	nicht-isotrope Gerade = Euklidische Gerade [Study] = Nicht-Minimalgerade
isotroper Vektor = Vektor, der in einer Minimalgeraden liegt	nicht-isotroper Vektor = Vektor, der in einer Euklidischen Geraden liegt
isotrope krumme Linie = krumme Minimallinie [Study]	nicht-isotrope krumme Linie = krumme Nicht-Minimallinie
isotrope Flächen = Minimalebenen, Minimalkegel [Study] und Tangentenflächen einer krummen Minimallinie	nicht-isotrope Flächen = alle Flächen außer den isotropen Flächen
isotrope Ebene = Minimalebene	nicht-isotrope Ebene = Nicht-Minimalebene = Euklidische Ebene [Study]
unebene isotrope Flächen = Minimalkegel und Tangentenflächen einer krummen Minimallinie.	nicht-isotrope Kugel = gewöhnliche Kugel = Kugel mit endlichem, von Null verschiedenem Quadrate des Halbmessers.

indem man ihr eines von den beiden möglichen Tripeln von Richtungskosinus (a, b, c) beilegt, die sich dann als Koordinaten eines in der Geraden γ gelegenen „zugehörigen" Einheitsvektors auffassen lassen.

Unter einer orientierten Geraden ist im folgenden stets eine orientierte nicht-isotrope Gerade zu verstehen.

Die orientierte Gerade γ mit dem zugehörigen Einheitsvektor (a, b, c) soll mit $\gamma\,(a, b, c)$ bezeichnet werden, so oft es sich um die Hervorhebung ihrer Richtung handelt.

(3) Erklärung: Ein geordnetes Paar $A \rightarrow B$ von Punkten A, B bestimmt eine orientierte Strecke $\overrightarrow{AB}$ und einen Vektor V_A^B, d. h. eine orientierte Strecke [einen Vektor] vom Anfangspunkte A und vom Endpunkte B.

Ein Vektor [eine orientierte Strecke] heißt ein nicht-isotroper bzw. isotroper Vektor [eine nicht-isotrope bzw. isotrope orientierte Strecke], je nachdem er [sie] in einer nicht-isotropen oder isotropen Geraden liegt.

(4) Satz: Jeder isotrope Vektor (dessen Anfangs- und Endpunkt eigentliche Punkte sind), hat die Länge Null.

(5) Erklärung: Zwei in einer Minimalebene m gelegene (nicht-isotrope)[1]) Einheitsvektoren (a, b, c) und (a', b', c') heißen gleichartig oder ungleichartig orientiert, je nachdem ihr inneres Produkt $(a \mid a')$ den Wert $+1$ oder -1 hat.

Zwei orientierte, nicht-isotrope Gerade $\gamma\,(a, b, c)$ und $\gamma'\,(a', b', c')$ [zwei nicht-isotrope Vektoren, zwei orientierte nicht-isotrope Strecken] einer Minimalebene heißen gleichartig oder ungleichartig orientiert, je nachdem die zugehörigen Einheitsvektoren es sind.

Wir sprechen von zwei gleichartig oder ungleichartig orientierten Geraden [Vektoren, Strecken], einer Minimal-

---

Im Texte bleiben überall, wo aus dem Zusammenhange hervorgeht, ob es sich um ein isotropes oder nicht-isotropes Gebilde handelt, die Worte isotrop und nicht-isotrop weg.

[1]) Dieser Zusatz kann wegbleiben, da wir nur eigentliche Punkte von m betrachten.

ebene, und verstehen darunter zwei gleichartig oder ungleichartig orientierte nicht-isotrope Geraden [Vektoren, Strecken].

(6) Satz: Zwei gleichartig orientierte Gerade einer Minimalebene bilden einen Winkel, dessen Hauptwert Null ist (kürzer: den Winkel Null).

(7) Satz: Sind A und B zwei Punkte einer Minimalgeraden μ und C ein Punkt außerhalb μ in der Minimalebene m durch μ, so ist stets:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.$$

(8) Satz: Zieht man durch die Punkte einer Minimalgeraden μ in ihrer Minimalebene m gleichartig orientierte Strecken von gleicher (endlicher)[1]) Länge, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken auf einer zweiten Minimalgeraden μ'.

(9) Satz: Eine krumme ebene singuläre Linie (= krumme Linie in einer Minimalebene) hat außer den Minimalgeraden ihrer Ebene keine weiteren Filarevolventen.

2. Enthält eine Fläche[2]) eine Minimalgerade μ, so liegen nach Nr. 1 (1) alle in den Punkten von μ errichteten Flächennormalen in der Minimalebene m durch μ. Insbesondere ist das auf einer Fläche, die mindestens eine Schar

[1]) Dieser Zusatz kann wegbleiben, da wir nur eigentliche Punkte von m betrachten.

[2]) Wir verstehen im folgenden unter „Kurve", „Fläche", „Kongruenz" stets eine analytische Kurve, analytische Fläche, analytische Kongruenz; unter „Punkt einer Kurve bzw. Fläche" und „Gerade einer Kongruenz" stets einen Punkt „allgemeiner Lage" der Kurve bzw. Fläche, und eine Gerade „allgemeiner Lage" der Kongruenz; und wir betrachten nur solche Bereiche einer Kurve, Fläche bzw. Kongruenz, deren sämtliche Punkte bzw. Gerade solche allgemeiner Lage sind. Ingleichen verstehen wir unter einem „analytischen Gesetz" im folgenden ausnahmslos ein im Sinne der Funktionentheorie eindeutiges analytisches Gesetz, unter „Funktion" eine eindeutige analytische Funktion.

von ∞^1 Minimalgeraden[1]) enthält („Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden“ im weiteren Sinn[2])), für jede dieser Minimalgeraden μ der Fall; und wenn man von den isotropen Flächen absieht, worunter die Minimalebenen, die Minimalkegel und die Tangentenflächen einer krummen Minimallinie verstanden sein sollen[3]), so fällt die Flächennormale in einem Punkte P einer solchen Fläche nicht mit der Minimalgeraden μ selbst zusammen[4]).

Liegen zwei benachbarte, einer Schar von orientierten Geraden angehörige, nicht-isotrope Gerade in einer und derselben Minimalebene m, so sind sie notwendigerweise gleichartig orientiert [Nr. 1 (5)]; dies gilt insbesondere von zwei benachbarten nicht-isotropen der (in stetiger Weise orientierten) Normalen einer nicht-isotropen Fläche. Zieht man demnach durch einen festen Punkt P gleichsinnig Parallele zu allen, in stetiger Weise orientierten Normalen einer nicht-isotropen Fläche längs einer auf ihr liegenden Minimalgeraden μ, so

---

[1]) Wenn wir von ∞^1-, ∞^2-... Scharen sprechen, so setzen wir als Definitionsgesetz der Schar ein analytisches Gesetz voraus, und zählen komplexe Konstante.

[2]) Wir folgen diesem Sprachgebrauch; manche Autoren nennen die Mongeschen Flächen (siehe [4])) so.

[3]) Auch hier ist der Sprachgebrauch wechselnd; die im Texte gegebene Definition dürfte die zweckmäßigste sein.

[4]) Es ist hier vielleicht angebracht, eine Einteilung der nicht-isotropen Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden zu geben.

1. Flächen mit zwei Scharen
   a) von je ∞^1 untereinander parallelen Minimalgeraden: nicht isotrope oder Euklidische Ebenen,
   b) von je ∞^1 zueinander windschiefen Minimalgeraden: nicht-isotrope oder gewöhnliche Kugeln;
2. Flächen mit einer Schar (von ∞^1 krummen Minimallinien und einer Schar)
   a) von ∞^1 parallelen Minimalgeraden: unebene Zylinder von Minimalgeraden oder unebene Minimalzylinder [Study],
   b) von ∞^1 windschiefen Minimalgeraden: die Mongeschen Flächen.

liegen diese Parallelen nach Nr. 1 (1) in einer isotropen Ebene und sind gleichartig orientiert. Trägt man von P aus auf jeder dieser Parallelen im positiven Sinne die Einheitsstrecke ab, so ist nach Nr. 1 (8) der Ort der Endpunkte aller dieser Strecken eine Minimalgerade. Also:

Enthält eine nicht-isotrope Fläche eine Minimalgerade μ, so entspricht dieser in der sphärischen Abbildung der Fläche wieder eine (zu μ parallele) Minimalgerade μ'.

Da μ zu μ', ihrem sphärischen Bilde, zugleich parallel und senkrecht ist [Nr. 1 (1)], so folgt weiter der Satz:

Eine Minimalgerade, die einer nicht-isotropen Fläche angehört, ist zugleich Asymptotenlinie und Krümmungslinie der Fläche.

Umgekehrt ist auf einer nicht-isotropen Fläche jede Kurve λ, die zugleich Asymptotenlinie und Krümmungslinie ist, eine Minimalgerade.

Denn λ ist nach Definition zum sphärischen Bilde λ' gleichzeitig parallel und senkrecht; die Tangenten von λ und λ' in entsprechenden Punkten sind folglich Minimalgerade; λ' ist also eine sphärische Minimalkurve, d. h. eine Minimalgerade, und daher ist auch λ eine Minimalgerade.

Für die nicht-isotropen Flächen mit einer einzigen Schar von Minimalgeraden folgen insbesondere die Sätze:

(1) Das sphärische Bild eines unebenen Minimalzylinders ist eine zu den Erzeugenden des Zylinders parallele Minimalgerade.

(2) Der Minimalgeradenschar (μ) auf einer Mongeschen Fläche entspricht bei der sphärischen Abbildung eine Minimalgeradenschar (μ') der Kugel.

3. Bei jeder nicht-isotropen Fläche mit einer Schar (μ) von Minimalgeraden μ schneiden sich die in den Punkten einer beliebigen dieser Minimalgeraden μ errichteten Flächennormalen ν alle in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte K.

Für die nicht-isotropen Kugeln und Ebenen, deren sämtliche Normalen durch einen (eigentlichen bzw. uneigentlichen) Punkt gehen, sowie für die unebenen Minimalzylinder, die abwickelbare Flächen[1]) sind, ist der Satz evident. Er bedarf also nur für die Mongeschen Flächen eines Beweises.

Betrachten wir die Kongruenz $((\nu))$ der Normalen ν einer solchen Fläche. Für eine beliebige Normale ν ist diejenige Minimalebene m, die durch sie und die ihren Fußpunkt enthaltende Minimalgerade μ gelegt ist, die eine ihrer Brennebenen, weil nach Nr. 2 alle Flächennormalen längs μ in m liegen. Da die Kongruenz $((\nu))$ eine Normalenkongruenz ist, so müssen die beiden Brennebenen einer beliebig gewählten Normalen ν aufeinander senkrecht stehen. Nun schneiden alle Ebenen, die zu einer Minimalebene m senkrecht stehen, und von ihr verschieden sind, m längs einer ihrer Minimalgeraden; da ν keine Minimalgerade ist, so muß also die zweite Brennebene der Normalen ν mit der ersten Brennebene, der Minimalebene m, zusammenfallen.

Die Kongruenz $((\nu))$ der Normalen ν besitzt daher bloß ∞^1 Brennebenen, nämlich die Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ der Schar (μ). Liegen aber die Geraden einer Kongruenz in den Ebenen e einer einfach unendlichen Schar (e), so fallen ihre Brennebenen dann und nur dann zusammen, wenn alle diejenigen Geraden der Kongruenz, die in einer und derselben Ebene e liegen, durch einen Punkt der Schnittlinie dieser Ebene mit der benachbarten Ebene der Schar (e) gehen[2]).

Damit ist der obige Satz bewiesen.

---

[1]) Unter einer abwickelbaren Fläche verstehen wir eine krumme, in jede (nicht-isotrope) Ebene ohne Dehnung verbiegbare Fläche, mit anderen Worten jede Enveloppe von ∞^1, kein Büschel bildenden, nicht-isotropen Ebenen.

[2]) Die Definitionen der Brennpunkte und Brennebenen einer Kongruenz von Geraden sind projektivisch und zueinander dual; also ist dieser Satz, als das duale Gegenstück eines von Herrn Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces II, No. 321, p. 15) bewiesenen Satzes, richtig.

4. An den zuletzt bewiesenen Satz schließen sich einige weitere an, die zum Teile unmittelbar aus ihm folgen:

(1) Auf den unebenen Minimalzylindern und auf den Mongeschen Flächen fallen die beiden Scharen von Krümmungslinien in die Schar (μ) von Minimalgeraden der Fläche zusammen. Diese Eigenschaft kommt unter allen nicht-isotropen Flächen nur den genannten Flächen zu.

Der erste Teil dieses Satzes folgt aus Nr. 3. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Engel verdanke ich den folgenden ihm von Lie angegebenen geometrischen Beweis des zweiten Teiles:

Fallen auf einer (notwendigerweise unebenen) nicht-isotropen Fläche in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsrichtungen zusammen, so muß, da die Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes sowohl zu seinen Haupttangentenrichtungen als auch zu seinen Minimalrichtungen konjugiert sind, notwendig eine Haupttangentenrichtung und eine Minimalrichtung mit der einzigen Hauptkrümmungsrichtung zusammenfallen. Die eine (und nur die eine) Schar von Minimalkurven der Fläche besteht daher aus Haupttangentenkurven und infolgedessen aus geraden Linien.

Auf einem ganz ähnlichen Gedankengange beruht der von Raffy[1]) gegebene geometrische Beweis desselben Satzes.

(2) In jedem Punkte einer nicht-isotropen Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden sind die beiden Hauptkrümmungsradien gleich lang und gleich gerichtet, d. h. es fallen die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte jedes Punktes der Fläche zusammen. Diese Eigenschaft kommt unter allen nicht-isotropen Flächen nur den genannten Flächen zu.

Der erste Teil des Satzes folgt wieder aus Nr. 3. Der

[1]) Siehe [Einl. 19)], p. 154 f., wo der Beweis allerdings nur für die Mongeschen Flächen gegeben wird; doch ist er leicht auf die unebenen Minimalzylinder zu übertragen.

zweite Teil, für den schon Monge[1]) einen allerdings nicht mehr genügenden, geometrischen Beweis gegeben hatte, läßt sich folgendermaßen beweisen:

Hat eine nicht-isotrope Gerade, die einer Kongruenz angehört, zwei voneinander verschiedene Brennpunkte, dann hat sie auch zwei voneinander verschiedene Brennebenen, und umgekehrt. Ein Zusammenfallen der Brennpunkte zieht also entweder ein Unbestimmtwerden der Brennebenen (so daß jede Ebene durch die Gerade Brennebene ist), oder ihr Zusammenfallen nach sich.

Für jede Gerade der Kongruenz tritt Unbestimmtheit der Brennebenen nur bei den eigentlichen und uneigentlichen Geradenbündeln ein. Fallen dagegen für jede Gerade einer Kongruenz beide Brennebenen zusammen, so besteht die Kongruenz entweder:

1) aus der einen Schar von Haupttangenten einer nicht-abwickelbaren nicht-isotropen Fläche b[2]), oder

2) aus ∞^2 Geraden, die eine eigentliche oder uneigentliche (gerade oder krumme) Linie λ schneiden und so angeordnet sind, daß alle diejenigen Geraden, die durch einen Punkt P von λ gehen, in einer Ebene e durch die Tangente von λ in P liegen[2]).

Sieht man von dem in 2) enthaltenen trivialen Falle aller in einer Ebene gelegenen Geraden ab, so sind im ersten Falle die ∞^2 Tangentialebenen der Fläche b, im zweiten die ∞^1 Ebenen e die Brennebenen der Kongruenzgeraden.

Soll eine Kongruenz, in der die Brennebenen jeder Geraden zusammenfallen, aus den Normalen einer Fläche f bestehen[3]), so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Brennebenen jeder Kongruenzgeraden auf sich selbst senkrecht stehen, d. h. Minimalebenen sind. Der Fall 1) ist dann, da b eine

---

[1]) Siehe [Einl. 1)], p. 208.

[2]) Vgl. G. Darboux, a. a. O., Nr. 320 f., p. 13 ff., wo allerdings der Grenzfall einer uneigentlichen Brennkurve außer Acht gelassen ist.

[3]) Hierdurch werden die isotropen Flächen, die nur ∞^1 Normalen haben, von der Betrachtung ausgeschlossen.

nicht-isotrope Fläche sein muß, offenbar unmöglich. Im Falle 2) schneiden alle in einer Minimalebene e gelegenen Geraden der Kongruenz eine Fläche f, deren Normalen sie sind, in einer Minimalgeraden μ [Nr. 1 (1)], und die beiden Scharen von Krümmungslinien auf f fallen in die eine Schar von Minimalgeraden (μ) zusammen. Die Fläche f ist also nach (1) entweder ein unebener Minimalzylinder oder eine Mongesche Fläche.

Ein eigentliches [uneigentliches] Geradenbündel ist endlich stets die Normalenkongruenz einer Schar von parallelen, nicht-isotropen Kugeln [Ebenen].

Folgesatz: Bedeutet K das (Gaußsche) Krümmungsmaß oder die totale Krümmung, H die mittlere Krümmung (= Summe der reziproken Hauptkrümmungsradien) einer nicht-isotropen Fläche, so sind die nicht-isotropen Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden durch

$$H^2 - 4K = 0$$

charakterisiert.

(3) Der Ort der Krümmungsmittelpunkte:

(a) einer nicht-isotropen Kugel [Ebene] reduziert sich auf einen eigentlichen [uneigentlichen] Punkt;

(b) eines unebenen Minimalzylinders ist diejenige in der uneigentlichen Ebene gelegene Tangente des absoluten Kegelschnittes, die diesen im uneigentlichen Punkte der Minimalgeraden des Zylinders berührt;

(c) einer Mongeschen Fläche ist eine (eigentliche) krumme Linie auf der Enveloppe der ∞^1 Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ der Schar (μ) auf der Fläche.

(a) ist evident; (b) folgt leicht aus der Eigenschaft der abwickelbaren Flächen, längs einer allgemein gelegenen Erzeugenden überall dieselbe nicht-isotrope Tangentialebene zu besitzen; (c) ergibt sich aus Nr. 3.

(4) Ist μ eine (isotrope) Erzeugende einer Mongeschen Fläche, und errichtet man in den Punkten M

von μ die Schmiegungsebenen der dort schneidenden krummen[1]) Minimallinien $\bar{\mu}$ der Fläche, so umhüllen diese einen Minimalkegel, dessen Spitze der zu μ gehörende Hauptkrümmungsmittelpunkt K der Fläche ist[2]). Die Tangenten der Minimallinien $\bar{\mu}$ in ihren Schnittpunkten mit μ liegen auf derjenigen nicht-isotropen Kugel vom Mittelpunkte K, welche die Fläche längs μ berührt.

Ist $\bar{\mu}$ eine Minimalkurve auf einer beliebigen nicht-isotropen Fläche, so ist die Schmiegungsebene in einem Punkte M von $\bar{\mu}$ stets eine der beiden Minimalebenen durch die in M errichtete Flächennormale. Im vorliegenden Falle ist die Schmiegungsebene der krummen Minimallinie $\bar{\mu}$ im Schnittpunkte M mit der Erzeugenden μ diejenige in M errichtete isotrope Normalebene $\overline{m}$ der Fläche, die nicht durch μ geht. (Von dem höchstens in besonderen Punkten der Fläche eintretenden Fall, daß die Minimallinien $\bar{\mu}$ und μ sich in M berühren, sehen wir hier ab). Bewegt sich M auf μ fort, so geht die in M errichtete Normale ν der Fläche, also auch die isotrope Normalebene $\overline{m}$ beständig durch den zu μ gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkt K der Fläche.

Ist $\bar{\tau}$ die Tangente von $\bar{\mu}$ in M, und P ein beliebiger Punkt von $\bar{\tau}$, so ist ferner, nach Nr. 1 (7):

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KP},$$

womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

[1]) Es ist möglich, daß einzelne der Minimallinien $\bar{\mu}$ Minimalgerade sind. In diesem Fall vertritt die Minimalebene der Minimalgeraden $\bar{\mu}$ die Stelle der Schmiegungsebene (im obigen Satze).

[2]) Zum Vergleich geben wir den (bekannten) entsprechenden Satz für eine nicht-isotrope Kugel: Die Minimalebene durch eine Erzeugende μ der einen Minimalgeradenschar (μ) einer nicht-isotropen Kugel enthält auch die zu μ parallele Erzeugende $\bar{\mu}$ der zweiten Minimalgeradenschar ($\bar{\mu}$). Beschreibt μ die Schar (μ), so beschreibt $\bar{\mu}$ die Schar ($\bar{\mu}$), und die Minimalebene durch μ und $\bar{\mu}$ umhüllt einen Minimalkegel, der den Kugelmittelpunkt zum Scheitel hat.

5. Trägt man auf allen (in stetiger Weise orientierten) Normalen einer nicht-isotropen Fläche f mit einer Schar (μ) von Minimalgeraden μ, von den Punkten der Fläche aus, in einem bestimmten der beiden Normalensinne solche endliche Strecken σ ab, die längs jeder Minimalgeraden μ konstant sind, hingegen von einer Minimalgeraden zur anderen nach einem analytischen Gesetze variieren können, so ist der Ort der Endpunkte aller dieser Strecken im allgemeinen wiederum eine nicht-isotrope Fläche f_1 mit einer Schar (μ_1) von Minimalgeraden μ_1. Nur für eine einzige bestimmte Art des Variierens der Strecken σ erhält man, bei den Mongeschen Flächen und den nicht-isotropen Kugeln, keine Fläche mehr, sondern:

a) bei einer Mongeschen Fläche f eine krumme Linie auf der Enveloppe i der ∞^1 Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ,

b) bei einer nicht-isotropen Kugel f den Kugelmittelpunkt[1]).

Daß der Ort der Endpunkte der Strecken σ im allgemeinen eine Fläche f_1 mit einer Schar (μ_1) von Minimalgeraden μ_1 ist, folgt unmittelbar aus den Sätzen unter Nr. 2. Es bleibt zu zeigen, daß f_1 stets eine nicht-isotrope Fläche ist; dabei wird man ganz naturgemäß auch auf die Ausnahmsfälle geführt.

Zunächst kann f_1 keine Minimalebene sein. Denn in jeder Minimalebene m durch eine Gerade μ der Schar (μ) liegt eine Minimalgerade μ_1 der Schar (μ_1) von f_1. Da durch jede der Minimalgeraden μ_1 einer Minimalebene f_1 außer f_1 selbst keine zweite Minimalebene gelegt werden kann, so müßten, wenn f_1 Minimalebene wäre, alle Minimalebenen m mit f_1 und folglich miteinander, und mit f, identisch sein, was der Voraussetzung widerspricht, daß f eine nicht-isotrope Fläche ist.

---

[1]) Der wesentliche Inhalt dieses Satzes findet sich anscheinend zuerst in der Inaug.-Diss. des Herrn Weickmann [Einl. 22)], p. 24f.

Dagegen könnte noch, falls f eine Mongesche Fläche oder eine nicht-isotrope Kugel ist, f_1 eine unebene isotrope Fläche i sein, nämlich die Enveloppe der Minimalebenen m. Da sich aber, nach Nr. 3 und Nr. 4 (3), bei einer Kugel und bei einer Mongeschen Fläche (mindestens) je ∞^1 Flächennormalen in einem und demselben Punkte K der isotropen Fläche i schneiden, so ist auch dieser Fall unmöglich, und an seine Stelle treten die Ausnahmefälle a) und b).

6. Von hier ab beschäftigen wir uns ausschließlich mit den Mongeschen Flächen. Zunächst leiten wir den Zusammenhang ab, der zwischen der Kurve der Hauptkrümmungsmittelpunkte oder der Zentrakurve einer Mongeschen Fläche und dem Krümmungsmaße der Fläche besteht.

(1) Wir setzen erstens voraus, daß die Zentrakurve $\varkappa$ einer Mongeschen Fläche f eine krumme Minimallinie sei. Ist dann K ein Punkt von $\varkappa$, und m die Schmiegungsebene von $\varkappa$ in K, so schneidet [Nr. 3 und Nr. 4 (3)] m die Fläche f in einer Minimalgeraden μ der auf f gelegenen Minimalgeradenschar (μ). Zieht man nun nach einem beliebigen analytischen Gesetz durch jeden Punkt K von $\varkappa$ in der zugehörigen Schmiegungsebene m eine nicht-isotrope gerade Linie ν, so ist [Nr. 1 (1)] $\varkappa$ eine orthogonale Trajektorie der Geradenschar (ν). Die Gerade ν schneidet die Fläche f in einem Punkte F von μ, und da ν durch K geht und in m liegt, so ist ν Normale von f in F. Beschreibt ν die Schar (ν), so beschreibt F demnach ebenfalls eine orthogonale Trajektorie φ der Schar (ν).

Da nach einem bekannten Satze zwei orthogonale Trajektorien einer Schar von ∞^1 nicht-isotropen Geraden, wie sie hier vorliegt, auf allen Geraden der Schar dieselbe Strecke abschneiden, so bleibt $\overrightarrow{FK} = R$ konstant, wenn ν die Schar (ν) beschreibt. Zieht man noch die Willkürlichkeit des (ν) definierenden Gesetzes in Betracht und beachtet, daß auch für zwei verschiedene Normalen ν und ν' durch einen und denselben Punkt K [nach Nr. 3 und Nr. 1 (7)] R konstant bleibt, so folgt der Satz:

Diejenigen Mongeschen Flächen, deren Zentrakurve eine krumme Minimallinie ist, haben konstantes Krümmungsmaß.

Umgekehrt haben die Mongeschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes eine krumme Minimallinie zur Zentrakurve; wie eine entsprechende Umkehrung des eben verfolgten Gedankenganges zeigt.

In Übereinstimmung mit anderen Autoren bezeichnen wir weiterhin die Mongeschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes als die Serretschen Flächen[1]).

(2) Zweitens werde vorausgesetzt, daß die Zentrakurve $\varkappa$ der Fläche f eine reguläre Kurve[2]) sei. Ist wieder K ein Punkt von $\varkappa$, so liegt nach Nr. 4 (3) die Tangente ν von $\varkappa$ im Punkte K in der Minimalebene durch eine erzeugende Minimalgerade μ von f. Da ferner ν, nach Voraussetzung, keine Minimalgerade ist, so müssen μ und ν sich in einem eigentlichen Punkte F schneiden, und ν ist die Normale von f in F.

Die Gesamtheit der Tangenten ν von $\varkappa$ hat demnach auf f eine gewisse Kurve φ zum Fußpunktsort; und da die Tangenten ν von $\varkappa$ zugleich Flächennormalen von f sind, so ist φ eine Filarevolvente von $\varkappa$.

Sind nun ganz allgemein: $\varkappa$ eine reguläre Kurve, φ eine ihrer Filarevolventen, K_0 der Schnittpunkt von φ und $\varkappa$, K ein variabler Punkt von $\varkappa$, F der auf der Tangente ν von $\varkappa$ in K gelegene Punkt von φ, $\overrightarrow{FK} = R$; wird ferner die krumme Linie $\varkappa$ auf eine beliebige der beiden möglichen Weisen orientiert[3]); und ist endlich, nach Annahme eines (festen) Punktes K_A auf $\varkappa$ als Anfangspunktes der Bogenlänge von $\varkappa$, s_0 bzw. s

[1]) Nach J. A. Serret, bei dem sie zuerst auftreten [Einl. 2)].

[2]) In der von Herrn Study (A. C.) eingeführten Terminologie, deren wir uns in dieser Arbeit durchwegs bedienen.

[3]) Die Orientierung einer nicht-isotropen krummen Linie geschieht bekanntlich dadurch, daß man die Schar der Tangenten der Kurve in stetiger Weise orientiert, und so auf jedem analytischen Faden (= filo [Segre]) der Kurve eine positive Fortschreitungsrichtung bestimmt.

der zu K_0 bzw. K gehörige Wert dieser Bogenlänge[1]), so besteht bekanntlich die Beziehung:

$$R = s - s_0,$$

oder, wenn man, um die Konstante s_0 zu eliminieren, differenziert:

$$\text{(a)} \qquad \frac{dR}{ds} = 1.$$

Im vorliegenden Falle, in welchem $\varkappa$ die Zentrakurve von f ist, bedeutet R den Hauptkrümmungsradius der Fläche f im Punkte F. Sind weiter $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes K von f in F, und t ein regulärer Parameter der Zentrakurve $\varkappa$, so kann man (a) in die folgende Form umschreiben:

$$\text{(b)} \qquad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2.$$

Schließlich sind die beiden Gleichungen (a) und (b), da das Krümmungsmaß von f sich lediglich beim Fortschreiten von K auf $\varkappa$ ändert (nicht aber, wenn F auf μ fortschreitet), für jeden Punkt der Fläche f gültig.

(3) Ist endlich die Zentrakurve $\varkappa$ von f eine krumme ebene singuläre Linie[2]), und $\overline{m}$ ihre (Minimal-) Ebene, so schneidet die in einem Punkte K von $\varkappa$ errichtete Tangente ν der Kurve $\varkappa$

---

[1]) Wie überall, wo in dieser Arbeit von der Bogenlänge die Rede ist, wird hier vorausgesetzt, daß man nur solche Bereiche der Kurve betrachtet, die keinen singulären Punkt der als Funktion ihrer oberen Grenze betrachteten Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

enthalten.

[2]) Genau genommen, gilt der unter (2) gegebene Beweis ohne weiteres auch für (3). Da aber in den Lehrbüchern der Fall einer singulären ebenen krummen Linie meistens stillschweigend ausgeschlossen wird, so wurde im Texte die Formel (a) für diesen Fall eigens abgeleitet.

die Fläche f in einem Punkte F, und man schließt ebenso, wie in (2), daß ν die Normale von f in F ist. Folglich ist der Ort von F, wenn K die Kurve $\varkappa$ beschreibt, eine Filarevolvente von $\varkappa$, d. h. eine Minimalgerade [Nr. 1 (9)]; mit anderen Worten die Ebene $\overline{m}$ der Kurve $\varkappa$ schneidet die Fläche f in einer Minimalgeraden $\bar{\mu}$, die, wie leicht zu erkennen ist, der Schar (μ) der Erzeugenden von f nicht angehört[1]).

Sei nun K' ein K hinreichend nahegelegener Punkt von $\varkappa$, $\overrightarrow{KK'} = \varDelta s$, ν' die Tangente von $\varkappa$ in K', und F und F' bzw. die Schnittpunkte von ν und ν' mit $\bar{\mu}$, so ist

$$\overrightarrow{FK} = R, \qquad \overrightarrow{F'K} = \overrightarrow{FK} = R \text{ [Nr. 1 (7)]},$$

und wenn $\varDelta R$ die Änderung bezeichnet, die R beim Übergange von K zu K' erleidet:

$$\overrightarrow{F'K'} = R + \varDelta R,$$

und daher [Nr. 1 (7)]

$$\frac{\varDelta R}{\varDelta s} = 1;$$

und diese Beziehung besteht beständig, wenn sich K' auf $\varkappa$ in beliebiger Weise stetig gegen K bewegt[2]), also auch in der Grenzlage; womit das Bestehen der Relationen (a) und (b) auch für diesen Fall gezeigt ist. —

Infolge der Relationen (a) und (b) und des Satzes Nr. 4 (4) kann man, mit Monge[3]), jede Mongesche Fläche f nicht konstanten Krümmungsmaßes als einen Mantel der Enveloppe einer Schar von Kugeln auffassen, deren Mittelpunkt eine krumme Linie $\varkappa$ von variabler Bogenlänge beschreibt, und deren Radius gleich der Bogenlänge von $\varkappa$ ist. Ebenso kann man, mit

---

[1]) Diese Bemerkung zuerst bei H. Beck [Einl. 21)]. p. 50.

[2]) D. h. auf welchem analytischen Faden von $\varkappa$ auch, der die Punkte K und K' enthält, sich K' nach K bewegt (ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern).

[3]) Einl. 1).

Lie[1]), jede Serretsche Fläche f als einen Enveloppenmantel einer Schar von nicht-isotropen Kugeln konstanten Halbmessers auffassen, deren Mittelpunkt eine krumme Minimallinie beschreibt[2]).

II. Von den Parameterdarstellungen der Mongeschen Flächen.

7. Die Ergebnisse von Nr. 3 und 4 führen zu einer einfachen geometrischen Erzeugung und analytischen Darstellung der Mongeschen Flächen. Es gilt nämlich der Satz:

Wählt man in allen Tangentialebenen m einer unebenen isotropen Fläche i, nach einem analytischen Gesetze, je eine Minimalgerade μ aus, so ist der Ort dieser Minimalgeraden μ im allgemeinen eine Mongesche Fläche.

Die Ausnahmsfälle sind:

1) Die Minimalgeraden μ fallen beständig mit den Erzeugenden von i zusammen: ihr Ort ist dann die isotrope Ausgangsfläche i. (Trivialer Fall.)

2) Die Ausgangsfläche i ist ein Minimalkegel und jede Gerade μ hat von der zu ihr parallelen Erzeugenden ι von i eine konstante, von Null verschiedene orientierte Entfernung R[3]). Der Ort der Minimalgeraden μ ist dann die (eine Regelschar (μ) der nicht-isotropen) Kugel vom Radiusquadrate R^2, deren Mittelpunkt der Scheitel S des Minimalkegels i ist[4]).

In der Tat: Da die Ebenen m bereits die isotrope Fläche i umhüllen, so kann die angegebene Konstruktion nur in dem ersten der genannten Ausnahmefälle auf eine isotrope Fläche

---

1) Einl. 6).

2) Vgl. auch Stäckel und Raffy, a.a.O. [Einl. 9) bzw. 16) und 19)].

3) Ist M ein Punkt von μ, J ein Punkt der zu μ parallelen Erzeugenden ι von i, so soll die Strecke $\overrightarrow{JM}$ die orientierte Entfernung der Geraden μ von der Geraden ι heißen.

4) Die entsprechende Erzeugung findet sich, für den besonderen Fall der Serretschen Flächen, bereits bei E. Study [Einl. 20)], p. 271.

führen. In jedem anderen Falle erhält man notwendig eine nicht-isotrope Fläche mit (mindestens) einer Schar (μ) von nicht parallelen Minimalgeraden, also [p. 152 Anm. [4])] entweder eine Mongesche Fläche oder eine nicht-isotrope Kugel. Die zweite dieser Möglichkeiten tritt dann und nur dann ein, wenn die Zentrakurve der erhaltenen Fläche sich auf einen eigentlichen Punkt S reduziert, und wenn (folglich) alle Punkte der Fläche von diesem Punkte ein konstantes, endliches, von Null verschiedenes Abstandsquadrat haben; d. h. wenn die isotrope Fläche i ein Minimalkegel vom Scheitel S, und R^2 eine beliebige, von Null verschiedene Konstante ist. In diesem Falle erhält man, je nachdem, mit welchem der beiden Werte von $\sqrt{R^2}$ man die in 2) angegebene Konstruktion ausführt, die eine oder die andere Schar von Minimalgeraden auf der Kugel vom Mittelpunkt S und vom Radiusquadrat R^2. Denn sei (μ) die Schar von Minimalgeraden auf der Kugel, die man bei Durchführung der in 2) angegebenen Konstruktion mit dem Werte $+R$ erhält, μ eine Gerade allgemeiner Lage der Schar (μ), M ein Punkt von μ, J ein Punkt der zu μ parallelen Erzeugenden ι von i; dann ist nach Konstruktion $\overrightarrow{JM} = +R$. Ist $\bar{M}$ derjenige Punkt auf der Geraden JM, für den $\overrightarrow{J\bar{M}} = -R$ ist, so liegen alle Punkte $\bar{M}$, die den Punkten M von μ auf diese Weise entsprechen, auf einer zu μ parallelen Minimalgeraden $\bar{\mu}$ [Nr. 1 (8)]. Diese gehört derselben Kugel an wie μ, aber nicht derselben Regelschar (μ), da (μ) nur alle zu μ windschiefen Erzeugenden der Kugel enthält. —

Die isotrope Ausgangsfläche i bei unserer Konstruktion ist offenbar für jede der erzeugten Flächen f die Enveloppe der Minimalebenen m durch die Minimalgeraden μ ihrer Minimalgeradenschar (μ) [bzw., bei der Kugel, einer beliebigen ihrer beiden Minimalgeradenscharen]. Wir nennen alle durch die angegebene Konstruktion aus einer bestimmten isotropen Ausgangsfläche i erhaltenen Flächen die zu der isotropen Fläche i zugehörigen Flächen. Umgekehrt nennen wir.

wenn f eine der zur isotropen Fläche i zugehörigen Flächen ist, i die zu f zugehörige isotrope Fläche.

Im folgenden unterscheiden wir diejenigen Mongeschen Flächen, deren zugehörige isotrope Fläche ein Minimalkegel ist. als Mongesche Flächen erster Art, von den Mongeschen Flächen zweiter Art, d. i. denjenigen, deren zugehörige isotrope Fläche die Tangentenfläche einer krummen Minimallinie ist[1]).

Unter den Mongeschen Flächen erster Art kann es nach dem oben Gesagten keine Serretschen Flächen geben, da die Flächen konstanten Krümmungsmaßes, deren zugehörige isotrope Fläche ein Minimalkegel ist, mit den nicht-isotropen Kugeln identisch sind.

8. Die in Nr. 7 dargestellte Erzeugungsweise der Mongeschen Flächen führt zu einer analytischen Darstellung derselben, der wir uns nunmehr zuwenden. Wir behandeln zuerst die Mongeschen Flächen erster Art.

Wir schicken einige Bemerkungen über die im folgenden, im Anschlusse an Herrn Study, angewandte symbolische Bezeichnungsweise voraus. Sei eine Kurve durch eine reguläre Parameterdarstellung

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

gegeben. Wir deuten die durch Differentiation nach dem Parameter t erhaltenen Systeme von Größen $x', y', z'; x'', y'', z''; \ldots; x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ als Koordinaten von Vektoren, und führen für die einfachsten elementaren Vektorinvarianten derselben oder die einfachsten „elementaren differentiellen Semiinvarianten der Kurve in Bezug auf die Bewegungsgruppe" folgende Bezeichnungen ein[2]):

[1]) Wo aus dem Zusammenhange deutlich hervorgeht, daß es sich um Mongesche Flächen handelt, sprechen wir einfach von Flächen erster bzw. zweiter Art.

[2]) Wir schreiben $(i\,j)_t$, $(i\,j\,k)_t$, $(i\,w)_t \ldots$ usw. dann, wenn die Veränderliche t. zur Vermeidung von Zweideutig keiten, besonders hervorgehoben werden muß.

$$(i\,j) = (i|j)_t = (x^{(i)}|x^{(j)}) = x^{(i)}x^{(j)} + y^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}z^{(j)},$$
$$(i, j = 1, 2, 3\ldots),$$

$$(i\,j\,k) = (i\,j\,k)_t = (x^{(i)}x^{(j)}x^{(k)}) = \begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(j)} & x^{(k)} \\ y^{(i)} & y^{(j)} & y^{(k)} \\ z^{(i)} & z^{(j)} & z^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3\ldots),$$

$$(i\,j|k\,l) = (i\,j|k\,l)_t = (x^{(i)}x^{(j)}|x^{(k)}x^{(l)})$$
$$= (x^{(i)}|x^{(k)})(x^{(j)}|x^{(l)}) - (x^{(j)}|x^{(k)})(x^{(i)}|x^{(l)}), \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3\ldots).$$

Ist weiter ω ein von dem Parameter t unabhängiger, willkürlicher Vektor, ω_1, ω_2, ω_3 seine Koordinaten, so führen wir für die einfachsten „elementaren differentialen Semikovarianten der Kurve in Bezug auf die Bewegungsgruppe“ entsprechend die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(\omega|\omega) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$(i|\omega) = (i|\omega)_t = (x^{(i)}|\omega) = x^{(i)}\omega_1 + y^{(i)}\omega_2 + z^{(i)}\omega_3, \quad (i = 1, 2, 3\ldots),$$

$$(i\,j\,\omega) = (i\,j\,\omega)_t = (x^{(i)}x^{(j)}\omega) = \begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(j)} & \omega_1 \\ y^{(i)} & y^{(j)} & \omega_2 \\ z^{(i)} & z^{(j)} & \omega_3 \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, 3\ldots),$$

$$(i\,j|k\,\omega) = (i\,j|k\,\omega)_t = (x^{(i)}x^{(j)}|x^{(k)}\omega)$$
$$= (x^{(i)}|x^{(k)})(x^{(j)}|\omega) - (x^{(j)}|x^{(k)})(x^{(i)}|\omega), \quad (i, j, k = 1, 2, 3\ldots).$$

In diesen Symbolen können auch zwei oder mehrere der Indizes i, j, k, l einander gleich sein.

Sei nun ξ_0, η_0, ζ_0 der Scheitel des Minimalkegels i, der zu einer analytisch darzustellenden Mongeschen Fläche erster Art gehört. Seien ferner:

$$(1)\quad \xi'(u) = i\,\frac{1-u^2}{2}, \quad \eta'(u) = -\frac{1+u^2}{2}, \quad \zeta'(u) = i\,u, \quad (i^2 = -1),$$

die drei Koordinaten eines Vektors, der einer Erzeugenden ι des Minimalkegels angehört[1]). Wir bezeichnen die jedesmalige

[1]) Die Koordinaten dieses Vektors können als die Ableitungen der Koordinaten einer durch die (nur unwesentlich abgeänderten) Weierstraßschen Formeln dargestellten Minimalkurve 3. Ordnung

Differentiation dieser Koordinaten nach dem Parameter u, den wir den Weierstraßschen Parameter nennen wollen, durch Hinzufügung eines weiteren Striches zu den schon vorhandenen, so daß

$$\begin{aligned}
&\xi''(u) = -iu, && \eta''(u) = -u, && \zeta''(u) = i, \\
&\xi'''(u) = -i, && \eta'''(u) = -1, && \zeta'''(u) = 0, \\
&\xi^{(4)}(u) = && \eta^{(4)}(u) = && \zeta^{(4)}(u) = 0 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

ist. Dann ist identisch:

$$(2) \quad \begin{cases} (1|1) = 0, & & & (123) = -1, \\ (1|2) = 0, & (2|2) = -1, & & (124) = 0, \\ (1|3) = 1, & (2|3) = 0, & (3|3) = 0, & (134) = 0, \\ (1|4) = 0 \text{ usw.} & & & \end{cases}$$

und

$$(3) \quad \begin{cases} (12\,\omega) = -(1|\omega), \; (13\,\omega) = -(2|\omega), \; (23\,\omega) = -(3|\omega), \\ (4|\omega) = 0. \end{cases}$$

Sind nun l, m, n die Koordinaten des Einheitsvektors einer orientierten Geraden γ, welche zur Tangentialebene des Minimalkegels i durch ι parallel ist, so muß nach Nr. 1 (1):

$$(4) \qquad (1|l) = 0$$

sein, und hieraus, sowie aus den ersten zwei Formeln (2) folgt

$$l = -v\xi' + r\xi''$$

nebst den entsprechenden Formeln für m und n. Wegen $(l|l) = 1$ ist weiter $r^2 = -1$, und man kann also

$$(5) \quad l = -(v\xi' + i\xi''), \; m = -(v\eta' + i\eta''), \; n = -(v\zeta' + i\zeta'')$$

setzen[1]), worin v eine von u unabhängige Größe ist.

$$\xi(u) = \frac{i}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right), \quad \eta(u) = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{u^3}{3}\right), \quad \zeta(u) = \frac{i}{2}u^2, \quad (i^2 = -1),$$

nach dem Parameter u aufgefaßt werden. Daran, und nur daran, soll die Bezeichnung „Weierstraßscher Parameter" für u erinnern.

[1]) Wir bemerken ausdrücklich, daß hier, wie in allen folgenden

Die Erzeugende μ der darzustellenden Mongeschen Fläche f ist zu derjenigen Erzeugenden ι des Minimalkegels i parallel, die mit ihr in derselben Tangentialebene dieses Kegels liegt. Jeder Punkt M von μ hat daher von jedem Punkte von ι, also auch vom Kegelscheitel S einen längs μ konstanten orientierten Abstand:

$$\overrightarrow{MS} = R;$$

R ist dabei [Nr. 3 und Nr. 1 (7)] der Hauptkrümmungsradius von f längs μ, und daher im Falle der Flächen erster Art eine nicht konstante Funktion von u [im Falle der Kugel konstant].

Eine jede Mongesche Fläche erster Art [sowie jede Kugel] läßt sich also durch die Gleichungen

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x = \xi_0 + R(u)\,(v\xi'(u) + i\xi''(u)) = \xi_0 + R(u)\left(u + i\,\dfrac{1-u^2}{2}\,v\right), \\ y = \eta_0 + R(u)(v\eta'(u) + i\eta''(u)) = \eta_0 + R(u)\left(-iu - \dfrac{1+u^2}{2}\,v\right), \\ z = \zeta_0 + R(u)\,(v\zeta'(u) + i\zeta''(u)) = \zeta_0 + R(u)\,(-1 + iuv) \end{cases}$$

mittels der Parameter u, v darstellen[1]); bei dieser Darstellung ist die Kurvenschar $u = \text{const.}$ die [eine] Schar von Minimalgeraden auf der Fläche.

Für die Fundamentalgrößen erster bzw. zweiter Art E, F, G; D, D', D'' der Fläche erhält man, wenn die Differentiation nach u durch Anhängung von Strichen bezeichnet wird:

$$(6)\quad \begin{cases} E = -R^2v^2 + R'^2, \qquad F = iR^2, \qquad G = 0; \\ D = \dfrac{1}{R}(2R'^2 - RR'' - iRR'v - R^2v^2), \quad D' = iR, \quad D'' = 0. \end{cases}$$

Formeln stets i als Repräsentant von $\sqrt{-1}$ steht; man kann also in jeder Formel das (explizite stehende) i durch $-i$ ersetzen, ohne daß sie aufhört, richtig zu sein.

[1]) Bemerken wir, daß durch Vertauschung von R mit $-R$ die Fläche (I) in eine in Bezug auf den Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) symmetrische Fläche übergeht, und daß wegen (10) die beiden Flächen aufeinander abwickelbar sind.

Dabei ist für $\sqrt{EG-F^2}$ der Wert

$$(7)\qquad \sqrt{EG-F^2} = iF = -R^2$$

gewählt, wodurch die Flächennormalen in stetiger Weise orientiert sind. Aus den Ausdrücken (6) ersieht man die (bekannte) Tatsache, daß auf einer Fläche erster Art die zweite Schar von Minimallinien, sowie die zweite Schar von Asymptotenlinien je durch Integration einer Riccatischen Differentialgleichung gefunden werden.

Für die Richtungscosinus a, b, c der Flächennormalen hat man:

$$(8)\qquad \begin{cases} a = -\left(i\,\frac{1-u^2}{2}\,v + u\right) + \frac{1-u^2}{2}\,\frac{R'}{R}, \\ b = -\left(-\frac{1+u^2}{2}\,v - iu\right) + i\,\frac{1+u^2}{2}\,\frac{R'}{R}, \\ c = -(iuv-1) + u\,\frac{R'}{R}; \end{cases}$$

und für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$(9)\qquad \left\{ \mathfrak{x} = \xi_0 + \frac{1-u^2}{2}\,R', \quad \mathfrak{y} = \eta_0 + i\,\frac{1+u^2}{2}\,R', \quad \mathfrak{z} = \zeta_0 + uR'. \right.$$

Endlich wird das quadrierte Bogenelement:

$$(10)\qquad ds^2 = (-R^2v^2 + R'^2)\,du^2 + 2iR^2\,du\,dv.$$

Man verifiziert mittels dieser Formeln für die Flächen erster Art leicht die bisher aufgestellten Sätze.

Schließlich läßt sich jede Fläche erster Art auch durch eine einzige Gleichung zwischen den Koordinaten x, y, z eines ihrer Punkte darstellen. Aus (I) folgt nämlich sukzessive:

$$(11)\left\{\begin{aligned} R(u) &= \sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2},\\ v &= \frac{(x-\xi_0)-i(y-\eta_0)}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}},\\ u &= \frac{(x-\xi_0)+i(y-\eta_0)}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}-(z-\zeta_0)}\\ &= \frac{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}+(z-\zeta_0)}{(x-\xi_0)-i(y-\eta_0)},\end{aligned}\right.$$

wobei das Wurzelzeichen in allen Formeln auf die gleiche Art zu bestimmen ist. Aus (11) ergibt sich die Gleichung der Mongeschen Flächen erster Art in jeder der beiden äquivalenten Formen:

$$(\mathrm{I\,a})\left\{\begin{aligned} &\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}\\ &= R\left(\frac{x-\xi_0+i(y-\eta_0)}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}-(z-\zeta_0)}\right),\\ &\text{oder:}\\ &\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}\\ &= R\left(\frac{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2+(z-\zeta_0)^2}+(z-\zeta_0)}{x-\xi_0-i(y-\eta_0)}\right).\end{aligned}\right.$$

Von den aus (I) und (Ia) entspringenden Folgesätzen erwähnen wir diese:

1) Man erhält alle **algebraischen** Mongeschen Flächen erster Art, indem man in den Gleichungen (I) für den Hauptkrümmungsradius R der Fläche irgend eine algebraische Funktion des Weierstraßschen Parameters u wählt. Die geometrische Bedeutung des Argumentes u ist dabei aus der dritten Formel (11) ersichtlich.

2) Jede Mongesche Fläche erster Art läßt sich aus derjenigen Fläche gleicher Art, deren Hauptkrümmungsradius dieselbe Funktion des Weierstraßschen Parameters u, und deren zugehörige isotrope Fläche der Minimalkegel des Anfangspunktes ist, durch bloße

Verschiebung und Spiegelung am Scheitel des verschobenen zugehörigen Minimalkegels erzeugen.

3) Das Krümmungsmaß in einem Punkte einer Mongeschen Fläche erster Art ist gleich dem reziproken quadrierten Abstande des Punktes vom Scheitel des zugehörigen Minimalkegels.

9. Um zu einer Darstellung der Mongeschen Flächen zweiter Art zu gelangen, die den in Nr. 7 angestellten geometrischen Überlegungen entspricht, stellen wir die drei Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p dar, d. h. eines solchen, der dem simultanen System

$$(1|1)_p = 0, \qquad (2|2)_p = -1, \qquad (123)_p = -1$$

genügt. Die Tangentenfläche der krummen Minimallinie λ ist dann durch

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi(p) + \xi'(p) \cdot q_1, \qquad \mathfrak{y} = \eta(p) + \eta'(p) \cdot q_1, \qquad \mathfrak{z} = \zeta(p) + \zeta'(p) \cdot q_1$$

gegeben, wo der Strich die Differentiation nach p zu zeigt, und q_1 eine von p unabhängige Veränderliche bedeutet.

Es bestehen jetzt die Identitäten:

$$(2) \quad \begin{cases} (1|1) = 0, & & & (123) = -1, \\ (1|2) = 0, & (2|2) = -1, & & (124) = 0, \\ (1|3) = 1, & (2|3) = 0, & (3|3) = J, & (134) = J, \\ (1|4) = 0, & (2|4) = -J, & (3|4) = \frac{1}{2}J', & (234) = -\frac{1}{2}J', \end{cases}$$

wenn die charakteristische Invariante $(3|3)_p$ der Minimallinie mit $J(p)$ bezeichnet wird. Ferner ist identisch:

$$(3) \quad \begin{cases} (12\,\omega) = -(1|\omega), \qquad (13\,\omega) = -(2|\omega), \\ (23\,\omega) = J(1|\omega) - (3|\omega), \quad \| \; (4|\omega) = \frac{1}{2}J'(1|\omega) + J(2|\omega). \end{cases}$$

Sind l, m, n die Koordinaten des Einheitsvektors einer orientierten Geraden γ, welche zur Schmiegungsebene der Minimalkurve im Punkte (ξ, η, ζ) parallel ist, so ist wieder:

(4) $$(1|l) = 0, \qquad (l|l) = 1,$$

und man kann wiederum

(5) $$l = -(q\xi' + i\xi''),\ m = -(q\eta' + i\eta''),\ n = -(q\zeta' + i\zeta'')$$

setzen, worin q eine von p unabhängige Größe ist.

Eine jede Mongesche Fläche zweiter Art läßt sich dann durch die Gleichungen

(II) $$\begin{cases} x = \xi(p) + R(p)\,(q\,\xi'(p) + i\,\xi''(p)),\\ y = \eta(p) + R(p)\,(q\eta'(p) + i\eta''(p)),\\ z = \zeta(p) + R(p)\,(q\,\zeta'(p) + i\,\zeta''(p)) \end{cases}$$

mittels der Parameter p, q darstellen[1]); ξ, η, ζ, R sind darin analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich. Bei dieser Darstellung ist die Kurvenschar $p =$ const. die Schar von Minimalgeraden, und $R(p)$ der Hauptkrümmungsradius der Fläche.

Für die Fundamentalgrößen erster bzw. zweiter Art E, F, G; D, D', D'' der Fläche erhält man hier:

(6) $$\begin{cases} E = -R^2(q^2 + J) + 2\,i\,R + R'^2, \quad F = i\,R^2, \quad G = 0,\\ D = \dfrac{1}{R}\,(2\,R'^2 - R\,R'' + i\,R - i\,R\,R'q - R^2 q^2 - R^2 J).\\ \qquad D' = i\,R, \qquad D'' = 0; \end{cases}$$

dabei ist wieder für $\sqrt{EG - F^2}$ der Wert

(7) $$\sqrt{EG - F^2} = i\,F = -R^2$$

gewählt. Aus den Ausdrücken (6) ersieht man den (bekannten)

[1]) Die Vertauschung von R mit $-R$ entspricht einer Umkehrung der Orientierung der Geraden γ bei der Konstruktion in Nr. 7, führt also die Fläche (I) in eine in Bezug auf die Minimalkurve (ξ, η, ζ) symmetrische Fläche über. Die beiden Flächen sind hier nicht mehr so aufeinander abwickelbar, daß symmetrisch zur Minimalkurve (ξ, η, ζ) gelegene Punkte einander entsprechen. Für den Fall der Serretschen Flächen ($R =$ const) findet sich die entsprechende Darstellung bereits bei E. Study [Einl. 20)], p. 270. Ebendort, auf p. 271, eine kurze Bemerkung über die Darstellung aller algebraischen Serretschen Flächen.

Satz, daß auf einer Fläche zweiter Art die zweite Schar von Minimallinien, sowie die zweite Schar von Asymptotenlinien je durch Integration einer Riccatischen Differentialgleichung gefunden werden.

Die Richtungskosinus a, b, c der Flächennormalen werden

$$(8) \qquad a = -(q\xi' + i\xi'') - \frac{i}{R}\xi' R'$$

nebst den entsprechenden Formeln für b und c. Für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Fläche hat man

$$(9) \quad \mathfrak{x} = \xi - iR'\xi', \quad \mathfrak{y} = \eta - iR'\eta', \quad \mathfrak{z} = \zeta - iR'\zeta';$$

und für das quadrierte Bogenelement:

$$(10) \quad ds^2 = (-R^2(q^2 + J) + 2iR + R'^2)\,dp^2 + 2iR^2\,dp\,dq.$$

Für $R = \text{const}$ erhält man insbesondere eine Serretsche Fläche. —

Ehe wir dazu übergehen, alle algebraischen Flächen zweiter Art zu bestimmen, leiten wir noch kurz eine der Darstellung (II) entsprechende Darstellung der Mongeschen Flächen erster Art ab, die wir im dritten Teile dieser Arbeit benötigen.

Sind, wie bisher, $\xi(p)$, $\eta(p)$, $\zeta(p)$ die Koordinaten der Punkte einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p, so stellen die Gleichungen

$$(11) \qquad \mathfrak{x} = \xi'(p), \qquad \mathfrak{y} = \eta'(p), \qquad \mathfrak{z} = \zeta'(p),$$

in denen wieder der Index Differentiation nach p bezeichnet, eine krumme Linie $\varkappa$ auf dem Minimalkegel des Anfangspunktes dar; $\varkappa$ ist das sphärische Bild[1]) oder ein Bestandteil des sphärischen Bildes von λ und p ist auch natürlicher Parameter der krummen Linie $\varkappa$[2]). Bezeichnet man die Bogenlänge von $\varkappa$ mit $s(p)$, so kann man

---

[1]) Vgl. E. Study, A. C.

[2]) Unter einem natürlichen Parameter p einer krummen Linie $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ auf dem Minimalkegel des Anfangspunktes versteht man einen solchen Parameter, der dem simultanen System

(12) $$s = ip$$

setzen, und daher nach Nr. 6 (a) für den Hauptkrümmungsradius $R(p)$ einer beliebigen Mongeschen Fläche erster Art f, welche die Kurve $\varkappa$ zur Zentrakurve hat, den Wert

(13) $$R = i(p + a), \quad (a \text{ Integrationskonstante}),$$

annehmen.

Als Gleichungen irgend einer Mongeschen Fläche erster Art, welche die krumme Linie (11) auf dem Minimalkegel des Anfangspunktes zur Zentrakurve hat, erhält man so unschwer

(I*) $$\begin{cases} x = \xi'(1 + iq) - \xi''(p + a), \\ y = \eta'(1 + iq) - \eta''(p + a), \quad (a \text{ willk. Konstante}) \\ z = \zeta'(1 + iq) - \zeta''(p + a); \end{cases}$$

darin bedeutet q einen von p unabhängigen Parameter. —

Endlich wollen wir noch alle algebraischen Mongeschen Flächen zweiter Art bestimmen; zu diesem Zwecke leiten wir eine weitere Parameterdarstellung derselben ab.

Wir denken die Minimalkurve, von der wir ausgingen, durch die (nur unwesentlich abgeänderten) Weierstraßschen Formeln

(Ia) $$\begin{cases} \xi = i\dfrac{1 - u^2}{2} f''(u) + iuf'(u) - if(u), \\ \eta = -\dfrac{1 + u^2}{2} f''(u) + uf'(u) - f(u). \\ \zeta = iuf''(u) - if'(u), \end{cases}$$

gegeben; darin ist $f(u)$ eine Funktion des „Weierstraßschen Parameters“ u,

$$f^{(k)}(u) = \frac{d^k f}{du^k}, \quad (k = 1, 2 \ldots),$$

und es muß:

$$f'''(u) \neq 0$$

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = 0, \quad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dp}\,\frac{d\mathfrak{x}}{dp}\right) = -1, \quad \left(\mathfrak{x}\,\frac{d\mathfrak{x}}{dp}\,\frac{d^2\mathfrak{x}}{dp^2}\right) = -1$$

genügt.

sein[1]). Der Zusammenhang des Weierstraßschen Parameters u mit einem natürlichen Parameter p der Minimalkurve wird durch die Identität

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d\xi}{du}\;\frac{d^2\xi}{du^2}\;\frac{d^3\xi}{du^3}\right)}{\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\;\;\frac{d^2\xi}{du^2}\right)} = f'''(u)$$

vermittelt.

Man erhält dann als entsprechende Darstellung einer Mongeschen Fläche zweiter Art, wenn $R(u)$ ihren Hauptkrümmungsradius in Funktion des Weierstraßschen Parameters u darstellt:

$$\text{(II a)}\quad \begin{cases} x = i\,\dfrac{1-u^2}{2}\,f''(u) + i\,u f'(u) - i f(u) \\ \quad + R(u)\left\{i\,\dfrac{1-u^2}{2}\left(v f'''(u) + i\,\dfrac{f^{(4)}(u)}{f'''(u)}\right) + u\right\}. \\ y = -\,\dfrac{1+u^2}{2}\,f''(u) + u f'(u) - f(u) \\ \quad + R(u)\left\{-\,\dfrac{1+u^2}{2}\left(v f'''(u) + i\,\dfrac{f^{(4)}(u)}{f'''(u)}\right) - i\,u\right\}. \\ z = i\,u f''(u) - i f'(u) \\ \quad + R(u)\left\{i\,u\left(v f'''(u) + i\,\dfrac{f^{(4)}(u)}{f'''(u)}\right) - 1\right\}: \end{cases}$$

dabei bedeutet v einen von u unabhängigen Parameter, und R, f sind analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich.

Die Kurvenschar $u = \text{const}$ ist auch hier wieder die Schar der Minimalgeraden auf der Fläche.

---

[1]) Der Fall $f'''(u) = 0$, $f(u) = c_0 u^2 + 2\,c_1 u + c_2$ führt auf

$$\xi = i(c_0 - c_2), \qquad \eta = -\,(c_0 + c_2), \qquad \zeta = -\,2\,c_1 i\,,$$

d. h. gerade auf den in Nr. 8 behandelten Fall; dort ist nur insoferne eine Abänderung getroffen. als $c_0 = 1$ gewählt ist, während trotzdem ξ, η, ζ als beliebige Konstanten angenommen sind.

Späterer Anwendung wegen schreiben wir hier auch die aus (II a) folgenden Formeln für die Koordinaten des Hauptkrümmungsmittelpunktes der Fläche an; sie lauten:

$$
(9\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = i\,\dfrac{1-u^2}{2}\,(f''(u) - i\,R'(u)) + i\,u\,f'(u) - i\,f(u), \\[2mm] \mathfrak{y} = -\,\dfrac{1+u^2}{2}\,(f''(u) - i\,R'(u)) + u\,f'(u) - f(u), \\[2mm] \mathfrak{z} = i\,u(f''(u) - i\,R'(u)) - i\,f'(u). \end{cases}
$$

Mit Berücksichtigung des bekannten Satzes, daß die Formeln (1a) immer dann, und nur dann, wenn $f(u)$ eine algebraische Funktion von u ist, eine algebraische Minimalkurve darstellen, beweist man unschwer folgenden Satz:

Die **algebraischen** Mongeschen Flächen zweiter Art sind vollständig dadurch charakterisiert, daß ihre zugehörige isotrope Fläche Tangentenfläche einer algebraischen (krummen) Minimallinie und zugleich ihr Hauptkrümmungsradius eine algebraische Funktion des Weierstraßschen Parameters dieser Minimallinie ist. Insbesondere ist jede Serretsche Fläche, deren Zentrakurve eine (krumme) algebraische Minimallinie ist, algebraisch, und umgekehrt hat jede algebraische Serretsche Fläche eine (krumme) algebraische Minimallinie zur Zentrakurve.

In der Tat ist zunächst, wenn in (II a) $f(u)$ und $R(u)$ algebraische Funktionen ihres Argumentes sind, die durch (II a) dargestellte Fläche zweiter Art algebraisch.

Sei umgekehrt eine algebraische Fläche zweiter Art gegeben (etwa durch die Gleichung $z = A(x, y)$ zwischen den cartesischen Koordinaten eines Punktes, wobei A eine algebraische Funktion bedeutet). Dann ergibt die aus (II a) abgeleitete Gleichung

$$
\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v} + i\,\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}} = -\,u
$$

fast unmittelbar, daß u eine algebraische Funktion von x, y ist. Die linke Seite dieser Formel läßt sich nämlich berechnen, da sie sich auf eine Ortsveränderung längs einer Minimalkurve der Fläche bezieht: bezeichnen p und q die ersten partiellen Ableitungen von z nach x und y, so bestimmen die Gleichungen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

zwei verschiedene Wertsysteme

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z \text{ bzw. } \delta' x,\ \delta' y,\ \delta' z$$

für dx, dy, dz. Man hat dann entweder

$$-u = \frac{\delta x + i\,\delta y}{\delta z}, \quad \text{oder} \quad -u = \frac{\delta' x + i\,\delta' y}{\delta z},$$

wo rechts in jedem Falle eine algebraische Funktion von x und y steht.[1]) Anderseits ist nach Voraussetzung auch das Krümmungsmaß K der Fläche, also auch $\frac{1}{\sqrt{K}}$ eine algebraische Funktion von x, y; da nun aber bei den Mongeschen Flächen $\frac{1}{\sqrt{K}}$ eine Funktion $\pm R(u)$ von u allein ist, so folgt aus beiden Bemerkungen, daß auch $R(u)$ eine algebraische Funktion von u ist.

Aus den Gleichungen (IIa) leitet man ferner die Identität

$$i\,\frac{1-u^2}{2}\,x - \frac{1+u^2}{2}\,y + i\,u\,z = f(u)$$

ab, aus welcher durch genau die gleiche Schlußweise folgt, daß $f(u)$ ebenfalls eine algebraische Funktion von u sein muß.

Damit ist der Beweis des obigen Satzes geführt. Zusammen mit dem Satze [Nr. 8 1)] löst dieser Satz die Aufgabe der Bestimmung aller algebraischen Mongeschen Flächen vollständig. Wir werden weiter unten noch eine fundamentale geometrische Eigenschaft dieser algebraischen Flächen kennen lernen.

---

1) Dieser Schluß bei G. Darboux, Théorie générale des surfaces I. Paris (1887), p. 290 f.

10. Die Formeln Nr. 8 (9) und Nr. 9 (9a) führen infolge des Bestehens der Relation Nr. 6 (a) auf ein Verfahren, die Gleichung

(1) $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \qquad (s \neq \text{const})$$

ohne Anwendung von Integralzeichen zu lösen. Das Gleichungssystem

(2) $$x = \xi_0 + \frac{1-t^2}{2} s'(t), \qquad y = \eta_0 + i\frac{1+t^2}{2} s'(t),$$
$$z = \zeta_0 + t s'(t), \qquad \left(s' = \frac{ds}{dt}\right),$$

worin ξ_0, η_0, ζ_0 beliebige Konstante, und s eine beliebige Funktion des Parameters t ist, liefert nämlich alle Lösungen der Gleichung (1), die zugleich der Relation

(3) $$(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2 = 0$$

genügen, d. h. alle nicht-isotropen Kurven auf dem Minimalkegel des beliebig angenommenen Punktes (ξ_0, η_0, ζ_0)[1]. Sieht man ferner von dem trivialen Lösungssysteme

$$x = \alpha s + a, \qquad y = \beta s + b, \qquad z = \gamma s + c,$$
$$(\alpha, \beta, \gamma;\ a, b, c \text{ Konstante};\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1),$$

das die nicht-isotropen Geraden liefert, ab, so sind alle übrigen Lösungen der Gleichung (1) durch die Formeln[2])

[1]) Diese Darstellung der nicht-isotropen Kurven auf einem Minimalkegel findet sich (mit $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$) in § 6 der Abhandlung: L. P. Eisenhart, A fundamental parametric representation of space curves. Annals of Math. (II) 13 (1911—12), p. 17—34. Herr de Montcheuil hat schon [Einl. 10)], p. 55 eine Translationsfläche zweier solcher Kurven mit Benutzung dieser Formeln dargestellt.

[2]) Dieses Formelsystem zur Auflösung der Gleichung (1) findet sich bereits (abgesehen von ganz unwesentlichen Veränderungen) in der Abhandlung: M. de Montcheuil, Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis. Bull. Soc. Math. France 31 (1903), p. 233 bis 258, 32 (1904), p. 152—185, u. z. Bd. 31, p. 235. Es wird schon in der Thèse des Herrn de Montcheuil gestreift, wenn auch nicht direkt angeschrieben, [Einl. 10)], p. 47.

$$(4)\quad \begin{cases} x = i\,\dfrac{1-t^2}{2}\,\{f''(t) - i s'(t)\} + i t f'(t) - i f(t), \\ y = -\dfrac{1+t^2}{2}\,\{f''(t) - i s'(t)\} + t f'(t) - f(t), \\ z = i t\,\{f''(t) - i s'(t)\} - i f'(t), \end{cases} \qquad \left(s' = \frac{ds}{dt},\ f' = \frac{df}{dt}, \text{ usw.}\right)$$

darstellbar, wo f und s (analytische) Funktionen des Parameters t mit gemeinsamem Existenzbereich sind, von denen s völlig beliebig bleibt, während f der Bedingung

$$f''' \neq 0$$

genügen muß.

Die Gleichungen (4) bilden eine Verallgemeinerung der bekannten Weierstraßschen Darstellung der krummen Minimallinien. Sie stellen je ∞^{∞} Lösungen der Gleichung (1) mit Hilfe einer Lösung der Gleichung

$$(5)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

dar: für einen bestimmt angenommenen Wert von f liefern sie alle nicht-isotropen krummen Linien auf der Tangentenfläche derjenigen krummen Minimallinie, welche durch (4) mit $s'(t) = 0$ dargestellt ist.

Das System (4) enthält, wenn man die Bedingung

$$f''' \neq 0$$

fallen läßt, was im folgenden stets geschehen soll, das System (2) als Spezialfall. In der Tat erhält man für $f = a t^2 + 2 b t + c$ aus dem System (4) das mit (2) identische System

$$(2^*)\qquad x = \frac{1-t^2}{2}\,s'(t) + i(a-c), \quad y = -\frac{1+t^2}{2}\,s'(t) - (a+c), \quad z = t s'(t) - 2 i b;$$

a, b, c sind dabei willkürliche Konstante.

Aus den Gleichungen (4) folgt

$$(6)\qquad t = -\frac{ds - dz}{dx - i\,dy} = -\frac{dx + i\,dy}{ds + dz}$$

und

(7) $$f = i\,\frac{1-t^2}{2}\,x - \frac{1+t^2}{2}\,y + i\,t\,z.$$

Man erhält demnach alle algebraisch rektifizierbaren (nicht-isotropen) krummen Linien, wenn man in dem Gleichungssystem (4) für f und s beliebige algebraische Funktionen von t einsetzt.

Es ist hier am Platze, den Zusammenhang des Systems (4) mit dem gleichfalls von Herrn de Montcheuil[1]) zuerst angegebenen, von Herrn Salkowski[2]) zur Bestimmung aller algebraisch rektifizierbaren Raumkurven benutzten Gleichungssysteme

(8) $$\begin{cases} x = v' + (u w' - w), & i y = v' - (u w' - w), \\ z = w' - (u v' - v), & s = w' + (u v' - v) \end{cases}$$

anzugeben. In (8) bedeuten v, w (analytische) Funktionen der unabhängigen Veränderlichen u mit gemeinsamem Existenzbereich, und die Indizes Differentiation nach u.

Ersetzt man nämlich in (4) y durch $-y$ und t durch $u \equiv -t$, so erhält man:

---

[1]) Die ersten drei Gleichungen des Systems (8), sowie eine geometrische Deutung derselben finden sich (mit etwas anderer Bezeichnungsweise) bereits in der Thèse [Einl. 10] des Herrn de Montcheuil auf p. 9 bzw. 15 f. (1902). Das vollständige System (8) in: M. de Montcheuil, Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Bull. Soc. Math. France 33 (1905), p. 170—171. Etwa gleichzeitig damit erschien die kurze, aber inhaltsreiche Note: E. Vessiot, Sur les courbes minima. C. R. Ac. sc. Paris 140 (1905), p. 1381—1384, in der u. a. ein dem Gleichungssystem (8) sehr ähnliches und mit ihm durch einfache Substitutionen verknüpftes System angegeben wird.

[2]) E. Salkowski, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven. Math. Ann. 67 (1909), p. 445—458. Außerdem beschäftigen sich mit dem System (8) noch eingehender: die Abhandlung L. Raffy [Einl. 19), (III. un mode de représentation des courbes gauches. Courbure. Torsion. p. 159 bis 163)] sowie die weiter oben zitierte Abhandlung des Herrn Eisenhart. — Die Darstellungen (4), (8) und ähnliche beruhen wesentlich auf der Verwendung des (von Herrn Eisenhart so genannten) durch (6) bezw. (6*) definierten Normalparameters.

$$(4^*)\qquad \begin{cases} x = i\,\dfrac{1-u^2}{2}\,(f'' + i s') + i u f' - i f, \\ y = \dfrac{1+u^2}{2}\,(f'' + i s') - u f' + f, \\ z = -\,i u (f'' + i s') + i f, \end{cases}$$

worin der Strich jetzt die Differentiation nach

$$(6^*)\qquad u = \frac{dx - i\,dy}{ds + dz} = \frac{ds - dz}{dx + i\,dy}$$

bedeutet. Der Zusammenhang zwischen den Gleichungssystemen (4*) und (8) wird durch die Beziehungen

$$(9)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{i f' - s}{2}, \quad w = i f - u\,\dfrac{i f' - s}{2}; \\ f = -\,i(u v + w), \quad s = w' + (u v' - v) \end{cases}$$

vermittelt.

Die an das Gleichungssystem (4) geknüpfte Bemerkung über die algebraisch rektifizierbaren (nicht-isotropen) krummen Linien gestattet nun auch eine Anwendung auf die algebraischen Mongeschen Flächen. Es gilt nämlich der Satz:

Jede **algebraische** Mongesche Fläche hat zur Zentrakurve eine algebraisch rektifizierbare (nicht-isotrope krumme) Linie oder eine algebraische (krumme) Minimallinie. Umgekehrt ist jede Mongesche Fläche, deren Zentrakurve eine algebraisch rektifizierbare (nicht-isotrope krumme) Linie oder eine algebraische (krumme) Minimallinie ist, algebraisch.

Für die Serretschen Flächen, also für den Fall einer isotropen Zentrakurve, wurde der Satz bereits in Nr. 9 bewiesen; der Beweis ist also nur noch für die Mongeschen Flächen veränderlichen Krümmungsmaßes zu erbringen.

Sei f eine solche algebraische Fläche erster [zweiter] Art. Sie läßt sich durch Gleichungen der Form Nr. 8 (I), [Nr. 9 (II a)] darstellen, und in diesen Gleichungen ist R [sind R und f] algebraische Funktionen des Weierstraßschen Para-

meters u. Ist nun $\varkappa$ die Zentrakurve der Fläche f, und s die Bogenlänge von $\varkappa$, so ist nach Nr. 6 (a)

$$\frac{dR}{ds} = 1,$$

also

$$(\alpha) \qquad R(u) = s(u) + \text{const},$$

wobei die Konstante sich durch die Wahl des Anfangspunktes der Bogenlänge auf der Kurve $\varkappa$ bestimmt. Durch geeignete Wahl dieses Anfangspunktes kann man es stets erreichen, daß

$$(\beta) \qquad R(u) = s(u)$$

wird. Setzt man diesen Wert von $R(u)$ in die Gleichungen Nr. 8 (9), [Nr. 9 (9a)] ein, so nehmen diese die Form (2) [(4)] an. Da hierin s [f und s] algebraische Funktionen des Parameters u sind, so ist $\varkappa$ in der Tat eine algebraisch rektifizierbare Linie.

Sei umgekehrt eine algebraisch rektifizierbare, nicht-isotrope krumme Linie $\varkappa$ vorgelegt. Dann läßt sie sich durch Gleichungen der Form (4) darstellen[1]), in denen $f(u)$ und $s(u)$ algebraische Funktionen des Parameters u sind. Die krumme Linie $\varkappa$ liegt demnach auf derjenigen unebenen isotropen Fläche i, deren Spitze [bzw. deren Gratlinie] durch (4) mit $s'(u) = 0$ dargestellt wird. Ist i kein Minimalkegel, dann ist ihre Gratlinie eine algebraische krumme Minimallinie, da $f(u)$ eine algebraische Funktion des (nunmehr Weierstraßschen) Parameters u ist.

Ist nunmehr f eine Mongesche Fläche, deren Zentrakurve $\varkappa$, und deren zugehörige isotrope Fläche i ist, so schließt man ebenso wie oben, daß ihr Hauptkrümmungsradius $R(u)$ mit der algebraischen Funktion $s(u)$ des Weierstraßschen Para-

---

[1]) Im allgemeinen sogar auf zwei verschiedene Arten; nur für die singulären ebenen krummen Linien gibt es bloß eine einzige Art der Darstellung durch Gleichungen der Form (4). Vgl. dazu Nr. 11. — Natürlich ist jetzt in (4) statt t überall u zu schreiben.

meters u durch die Relation (α) verknüpft, also eine algebraische Funktion von u ist. Nach dem Satze Nr. 8 1) [bzw. dem entsprechenden in Nr. 9] ist also f eine algebraische Fläche; w. z. b. w.

11. In anderer Hinsicht sind die drei Gleichungen Nr. 9 (9) für die Kurventheorie, sowie für die Theorie der Mongeschen Flächen von Interesse. Man kann sie in die Form

$$(1) \qquad x = \xi - is'\xi', \qquad y = \eta - is'\eta', \qquad z = \zeta - is'\zeta'$$

umschreiben; dabei bedeuten ξ, η, ζ die Koordinaten der Punkte einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p. s eine im übrigen willkürliche (analytische) Funktion von p, die mit ξ, η, ζ ein gemeinsames Existenzbereich hat; und die Indizes bezeichnen die Differentiation nach p.

Die Formeln (1) stellen, wenn s keine Konstante ist, eine nicht-isotrope (krumme) Linie $\varkappa$ dar, die auf der Tangentenfläche i der Minimallinie λ liegt. Es fragt sich zunächst, welche krummen Linien überhaupt durch die Gleichungen (1) darstellbar sind.

Sei L ein Punkt von λ, K der entsprechende von $\varkappa$; dann liegt die Tangente ν von $\varkappa$ in K in der Schmiegungsebene l von λ in L. Umgekehrt ist die Ebene l eine der beiden isotropen Ebenen durch die Tangente ν von $\varkappa$ in K, und die Tangentenfläche der Minimalkurve λ erscheint also als die Enveloppe einer der beiden isotropen Ebenen durch jede Tangente der Kurve $\varkappa$. Die Tangente ι von λ in L ist eine isotrope Gerade der Minimalebene l, die auch ν enthält, und steht also nach Nr. 1 (1) zu ν senkrecht. Die Minimalkurve λ ist demnach eine der beiden Minimalevoluten der krummen Linie $\varkappa$, und L ist, nach einer von Herrn Study[1]) eingeführten Bezeichnung, der Scheitel des Punktes K von $\varkappa$.

Nehmen wir noch den bisher ausgenommenen Fall hinzu, daß $\varkappa$ mit λ zusammenfällt, also eine Minimallinie ist, so folgt:

[1]) A. C.; die dort gemachten Ausführungen bilden die Grundlage des Folgenden.

Die Formeln (1) gestatten die Darstellung aller derjenigen krummen Linien $\varkappa$, für welche mindestens der eine der beiden Orte der Scheitelpunkte eine nicht degenerierte krumme Minimallinie ist, d. h. aller krummen Linien mit Ausnahme der regulären und singulären Kreise[1]). Die Funktion s bedeutet dabei die (bei Minimalkurven konstante) Bogenlänge der krummen Linie $\varkappa$.

Ist s veränderlich und besteht nicht die Bedingung:

$$(2) \qquad 1 - 4is'' - 3s''^2 + 2s's''' + s'^2 J = 0,$$

in der J die Invariante $(3|3)_p$ der krummen Minimallinie λ bedeutet, so stellen die Formeln (1) eine reguläre Kurve $\varkappa$ dar. Seien

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(x'x''|x'x'')}{(x'|x')^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{(x'x''x''')}{(x'x''|x'x'')}$$

bzw. das Quadrat der Krümmung und die Torsion der Kurve $\varkappa$ im Punkte K, der zum Werte $s(p)$ der Bogenlänge gehört. Dann gilt der Satz:

Die charakteristischen Invarianten[2]) $\Phi = \frac{1}{r^2}$ und $\Psi = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$ jeder regulären Kurve, mit Ausnahme der regulären Kreise, lassen sich durch die charakteristische Invariante J einer krummen Minimallinie und ihre Ableitung nach einem natürlichen Parameter dieser Minimallinie, sowie durch die Ableitungen der Bogenlänge der Kurve selbst nach diesem natürlichen Parameter ausdrücken[3]), und zwar folgendermaßen:

---

[1]) Jeder singuläre Kreis kann definiert werden als der Schnitt eines Minimalkegels mit einer die Spitze des Minimalkegels nicht enthaltenden Minimalebene. Vgl. auch Nr. 13 Anm. [1]), p. 191.

[2]) E. Study, A. C.

[3]) Daß sich alle fundamentalen Elemente einer krummen Linie aus denjenigen ableiten lassen, die sich auf ihre zwei Minimalevoluten beziehen, hat bereits Herr Vessiot in der weiter oben zitierten Note ausgesprochen. Die dort angekündigte Arbeit, in der u. a. dieser Gedanke weiter ausgeführt werden sollte, scheint nicht erschienen zu sein.

$$(3)\quad \begin{cases} \Phi = -\dfrac{1 - 4is'' - 3s''^2 + 2s's''' + s'^2 J}{s'^4}, \\ \Psi = \\ -\dfrac{(1-is'')(1-2is'')(1-3is'')+2s's'''(2-3is'')+is'^2 s^{(4)}+s'^2(1-is'')J+\frac{1}{2}is'^3 J}{s'^6} \end{cases}$$

Besteht dagegen die Gleichung (2) identisch für jeden Wert von p, so stellen die Formeln (1) eine krumme ebene singuläre Linie dar. Sei als System von charakteristischen Invarianten für eine solche krumme Linie das System der beiden Größen

$$F = \frac{A}{(x'|x')(x'x''\omega)}, \qquad F_1 = -\frac{(x'|x')B - 5(x'|x'')A}{(x'|x')^2(x'x''|x'\omega)}$$

gewählt, in denen

$$A = (x'x''|x'\omega) - 3(x'x''|x''\omega),$$

$$B = \frac{dA}{dp} = (x'x^{(4)}|x'\omega) - (x'x'''|x''\omega) - 4(x'x''|x'''\omega)$$

ist. Dann gilt der Satz:

Für jede krumme ebene singuläre Linie, mit Ausnahme der singulären Kreise, lassen sich die charakteristischen Invarianten F, F_1 durch die Ableitungen ihrer Bogenlänge nach einem natürlichen Parameter einer krummen Minimallinie folgendermaßen ausdrücken:

$$(4)\qquad F = \frac{1}{s'^2}, \qquad F_1 = \frac{1 + 2is''}{s'^4}.$$

Dabei ist die Bogenlänge s der krummen ebenen singulären Linie mit der charakteristischen Invariante J der krummen Minimallinie durch die Differentialgleichung (2) verknüpft. —

Die an die Formeln (1) bzw. Nr. 9 (9) angeschlossenen geometrischen Betrachtungen gestatten auch die Beantwortung einer auf die Mongeschen Flächen selbst bezüglichen Frage (die sich übrigens auch im Anschlusse an Nr. 10 (4) hätte

beantworten lassen). Sei nämlich $\varkappa$ eine orientierte nichtisotrope krumme Linie, und nach Annahme eines (festen) Punktes P_0 auf $\varkappa$ als Anfangspunktes der Bogenlänge von $\varkappa$, R der zu einem variablen Punkt P von $\varkappa$ gehörige Wert der Bogenlänge. Dann lautet die Frage: Wie viele Mongesche Flächen von der Zentrakurve $\varkappa$ und vom Krümmungsmaß $\frac{1}{R^2}$ gibt es und wie verteilen sich diese Flächen auf die beiden von uns unterschiedenen Arten[1])?

Sei P ein Punkt der Kurve $\varkappa$, τ die (orientierte) Tangente von $\varkappa$ in P, und m eine bestimmte der beiden Minimalebenen durch τ. Zieht man durch P in m alle mit τ gleichartig orientierten Geraden ν und trägt auf jeder von P aus die mit ν ungleichartig orientierte Strecke von der Länge R auf, so liegen die Endpunkte Q aller dieser Strecken auf eine Minimalgeraden μ. (Ist insbesondere Q_τ der Endpunkt der auf τ gelegenen Strecke, so ist der Ort aller Punkte Q_τ diejenige Filarevolvente von $\varkappa$, die $\varkappa$ im Punkte P_0 schneidet.) Beschreibt der Punkt P die Kurve $\varkappa$, so beschreibt die Minimalgerade μ die Minimalgeradenschar einer Mongeschen Fläche, wenn wir den Ausnahmefall, daß die Ebenen m alle untereinander identisch sind, vorläufig beiseite lassen. ν ist die Normale von f im Punkte Q, da τ nach Konstruktion die Normale von f im Punkte Q_τ ist [vgl. Nr. 6 (2) und (3)]. P ist der Hauptkrümmungsmittelpunkt und $\overrightarrow{QP} = R$ der Hauptkrümmungsradius der Fläche f im Punkte Q, und folglich hat in der Tat die Fläche f das Krümmungsmaß $\frac{1}{R^2}$ und die Zentrakurve $\varkappa$[2]).

[1]) Der erste Teil dieser Frage ist auf anderem Wege bereits in der Abhandlung [Einl. 19)] von Raffy beantwortet worden.

[2]) Das letzte würde nicht mehr der Fall sein, wenn man auf jeder Geraden ν von P aus die mit ν gleichartig orientierte Strecke von der Länge R aufgetragen hätte, da dann der Ort der Punkte Q_τ keine Filarevolvente von $\varkappa$ mehr sein würde, also die Geraden PQ nicht Normalen der Fläche f wären.

Die Durchführung des gleichen Verfahrens unter Zugrundelegung der zweiten isotropen Ebene $\overline{m}$ durch τ ergibt, unter der Voraussetzung, daß die Minimalebenen $\overline{m}$ nicht sämtlich zusammenfallen, eine zweite Mongesche Fläche $\overline{f}$. Also:

Alle Mongeschen Flächen, die eine gegebene nicht-isotrope krumme Linie zur Zentrakurve haben, lassen sich im allgemeinen in Paare von Flächen gleichen Krümmungsmaßes anordnen.

Eine Ausnahme von diesem Satze tritt dann und nur dann ein, wenn die krumme Linie in einer Minimalebene liegt.

Alsdann nämlich fällt die eine der beiden Minimalebenen m durch die Tangenten τ von $\varkappa$ beständig mit der Kurvenebene zusammen. Behalten wir die oben eingeführten Bezeichnungen bei, so ist in diesem Falle nach Nr. 1 (9) der Ort aller Punkte Q_τ diejenige Minimalgerade μ von m, die durch P_0 geht; nach Nr. 1 (8) liegen dann sämtliche Punkte Q auf μ.

Die zweite Minimalebene $\overline{m}$ durch die Tangenten τ von $\varkappa$ umhüllt dagegen wieder eine unebene isotrope Fläche i, zu welcher nach der oben durchgeführten Konstruktion lauter Mongesche Flächen derselben Art gehören. Also:

Zu einer krummen ebenen singulären Linie als Zentrakurve gehört nur eine einzige Mongesche Fläche von bestimmtem, möglichen Krümmungsmaße. Alle Mongeschen Flächen, die eine gegebene krumme ebene singuläre Linie als Zentrakurve haben, sind von der gleichen Art.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten: welcher Art sind im Falle einer beliebigen nicht-isotropen krummen Linie $\varkappa$ die beiden Flächen des Paares von Mongeschen Flächen [bzw. die einzige Fläche], die $\varkappa$ zur Zentrakurve und $\frac{1}{R^2}$ zum Krümmungsmaß haben? Man hat dazu nur zu untersuchen, wie sich für eine solche gegebene Kurve $\varkappa$ die von den Minimalebenen durch die Tangenten τ von $\varkappa$ umhüllten isotropen

Flächen, soweit sie keine Minimalebenen sind, auf die beiden unterschiedenen Gattungen verteilen; mit anderen Worten, man hat die Bedingungen anzugeben, die eine nicht-isotrope krumme Linie $\varkappa$ erfüllen muß, damit keine, [eine, jede,] der beiden Minimalevoluten von $\varkappa$ sich auf einen Punkt reduziert. Diese Bedingungen hat Herr Study[1]) vollständig aufgestellt: sie führen im vorliegenden Falle zu folgenden Resultaten:

Von den beiden Mongeschen Flächen gleichen Krümmungsmaßes, die eine gegebene reguläre Kurve zur Zentrakurve haben, sind:

1) beide Mongesche Flächen erster Art, wenn die Kurve ein (regulärer) Kreis ist;

2) die eine Fläche eine Mongesche Fläche erster Art, die andere eine solche zweiter Art, wenn die Kurve eine doppelt gekrümmte Linie auf einem Minimalkegel ist;

3) beide Mongesche Flächen zweiter Art für jede andere reguläre Kurve.

Alle Mongeschen Flächen, die einen singulären Kreis [bzw. eine andere krumme ebene singuläre Linie] zur Zentrakurve haben, sind Flächen erster [bzw. zweiter] Art.

Diesen Resultaten fügen wir der Vollständigkeit halber den nach dem Bisherigen nahezu selbstverständlichen Satz an:

Alle Serretschen Flächen, die eine gegebene krumme Minimallinie zur Zentrakurve haben, lassen sich in Paare von Flächen gleichen Krümmungsmaßes anordnen. Alle Serretschen Flächen sind Mongesche Flächen zweiter Art.

12. Aus den in Nr. 8 und 9 aufgestellten Formeln folgt leicht eine bisher übersehene Eigenschaft der Mongeschen Flächen, die wir indes ohne Zuhilfenahme dieser Formeln beweisen wollen.

---

[1]) A. C.

Seien wieder $E, F, G; D, D', D''$ bezüglich die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung einer (nicht-isotropen) Fläche. Dann sind die Mongeschen Flächen dadurch charakterisiert, daß die drei quadratischen Differentialformen:

$$(1)\quad \begin{cases} ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ A = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2, \\ B = (ED' - FD) du^2 - (GD - ED'') du dv \\ \qquad + (FD'' - GD') dv^2, \end{cases}$$

die, gleich Null gesetzt, bzw. die Minimallinien, Asymptotenlinien und Krümmungslinien der Fläche geben, einen und denselben linearen Faktor gemeinsam haben.[1]) Die Quotienten $\frac{ds^2}{A}, \frac{A}{B}, \frac{B}{ds^2}$ sind also homogene lineare Funkt ionen in du, dv

Die normale Krümmung $\frac{1}{R_n}$ und die geodätische Torsion $\frac{1}{T_g}$ einer regulären Kurve auf der Fläche sind für eine beliebige, nicht-isotrope Fläche bzw. durch

$$(2)\qquad \frac{1}{R_n} = \frac{A}{ds^2}, \quad \frac{1}{T_g} = -\frac{B}{ds^2}, \quad \frac{T_g}{R_n} = -\frac{A}{B}$$

gegeben. Die im Falle der Mongeschen Flächen aus der ersten dieser Gleichungen entspringende Eigenschaft hat Herr Scheffers[2]) angegeben; aus der zweiten folgt:

Die geodätischen Torsionen von irgend vier durch einen Punkt P einer Mongeschen Fläche gehenden regulären Flächenkurven in diesem Punkte haben dasselbe Doppelverhältnis wie die zugehörigen vier Normalschnittebenen, und (folglich), wie die zugehörigen vier Krümmungsmittelpunkte auf der in P errichteten Flächennormalen.

---

[1]) Etwas Analoges tritt bei den „halbisotropen Strahlensystemen“, die Herr Weickmann [Einl. 20)], p. 33 ff. behandelt hat, ein: hier haben die beiden Kummerschen quadratischen Grundformen der Kongruenz einen linearen Faktor gemeinsam.

[2]) G. Scheffers [Einl. 8)], p. 113 ff.

III. Die einfachsten algebraischen Mongeschen Flächen.

13. Alle Mongeschen Flächen (erster Art), deren Zentrakurve ein singulärer Kreis[1]) ist, sind algebraische Flächen dritter Ordnung.

---

[1]) Die wichtigsten metrischen Eigenschaften eines singulären (oder „parabolischen") Kreises sind folgende:

Jeder singuläre Kreis $\varkappa$ hat den in seiner Minimalebene m gelegenen Punkt A des absoluten Kegelschnittes zugleich zum Mittelpunkt und (einzigen) Brennpunkt, und alle Geraden in m durch A zu Achsen. Die uneigentliche Gerade α der Minimalebene m berührt den singulären Kreis $\varkappa$ im (absoluten) Punkte A.

Wie üblich, ist in diesen Sätzen, wenn $\varkappa_2$ einen Kegelschnitt bezeichnet, verstanden unter:

Durchmesser von $\varkappa_2$: die Polare eines uneigentlichen Punktes der Kegelschnittebene in Bezug auf $\varkappa_2$;

Achse von $\varkappa_2$: ein zur Richtung nach seinem Pol in Bezug auf $\varkappa_2$ senkrecht stehender Durchmesser von $\varkappa_2$;

Mittelpunkt von $\varkappa_2$: der Pol der uneigentlichen Geraden der Kegelschnittebene in Bezug auf $\varkappa_2$;

Brennpunkt von $\varkappa_2$: der Mittelpunkt eines solchen Geradenbüschels (in der Kegelschnittebene) bei dem je zwei in Bezug auf $\varkappa_2$ konjugierte Gerade zueinander senkrecht stehen.

Weiter findet sich:

Jede automorphe Bewegung eines singulären Kreises $\varkappa$, die keine Identität ist, läßt sich auffassen als Kollineation allgemeiner Art der Minimalebene m des Kreises, deren sämtliche drei Doppelpunkte in den (absolnten) Punkt A und deren sämtliche drei Doppelgeraden in die uneigentliche Gerade α der Ebene m fallen; dagegen ist jede Umlegung der Minimalebene m, die $\varkappa$ in sich selbst transformiert, eine perspektive Transformation der Ebene m, deren Zentrum ein von A verschiedener uneigentlicher Punkt von m, und deren Achse eine eigentliche Gerade durch A, also eine Minimalgerade von m ist.

Das Gesagte zeigt, daß und inwiefern man einen singulären Kreis als Kreis mit uneigentlichem Mittelpunkt und unbestimmtem Halbmesser auffassen kann. Andererseits kann man einen singulären Kreis auch als Parabel auffassen, deren Ebene eine Minimalebene und deren uneigentlicher Punkt ein Punkt des absoluten Kegelschnittes ist.

Wählt man als Ausgangskurve den singulären Kreis $\varkappa$:

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = \frac{i}{2}(1-p^2), \qquad \mathfrak{y} = -\frac{1}{2}(1+p^2), \qquad \mathfrak{z} = ip,$$

d. h. die Schnittkurve des Minimalkegels des Anfangspunktes mit der zur z-Achse parallelen Minimalebene:

$$(2)\qquad y + ix + 1 = 0,$$

so liefern die Formeln Nr. 9 (I*) folgende Parameterdarstellung derjenigen ∞^1 Mongeschen Flächen (erster Art), welche die Kurve (1) zur Zentrakurve haben:

$$(3)\quad \begin{cases} x = \frac{i}{2}(1+p^2) + aip - \frac{1}{2}(1-p^2)q, \\ y = -\frac{1}{2}(1-p^2) + ap - \frac{i}{2}(1+p^2)q, \quad \text{(a willk. Konstante.)} \\ z = \qquad -ai - pq. \end{cases}$$

Elimination von p und q gibt als Gleichung der Flächen (3):

$$(3\text{a})\quad (x^2+y^2+z^2)(y+ix+2)+y-ix+a^2(y+ix)+2aiz=0$$[1].

Die erhaltenen Flächen sind sämtlich Regelflächen dritter Ordnung vom allgemeinen Typus.

Von den beiden Leitgeraden der zum Parameterwerte a gehörigen Fläche der Schar ist die Doppelgerade der Fläche eine Minimalgerade in der Ebene ihrer Zentrakurve (1); nämlich die Gerade

$$(4)\qquad y + ix + 1 = 0, \qquad z + ai = 0.$$

Die zweite Leitgerade ist eine zur ersten senkrecht stehende, also zur Ebene des singulären Kreises (1) parallele, nicht-isotrope Gerade, von den Gleichungen:

$$(5)\qquad y + ix + 2 = 0, \qquad y - ix + 2ai(z + ai) = 0$$[2].

[1]) Die Enveloppe dieser Flächenschar besteht aus dem Minimalkegel des Anfangspunktes und der Ebene (2) ihrer gemeinsamen Zentrakurve.

[2]) Läßt man a variieren, so beschreibt die Leitlinie (4) das uneigentliche Büschel der Minimalgeraden der Ebene (2); die Leitlinie (5) umhüllt den singulären Kreis:

Die Punkte der Doppelgeraden (4) sind (bekanntlich), bis auf zwei uniplanare, sämtlich biplanare Punkte der Fläche; die beiden uniplanaren Punkte auf der Geraden (4) sind ihre Schnittpunkte mit dem singulären Kreise (1): also ihr uneigentlicher Punkt, in welchem die Ebene (2) des singulären Kreises (1) doppeltzählende Tangentialebene der Fläche ist, und der Punkt:

$$(6)\quad x = i\,\frac{1-a^2}{2},\ y = -\frac{1+a^2}{2},\ z = -\,i\,a,\ (\text{oder: } p = -\,a),$$

wo die (durch die Doppelgerade (4) gehende) Ebene

$$(7)\qquad a\,(x - i\,y) + z = 0$$

doppeltzählende Tangentialebene ist.

14. Alle Mongeschen Flächen (zweiter Art), deren zugehörige isotrope Fläche die Tangentenfläche der algebraischen rationalen gemeinen Minimalschraubenlinie (oder Minimalkurve dritter Ordnung)

$$(1)\quad \xi = \frac{i}{2}\left(-\frac{p^3}{3}+p\right),\ \eta = -\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{3}+p\right),\ \zeta = \frac{i}{2}p^2$$

ist, und deren Hauptkrümmungsradius sich durch den natürlichen Parameter p dieser Kurve mittels der Formel

$$(2)\qquad R(p) = -\frac{i}{6}p^2 + a, \qquad (a \text{ willk. Konstante})$$

ausdrückt, sind algebraische Flächen dritter Ordnung.

Die Formeln [Nr. 9 (II)] liefern, nach einer leichten Veränderung der Bezeichnung, folgende Parameterdarstellung dieser Flächen:

$$y + i\,x + 2 = 0, \qquad z^2 = 2\,(y - i\,x),$$

in welchem die Ebene $y + i\,x + 2 = 0$ den Minimalkegel des Anfangspunktes schneidet.

$$(3)\qquad \begin{cases} x = -\frac{i}{3}p^3 + \left(\frac{i}{2} + a\right)p + \frac{i}{2}(1 - p^2)q, \\ y = -\frac{1}{3}p^3 - \left(\frac{1}{2} + a\,i\right)p - \frac{1}{2}(1 + p^2)\,q, \\ z = \frac{2i}{3}p^2 - a + i\,p\,q; \end{cases}$$

ihre Gleichung wird demnach:

$$(4)\qquad 3(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(z - a) + i\,(x + i\,y)^2 = 0.$$

Die gemeinsame Zentrakurve $\varkappa$ dieser Flächen läßt nach Nr. 9 (9) die Parameterdarstellung

$$(5)\qquad \mathfrak{x} = \frac{i}{3}p,\ \mathfrak{y} = \frac{1}{3}p,\ \mathfrak{z} = \frac{i}{6}p^2$$

zu; sie ist also eine in der Minimalebene

$$(6)\qquad x + i\,y = 0$$

gelegene Parabel, deren (eigentliche) Achse die z-Achse, deren (eigentlicher) Scheitel und (eigentlicher) Brennpunkt[1]) der Koordinaten-Anfangspunkt, und deren (eigentliche) Direktrix die Minimalgerade

$$(7)\qquad x + i\,y = 0, \quad z = 0$$

ist, welche die Parabel (5) im Koordinaten-Anfangspunkt tangiert[2]).

Die Doppelgerade der zum Parameterwert a gehörigen Fläche der Schar ist die Minimalgerade:

---

[1]) Allgemein gilt der Satz: Besitzt ein Kegelschnitt in einer Minimalebene (mindestens) einen (eigentlichen) Brennpunkt B, so liegt dieser auf dem Kegelschnitt selbst. Die in B tangierende Minimalgerade ist die zugehörige Direktrix.

[2]) Der Koordinaten-Anfangspunkt ist zugleich derjenige Punkt, in dem $R = a$ ist, d. h. in dem die (zum Parameterwerte $a = 0$ gehörige) Cayleysche Linienfläche der Schar die Tangente der Minimalkurve (1), die Minimalgerade (7), zur Erzeugenden hat. Die Minimalebene (6) ist die Schmiegungsebene der Minimalkurve (1) im Anfangspunkte, und die Zentrakurve $\varkappa$ der Schnitt dieser Ebene mit der Tangentenfläche der Minimalkurve (1).

(8) $$x+iy=0, \quad z=a$$

in der Ebene (6) der Zentrakurve $\varkappa$. Die dem Parameterwert $a=0$ entsprechende Fläche, deren Doppelgerade in die (eigentliche) Direktrix (7) der Zentrakurve $\varkappa$ fällt, ist eine Cayleysche Linienfläche dritter Ordnung; alle übrigen Flächen der Schar sind Regelflächen dritter Ordnung vom allgemeinen Typus.

Die zweite Leitgerade der zum Parameterwert a $(a \neq 0)$ gehörenden Fläche der Schar ist eine nicht-isotrope Gerade von allgemeiner Lage[1]) gegen die erste Leitgerade (8); ihre Gleichungen sind:

(9) $$(6ai+1)x-i(6ai-1)y=0, \quad z+a=0.$$

Die beiden uniplanaren Punkte auf der Doppelgeraden (8) sind ihre Schnittpunkte mit der Zentrakurve $\varkappa$ der Fläche

(10) $$x=\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}ai}, \quad y=\pm i\sqrt{\tfrac{2}{3}ai}, \quad z=a;$$

die zugehörigen doppeltzählenden Tangentialebenen sind bezüglich die beiden Ebenen:

(11) $$x+iy\mp i\sqrt{6ai}(z-a)=0$$

durch die Doppelgerade.

Die (zum Parameterwerte $a=0$ gehörige) Cayleysche Linienfläche der Schar wird in jedem Punkte der Doppelgeraden (7) von der Minimalebene (6) berührt; die zweite Tangentialebene der Fläche in einem eigentlichen Punkte $x=x_0$ der Doppelgeraden (7) ist die Ebene

(12a) $$x+iy-6ix_0z=0,$$

und im uneigentlichen Punkte der Doppelgeraden (7) die Ebene

(12b) $$z=0.$$

Der Koordinaten-Anfangspunkt ist der uniplanare Punkt der Fläche.

---

[1]) Eine nicht-isotrope Gerade liegt allgemein gegen eine Minimalgerade, wenn sie diese weder schneidet noch zu ihr senkrecht steht.

15. Jede Ähnlichkeitstransformation transformiert bekanntlich den absoluten Kegelschnitt automorph, erhält also die Orthogonalität und führt jede nicht-isotrope, bzw. isotrope Gerade oder Ebene bezüglich wieder in eine solche über.

Jede algebraische Mongesche Fläche erster oder zweiter Art wird durch eine beliebige Ähnlichkeitstransformation in eine algebraische Mongesche Fläche derselben Ordnung und derselben Art übergeführt. Unter den Mongeschen Flächen einer und derselben Ordnung gibt es aber verschiedene Typen, die gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invariant sind, derart, daß eine Fläche eines bestimmten Typus durch jede beliebige Ähnlichkeitstranformation immer nur in eine Fläche desselben Typus transformiert werden kann.

In den letzten beiden Nummern traten Repräsentanten der folgenden drei verschiedenen Typen von Mongeschen Flächen dritter Ordnung auf:

1. Typus [Flächen mit zwei Leitgeraden]: Die Doppelgerade ist eine Minimalgerade μ, die zweite Leitgerade ist eine nicht-isotrope Gerade γ von allgemeiner Lage gegen μ.

2. Typus [Flächen mit zwei Leitgeraden]: Die Doppelgerade ist eine Minimalgerade μ, die zweite Leitgerade ist eine μ senkrecht kreuzende nicht-isotrope Gerade γ.

3. Typus [Cayleysche Linienfläche]: Die doppeltzählende Leitgerade ist eine Minimalgerade μ, längs deren die Minimalebene von μ feste Berührungsebene bleibt.

Die Flächen des 1. und 3. Typus sind Mongesche Flächen zweiter, die des 2. Typus solche erster Art.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Die angeführten drei Flächentypen sind die einzigen Typen von (irreduziblen) Mongeschen Flächen dritter Ordnung, die gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invariant sind.

Jede solche Mongesche Fläche dritter Ordnung läßt sich dadurch erzeugen, daß man den absoluten Kegelschnitt α auf eine eigentliche gerade Punktreihe[1]) γ projektiv bezieht und entsprechende Punkte verbindet; dabei ist, falls α und γ sich schneiden, vorauszusetzen, daß der Schnittpunkt nicht entsprechend gemeinsam sei.

Führt man einen Augenblick homogene Koordinaten x, y, z, t ein, so daß $t = 0$ die Gleichung der uneigentlichen Ebene ist, und definiert man den absoluten Kegelschnitt α durch die beiden projektiven Büschel:

$$(1) \qquad \left.\begin{cases} z - \lambda(x - iy) = 0, \\ x + iy + \lambda z = 0, \end{cases}\right\} t = 0,$$

so folgt für die Koordinaten eines Punktes von α:

$$(2) \qquad x : y : z = \frac{i(1-\lambda^2)}{2} : -\frac{1+\lambda^2}{2} : i\lambda, \quad t = 0.$$

Indem man dem uneigentlichen Punkte $(x_1, y_1, z_1, 0)$ der geraden Punktreihe γ, die auf α projektiv bezogen wird, den Punkt $\left(-\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ von α zuordnet, der dem Werte $\frac{1}{\lambda} = 0$ entspricht, kann man, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Koordinaten eines Punktes (x, y, z, t) von γ durch

$$(3) \qquad x = \lambda x_1, \quad y = \lambda y_1, \quad z = \lambda z_1, \quad t = t_0$$

geben.

Man gelangt so zu der folgenden Parameterdarstellung der erzeugten Mongeschen Fläche dritter Ordnung in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda x_1 + \frac{i}{2}(1-\lambda^2)\mu, \\ y = \lambda y_1 - \frac{1}{2}(1+\lambda^2)\mu, \\ z = \lambda z_1 + i\lambda\mu. \end{cases}$$

[1]) Unter einer eigentlichen geraden Punktreihe verstehen wir eine solche, die nur einen einzigen uneigentlichen Punkt enthält.

Nach Einführung der Bezeichnungen

(5) $$x_1 + i y_1 = a, \quad x_1 - i y_1 = b, \quad z_1 = c$$

liefert Elimination von λ und μ aus (4) die Flächengleichung in der Form:

(6) $$(x^2 + y^2 + z^2 + c(x + iy) - az)(c(x - iy) - bz + ab - c^2) - (b(x + iy) + cz)^2 = 0.$$

Die Doppelgerade der Fläche ist stets eine Minimalgerade, nämlich die Gerade:

(7) $$b(x + iy) + cz = 0, \quad c(x - iy) - bz + ab + c^2 = 0.$$

Die zweite Leitgerade hat die Gleichungen:

(8) $$c(x + iy) - az = 0, \quad c(x - iy) - bz = 0;$$

sie steht insbesondere zur ersten Leitgeraden senkrecht, wenn:

(9) $$b = 0,$$

oder wenn:

(10) $$ab + c^2 = 0$$ [1]

ist. Im zweiten Falle, und nur in diesem, ist auch die zweite Leitgerade eine Minimalgerade und mit der Doppelgeraden identisch. Die Fläche (6) ist dann eine Cayleysche Linienfläche, deren feste Tangentialebene längs der Doppelgeraden die durch sie gelegte Minimalebene:

(11) $$(b^2 - c^2)x + i(b^2 + c^2)y + 2bcz = 0$$

ist.

Man gelangt also in der Tat nur zu den drei obengenannten Flächentypen. Ihre Invarianz gegenüber jeder Ähnlichkeitstransformation erhellt aus dem weiter oben Gesagten.

Die im vorstehenden ausgeschlossene Annahme, daß die einfache Leitgerade der Fläche dritter Ordnung eine uneigentliche Gerade ist, ist offenbar unmöglich, ohne daß die Fläche

[1] $b = 0$, $c = 0$ kann nicht gleichzeitig erfüllt sein, ohne daß die Fläche (6) zerfällt.

zerfällt; denn die Minimalgeraden in einer Schar von ∞^1 parallelen Ebenen, die eine diese Ebenen schneidende eigentliche Gerade treffen, liegen sämtlich in einer oder zwei Ebenen durch diese Gerade.

Schließlich gilt noch der Satz:

Es gibt keine Regelfläche dritter Ordnung konstanten, von Null verschiedenen Krümmungsmaßes.

Einerseits führt nämlich eine beliebige Ähnlichkeitstransformation jede Fläche nicht konstanten Krümmungsmaßes wieder in eine Fläche der gleichen Eigenschaft über, so daß nach den Ergebnissen von Nr. 13 und 14 unter den drei angeführten Typen von Mongeschen Flächen dritter Ordnung keine Serretsche Fläche enthalten sein kann. Andererseits besitzt bekanntlich eine Regelfläche mit nicht-isotropen Erzeugenden niemals ein von Null verschiedenes konstantes Krümmungsmaß.

16. Die nach den (nicht-isotropen) Kugeln einfachsten algebraischen Regelflächen konstanter, von Null verschiedener Krümmung sind demnach diejenigen Serretschen Flächen (vierter Ordnung), deren Zentrakurve eine Minimalkurve dritter Ordnung ist oder die algebraischen Schraubenröhrenflächen[1]).

Seien die Koordinaten dieser Zentrakurve in Funktion eines natürlichen Parameters p durch

$$(1) \quad \xi = \frac{i}{2}\left(-\frac{p^3}{3} + p\right), \quad \eta = -\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{3} + p\right), \quad \zeta = \frac{i}{2}p^2$$

gegeben. Die Kurve (1) bildet — wenn für einen Augenblick wieder homogene Koordinaten x, y, z, t eingeführt werden, und $t = 0$ die Gleichung der uneigentlichen Ebene ist — mit der uneigentlichen Tangente des absoluten Kegelschnittes:

$$(2) \qquad x - iy = 0, \quad t = 0$$

zusammen den vollständigen Schnitt der beiden Flächen zweiter Ordnung:

---

[1]) E. Study, [Einl. 20)], p. 278.

(3) $2z(x - iy) + 3i(x + iy)t = 0, \quad (x - iy)^2 - 2izt = 0,$

deren zweite ein unebener Minimalzylinder mit dem (uneigentlichen) Scheitel:

$$(4) \qquad x - iy = 0, \quad z = 0, \quad t = 0$$

ist. Der Punkt (4) ist der (dreifach zählende) uneigentliche Punkt der Minimalkurve (1), die Gerade (2) ihre Tangente, und die uneigentliche Ebene ihre Schmiegungsebene im Punkte (4). Die Kurve (1) ist mithin eine kubische Parabel.

Ist nun a der Hauptkrümmungsradius einer Serretschen Fläche von der Zentrakurve (1), so ergibt sich, nach leichter Veränderung der Bezeichnung, aus Nr. 9 (II) die folgende Parameterdarstellung der Fläche:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = -\frac{i}{6}p^3 + \left(a + \frac{i}{2}\right)p + q \cdot \frac{i}{2}(1 - p^2) \\ y = -\frac{1}{6}p^3 - i\left(a - \frac{i}{2}\right)p - q \cdot \frac{1}{2}(1 + p^2) \\ z = \frac{i}{2}p^2 - a + q \cdot ip, \end{cases}$$

und Elimination von p und q hieraus ergibt als Flächengleichung:

$$(6) \qquad \begin{aligned} 12(x - iy)^2(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - 36iz(x^2 + y^2) \\ + 9(x + iy)^2 - 8i(2z - a)^2(z + a) = 0. \end{aligned}$$

Diese Serretsche Fläche vierter Ordnung ist von Geschlechte Null, und gehört der ersten Spezies Cremonas[1]), der zehnten Cayleys[2]) an. Ihre Doppelkurve ist die kubische Parabel:

$$(7) \qquad \begin{aligned} 2(z + a)(x - iy) + 3i(x + iy) = 0, \\ (x - iy)^2 - i(2z - a) = 0, \end{aligned}$$

---

[1]) L. Cremona, Sulle superficie gobbe di quarto grado. Mem. Acc. Bologna (2) 8 (1868). p. 235—250.

[2]) A. Cayley, A third memoir on skew surfaces, otherwise scrolls. Phil. Trans. 159 (1869), p. 111—126 [vorgelegt 30. Mai, gelesen 18. Juni 1868]; auch Coll. math. papers VI., Cambridge 1893, p. 312—328.

die dem Werte $q = \sqrt{3ai}$ entspricht, und deren uneigentlicher Punkt (4), deren uneigentliche Tangente die Gerade (2) ist.

Die betrachtete Serretsche Fläche läßt sich auch erzeugen, indem man die einander entsprechenden Punkte der Parabel

$$(8)\qquad \mathfrak{x} = p\left(\frac{i}{3} + a\right),\ \mathfrak{y} = ip\left(\frac{i}{3} - a\right),\ \mathfrak{z} = \frac{i}{6}p^2 - a$$

und des absoluten Kegelschnittes

$$(9)\qquad x : y : z = \frac{i}{2}(1 - p^2) : -\frac{1}{2}(1 + p^2) : ip, \quad (t = 0)$$

verbindet.

IV. Von der isometrischen Abbildung der Mongeschen Flächen erster Art aufeinander und auf die Flächen zweiter Art.

17. Jede Mongesche Fläche erster Art läßt sich, ihrer in Nr. 7 angegebenen Erzeugungsweise nach, als Verallgemeinerung einer nicht-isotropen Kugel auffassen, in gleicher Weise, wie sich jede Fläche zweiter Art und variablen Krümmungsmaßes als Verallgemeinerung einer Serretschen Fläche ansehen läßt, die (in dem dort definierten Sinne) zu derselben isotropen Fläche gehört. Dementsprechend enthalten auch die meisten Eigenschaften der Flächen erster Art teils Eigenschaften der Kugeln als spezielle Fälle, teils sind sie mit solchen geradezu identisch [wie z. B. die in Nr. 8 2) und 3) genannten]. Das letztere gilt insbesondere auch von der Frage der Abwickelbarkeit zweier solcher Flächen aufeinander, der wir uns jetzt zuwenden. Es besteht hier nämlich der Satz:

Alle aufeinander abwickelbaren Mongeschen Flächen erster Art gehen aus einer beliebigen unter ihnen durch Bewegung oder Umlegung hervor.

Sind nämlich zwei Flächen erster Art f und f_1 bzw. dargestellt durch

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \xi_0 + R(u)(v\xi'(u) + i\xi''(u)),\\ y &= \eta_0 + R(u)(v\eta'(u) + i\eta''(u)),\\ z &= \zeta_0 + R(u)(v\zeta'(u) + i\zeta''(u)) \end{aligned}$$

und

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_{01} + R_1(u_1)(v_1 \xi'(u_1) + i \xi''(u_1)), \\ y_1 &= \eta_{01} + R_1(u_1)(v_1 \eta'(u_1) + i \eta''(u_1)), \\ z_1 &= \zeta_{01} + R_1(u_1)(v_1 \zeta'(u_1) + i \zeta''(u_1)), \end{aligned}$$

wo

$$(3)\quad \begin{cases} \xi'(a) = i\dfrac{1-a^2}{2}, \ \eta'(a) = -\dfrac{1+a^2}{2}, \ \zeta'(a) = i a, \\ \xi''(a) = -i a, \quad \eta''(a) = -a, \quad \zeta''(a) = i, \end{cases} \qquad (i^2 = -1)$$

ist, so sind zunächst notwendige Bedingungen dafür, daß die beiden Flächen aufeinander abwickelbar sind, und daß bei der Abwicklung dem Punkte (u, v) von f der Punkt (u_1, v_1) von f_1 entspricht: 1^0, daß u_1 eine Funktion von u allein ist

$$(4)\qquad u_1 = F(u), \qquad d u_1 = F'(u)\, d u$$

und 2^0, daß

$$(5)\qquad R_1(u_1) = \varepsilon R(u), \qquad (\varepsilon^2 = +1)$$

ist.

Führt man diese Beziehungen in die durch die Gleichheit der entsprechenden Bogenelemente dargestellte notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit der beiden Flächen

$$(6)\quad \begin{aligned} &\left\{- R(u)^2 v^2 + \left(\frac{d R(u)}{d u}\right)^2\right\} d u^2 + 2 i R(u)^2 d u\, d v \\ &= \left\{- R_1(u_1)^2 v_1^2 + \left(\frac{d R_1(u_1)}{d u_1}\right)^2\right\} d u_1^2 + 2 i R_1(u_1)^2 d u_1\, d v_1 \end{aligned}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$(7)\qquad (v_1^2 F'^2 - v^2)\, d u + 2 i\, d v = 2 i F'\, d v_1;$$

diese ist identisch mit dem Systeme

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial u} = \dfrac{i}{2 F'} \ (v^2 - v_1^2 F'^2), \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial v} = \dfrac{1}{F'}, \end{cases}$$

dessen Integrabilitätsbedingung für v_1 den Wert

$$(9) \qquad v_1 = \frac{1}{F'} \cdot v - i\,\frac{F''}{F'^2}$$

ergibt. Dieser Wert von v_1 erfüllt die zweite Gleichung (8) identisch; in die erste eingesetzt, gibt er schließlich

$$(10) \qquad \{F, u\} \equiv \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\,\frac{F''^2}{F'^2} = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Schwarzschen Differentialgleichung ist bekanntlich die gebrochene lineare Funktion von u, so daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit der beiden Flächen

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{a u + b}{c u + d}, \quad v_1 = \dfrac{c u + d}{a d - b c}\{(c u + d) v + 2 i c\}, \\ R_1\left(\dfrac{a u + b}{c u + d}\right) = \varepsilon R(u) \end{cases}$$

lautet. Darin ist $\varepsilon^2 = +1$ und a, b, c, d bedeuten vier im übrigen beliebige Konstante derart, daß $a d - b c \neq 0$ ist.

Es handelt sich nur noch um die geometrische Deutung dieser Bedingung. Wählt man in (III) zunächst $\varepsilon = +1$ und setzt die Werte (III) von u_1 und v_1 in (2) ein, so erhält man mit Hilfe von (1) nach leichter Rechnung

$$(11) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{a d - b c}(x - \xi_0) + \dfrac{i}{2}\,\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a d - b c}(y - \eta_0) \\ \qquad + \dfrac{c d - a b}{a d - b c}(z - \zeta_0) + \xi_{01}, \\ y_1 = -\dfrac{i}{2}\,\dfrac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{a d - b c}(x - \xi_0) + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a d - b c}(y - \eta_0) \\ \qquad + i\,\dfrac{c d + a b}{a d - b c}(z - \zeta_0) + \eta_{01}, \\ z_1 = \dfrac{b d - a c}{a d - b c}(x - \xi_0) - i\,\dfrac{b d + a c}{a d - b c}(y - \eta_0) \\ \qquad + \dfrac{a d + b c}{a d - b c}(z - \zeta_0) + \zeta_{01}. \end{cases}$$

Die Fläche f_1 geht also aus der Fläche f durch eine Bewegung hervor, derart, daß bei der Abwicklung einander entsprechende Punkte einander auch durch diese Bewegung entsprechen.

Endlich ist, wie schon in Nr. 8, Anm. [1]) (auf p. 169) bemerkt wurde, die Vertauschung von $R(u)$ mit $-R(u)$ mit einer einfachsten Umlegung [Spiegelung am Scheitel des zur Fläche gehörigen Minimalkegels] gleichbedeutend.

Damit ist der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes vollständig geführt.

18. Eine leichte Abänderung der letzten Betrachtung führt auf eine besondere Gattung von Mongeschen Flächen erster Art, welche den Kugeln noch näher stehen als die allgemeinen Flächen dieser Art.

Ist nämlich der Hauptkrümmungsradius R einer durch Nr. 17 (1) — ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ — dargestellten Fläche erster Art f eine automorphe Funktion seines Argumentes u, so daß

$$(1)\quad R(u_k) = R\left(\frac{a_k u + b_k}{c_k u + d_k}\right) = R(u), \quad (a_k d_k - b_k c_k \neq 0, \ k = 1, 2 \ldots)$$

ist, so wird die Fläche f durch die (endliche oder unendliche diskontinuierliche) Gruppe aller Transformationen

$$(2)\quad \begin{cases} u_k = \dfrac{a_k u + b_k}{c_k u + d_k}, \\[2ex] v_k = \dfrac{c_k u + d_k}{a_k d_k - b_k c_k}\{(c_k u + d_k) v + 2 i c_k\}. \end{cases} \qquad (k = 1, 2 \ldots)$$

in sich selbst übergeführt. Wir wollen die Gruppe (2) von Transformationen als die Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ bezeichnen; sie ist identisch mit der Gruppe der Rotationen

$$(3)\quad \begin{cases} x_k = \frac{1}{2}\,\frac{a_k^2 - b_k^2 - c_k^2 + d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}\,x + \frac{i}{2}\,\frac{a_k^2 + b_k^2 - c_k^2 - d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}\,y \\ \qquad + \frac{c_k d_k - a_k b_k}{a_k d_k - b_k c_k}\,z, \\ y_k = -\frac{i}{2}\,\frac{a_k^2 - b_k^2 + c_k^2 - d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}\,y \\ \qquad + i\,\frac{c_k d_k + a_k b_k}{a_k d_k - b_k c_k}\,z, \\ z_k = \frac{b_k d_k - a_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}\,x - i\,\frac{b_k d_k + a_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}\,y + \frac{a_k d_k + b_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}\,z \end{cases}$$

um den Scheitel (0, 0, 0) des zugehörigen Minimalkegels. Durch eine solche Rotation wird auch die auf der Fläche f gelegene Minimalgeradenschar in sich selbst transformiert, so daß die Fläche f durch jede Rotation (3) auf sich selbst abgewickelt wird.

Wir bezeichnen eine solche Mongesche Fläche erster Art als eine zur Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörige automorphe (Mongesche) Fläche und nennen umgekehrt auch die Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ die zu dieser Fläche gehörige Gruppe.

Nach bekannten Sätzen über die automorphen Funktionen[1]) besteht zwischen den Krümmungsmaßen zweier zu derselben Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörigen automorphen Flächen immer eine algebraische Beziehung, und das Krümmungsmaß einer automorphen Fläche läßt sich rational durch die Krümmungsmaße zweier zu derselben Gruppe $\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ gehörigen automorphen Flächen ausdrücken.

---

[1]) Vgl. R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen II. (Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen.) Leipzig und Berlin 1912, p. 19.

Man sieht, wie die Kugel sich als spezieller Fall dieser automorphen Flächen auffassen läßt: ihr (konstanter) Hauptkrümmungsradius hat die Eigenschaft (1) in Bezug auf jede Transformation $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$.

Als Beispiel einer automorphen Mongeschen Fläche führen wir die Fläche

$$(4) \qquad x = \frac{(u^2 - u + 1)^3}{u^2 (u-1)^2}\left(iv\frac{1-u^2}{2} + u\right),$$

$$y = \frac{(u^2 - u + 1)^3}{u^2 (u-1)^2}\left(-v\frac{1+u^2}{2} - iu\right), \quad z = \frac{(u^2 - u + 1)^3}{u^2 (u-1)^2}(ivu - 1)$$

an, die zur anharmonischen Gruppe von linearen Substitutionen der Veränderlichen u gehört, d. h. durch jede der sechs Transformationen

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$$

auf sich selbst abgewickelt wird. Diese Transformationen sind bezüglich mit den Rotationen um den Anfangspunkt

$$(5^*) \begin{cases} x_1 = x \quad x_2 = x \quad x_3 = -\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}y - z \\ y_1 = y \quad y_2 = -y \quad y_3 = -\frac{i}{2}x - \frac{3}{2}y + iz \\ z_1 = z \quad z_2 = -z \quad z_3 = -x + iy + z \\ x_4 = -\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}y - z \quad x_5 = -\frac{1}{2}x + \frac{i}{2}y + z \quad x_6 = -\frac{1}{2}x + \frac{i}{2}y + z, \\ y_4 = \frac{i}{2}x + \frac{3}{2}y - iz \quad y_5 = -\frac{i}{2}x + \frac{3}{2}y - iz \quad y_6 = \frac{i}{2}x - \frac{3}{2}y + iz, \\ z_4 = x - iy - z \quad z_5 = -x - iy - z \quad z_6 = x + iy + z \end{cases}$$

identisch.

19. Aus den Entwicklungen der beiden letzten Nummern läßt sich noch eine Folgerung über gewisse Minimalkurven im R_4 ziehen.

Wegen der Relation Nr. 6 (b) kann man nämlich die Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ der Hauptkrümmungsmittelpunkte einer beliebigen Mongeschen Fläche f und den (um eine beliebige Konstante vermehrten) mit i multiplizierten Hauptkrümmungsradius R von f als Koordinaten der Punkte einer gewissen krummen Minimallinie im R_4 auffassen[1]). Ist speziell die Fläche f eine Fläche erster Art, so ist, nach Nr. 8 (1) und (9), die entsprechende Minimalkurve im R_4, wenn man von einer beliebigen Translation absieht, dargestellt durch

$$(1)\quad x=\frac{dR}{du}\cdot\frac{1-u^2}{2},\quad y=i\frac{dR}{du}\cdot\frac{1+u^2}{2},\quad z=\frac{dR}{du}\cdot u,\quad t=R(u),$$

wo R eine nicht konstante Funktion von u bedeutet, und liegt daher im R_3

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=0,$$

der die t-Achse enthält.

Da im Falle einer durch Nr. 17 (1) (mit $\xi_0=\eta_0=\zeta_0=0$) dargestellten, zur Gruppe $\begin{pmatrix}a_k, b_k\\ c_k, d_k\end{pmatrix}$ gehörigen automorphen Fläche f auch die Zentrakurve $\varkappa$ von f durch die Gruppe der Rotationen Nr. 18 (3) um den Scheitel (0, 0, 0) des zugehörigen Minimalkegels in sich selbst übergeführt wird, so folgt der Satz:

Ist in den Gleichungen der krummen Minimallinie (1) $R(u)$ eine zur Gruppe $\begin{pmatrix}a_k, b_k\\ c_k, d_k\end{pmatrix}$ gehörende automorphe Funktion von u, so wird die Minimalkurve (1) durch die Gruppe

---

[1]) Über die krummen Minimallinien und „regulären" Minimalflächen [Study] im R_4 vgl. namentlich L. P. Eisenhart, Minimal surfaces in Euclidean four-space. Amer. J. math. 34 (1912), p. 215—236.

$$(3)\begin{cases} x_k = \frac{1}{2}\frac{a_k^2-b_k^2-c_k^2+d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}x + \frac{i}{2}\frac{a_k^2+b_k^2-c_k^2-d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}y + \frac{c_k d_k - a_k b_k}{a_k d_k - b_k c_k}z + *, \\ y_k = -\frac{i}{2}\frac{a_k^2-b_k^2+c_k^2-d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}x + \frac{1}{2}\frac{a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2}{a_k d_k - b_k c_k}y + i\frac{c_k d_k + a_k b_k}{a_k d_k - b_k c_k}z + *, \\ z_k = \frac{b_k d_k - a_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}x - i\frac{b_k d_k + a_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}y + \frac{a_k d_k + b_k c_k}{a_k d_k - b_k c_k}z + *, \\ t_k = * + * + * + t \end{cases}$$

von Rotationen des R_4 um die t-Axe in sich selbst übergeführt.

Diese Rotationen führen zugleich den R_3 (2) in sich selbst über.

20. Schließlich soll noch die Frage der isometrischen Abbildung einer Mongeschen Fläche erster Art auf eine solche zweiter Art kurz behandelt werden[1]).

Die Fläche f zweiter Art sei durch die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= \xi(p) + R(p)(q\xi'(p) + i\xi''(p)), \\ y &= \eta(p) + R(p)(q\eta'(p) + i\eta''(p)), \\ z &= \zeta(p) + R(p)(q\zeta'(p) + i\zeta''(p)) \end{aligned}$$

und die Fläche f_1 erster Art durch die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_{01} + R_1(u_1)\left(u_1 + i\frac{1-u_1^2}{2}v_1\right), \\ y_1 &= \eta_{01} + R_1(u_1)\left(-iu_1 - \frac{1+u_1^2}{2}v_1\right), \\ z_1 &= \zeta_{01} + R_1(u_1)(-1 + iu_1 v_1) \end{aligned}$$

gegeben, wo $\xi(p)$, $\eta(p)$, $\zeta(p)$ die Koordinaten der Punkte einer krummen Minimallinie λ in Funktion eines natürlichen Parameters p von λ, die Indizes Differentiation nach p, und ξ_{01},

[1]) Über die isometrische Abbildung der Serretschen Flächen, insbesondere der transzendenten Schraubenröhrenflächen auf die Kugeln vgl. E. Study, [Einl. 20)], p. 276 ff.

η_{01}, ζ_{01} willkürliche Konstante bedeuten. Ferner werde die charakteristische Invariante $(3, 3)_p$ der Minimallinie λ mit J bezeichnet.

Man hat dann als Bedingungen für eine isometrische Abbildung der beiden Flächen aufeinander, bei welcher dem Punkte (p, q) von f der Punkt (u_1, v_1) von f_1 entspricht,

$$\text{(4 a)} \quad \begin{cases} u_1 = F(p), \quad \text{also} \quad du_1 = F'(p)\,dp, \\ R_1(u_1) = \varepsilon R(p), \qquad (\varepsilon^2 = 1) \end{cases}$$

und

$$\text{(4 b)} \quad \begin{aligned} &\left\{2iR(p) - R(p)^2(q^2 + J(p)) + \left(\frac{dR(p)}{dp}\right)^2\right\} dp^2 \\ &+ 2iR(p)^2\,dp\,dq = \left\{-R_1(u_1)^2 v_1^2 + \left(\frac{dR_1(u_1)}{du_1}\right)^2\right\} du_1^2 \\ &\qquad + 2iR_1(u_1)^2\,du_1\,dv_1. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (4 a) sind notwendig, die Bedingung (4 b) ist notwendig und hinreichend. Durch ähnliche Rechnungen, wie sie in Nr. 17 durchgeführt wurden, erhält man für v_1 den Wert

$$\text{(5)} \quad v_1 = \frac{1}{F'}\,q - i\,\frac{F''}{F'^2}$$

und für F selbst die Riccatische Differentialgleichung

$$\text{(6)} \quad \frac{d\left(\frac{F''}{F'}\right)}{dp} - \frac{1}{2}\,\frac{F''^2}{F'^2} = \frac{i}{R} - \frac{J}{2}$$

oder die mit ihr äquivalente Schwarzsche Differentialgleichung

$$\text{(6*)} \quad \{F, p\} \equiv \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\,\frac{F''^2}{F'^2} = \frac{i}{R} - \frac{J}{2}.$$

Die isometrische Abbildung einer Mongeschen Fläche erster Art auf eine gegebene Mongesche Fläche zweiter Art und nicht konstanten Krümmungsmaßes [und ebenso die isometrische Abbildung einer Kugel auf eine gegebene Serretsche Fläche] hängt also, außer von der Forderung der Gleichheit

der Krümmungsmaße in entsprechenden Punkten, nur von der Integration einer Riccatischen oder einer mit dieser äquivalenten Schwarzschen Differentialgleichung ab.

Kennt man ein partikuläres Integral F_0 von (6*), so ist das allgemeine Integral durch

$$(7)\qquad F = \frac{a F_0 + b}{c F_0 + d}, \qquad (a, b, c, d \text{ Konstante, } ad - bc \neq 0)$$

bestimmt, was mit dem Resultate von Nr. 17 in vollkommenem Einklange steht.

Ein einfaches Beispiel bietet die isometrische Abbildung der Einheitskugel um den Koordinatenanfang auf die in Nr. 16 besprochene Serretsche Fläche vierter Ordnung, vom Krümmungsmaße 1. Wählt man für den Hauptkrümmungsradius beider Flächen den Wert $+1$, so ist die Serretsche Fläche — in einfachster Lage — durch

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= -\frac{i}{6} p^3 + \left(1 + \frac{i}{2}\right) p + q \cdot \frac{i}{2} (1 - p^2), \\ y &= -\frac{1}{6} p^3 - i \left(1 - \frac{i}{2}\right) p - q \cdot \frac{1}{2} (1 + p^2), \\ z &= \frac{i}{2} p^2 - 1 + q \cdot ip \end{aligned}$$

gegeben, die charakteristische Invariante J ihrer Zentrakurve ist Null. Die Kugel ist durch

$$(9)\qquad x_1 = i v_1 \frac{1 - u_1^2}{2} + u_1, \quad y_1 = -v_1 \frac{1 + u_1^2}{2} - i u_1, \quad z_1 = i v_1 u_1 - 1$$

dargestellt. Die Schwarzsche Differentialgleichung, von der das Problem abhängt, lautet in diesem Fall

$$(10)\qquad \{F, p\} = i,$$

und ein partikuläres Integral derselben ist

$$(11)\qquad u_1 \equiv F_0(p) = e^{ip\sqrt{2i}}.$$

Aus (5) ergibt sich ferner für v_1 der Wert

(12) $$v_1 = -e^{-ip\sqrt{2i}}\left(\sqrt{\frac{i}{2}}q + i\right).$$

Bemerkt man noch, daß durch die Transformation

(13) $$u = u_1, \qquad v = u_1 + \frac{2i}{v_1}$$

die Gleichungen (9) der Einheitskugel in die häufig gebrauchten

(14) $$x_1 = \frac{1-uv}{u-v}, \quad y_1 = i\frac{1+uv}{u-v}, \quad z_1 = \frac{u+v}{u-v}$$

übergehen, so folgt:

Die Einheitskugel (14) wird durch die Substitution

(15) $$u = e^{ip\sqrt{2i}}, \qquad v = e^{ip\sqrt{2i}} \cdot \frac{q\sqrt{2i}-2i}{q\sqrt{2i}+2i}$$

auf die Serretsche Fläche (8) isometrisch abgebildet.

Über die Temperaturänderung von Luft bei Expansion ohne äussere Arbeitsleistung bei Drucken bis zu 150 Atmosphären und Temperaturen von + 250 bis − 55° C.

Vorläufige Mitteilung.

Von **F. Noell.**

Mit 2 Tafeln.

Vorgelegt von C. v. Linde in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Die Temperaturänderung, die ein Gas bei der Expansion ohne äußere Arbeitsleistung erfährt, ist eine zuerst von Thomson und Joule[1]) für Luft und Wasserstoff (bei Drucken bis zu 6 Atmosphären und Temperaturen von 0° bis 100° C) beobachtete Erscheinung, die deshalb auch Thomson-Joule-Effekt genannt wird. Mit Rücksicht auf die hohe wissenschaftliche und technische Bedeutung dieser Fragen wird seit einer Reihe von Jahren im Laboratorium für technische Physik der Technischen Hochschule in München eine systematische Untersuchung des Thomson-Joule-Effekts bezüglich seiner Abhängigkeit von Druck und Temperatur innerhalb weiterer Grenzen vorgenommen.

Die beiden englischen Forscher hatten ihre Versuche durch die Formel ausgedrückt

$$dT = a\left(\frac{273}{T}\right)^2 \cdot dp,$$

---

[1]) Thomson und Joule, On the Thermal Effects. Phil. Trans. 1853, 1854, 1862.

wobei dp der Druckunterschied vor und hinter der Drosselstelle a eine von der Natur des Gases abhängige Konstante und T die absolute Temperatur des Gases vor Eintritt in die Drosselstelle bedeutet. In einer Versuchsreihe in obengenanntem Laboratorium hatte Dr. Vogel[1]) bei Zimmertemperatur (+ 10°) festgestellt, daß dieses a keine Konstante ist, sondern linear mit dem Druck abnimmt, wofür er die Beziehung aufstellte $a = a - bp$, wobei er $a = 0{,}268$, $b = 0{,}00085$ fand. Anschließend hieran wurden nunmehr die Untersuchungen aut weitere Temperaturen ausgedehnt und der Kühleffekt bei acht verschiedenen Temperaturen zwischen + 250° und — 50° untersucht. Die vorliegende Mitteilung enthält die Wiedergabe dieser Versuchsresultate, sowie eine Formel, durch die alle Resultate auszudrücken versucht wurde. Die Versuche zeigten, daß die lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bis zu 150 Atmosphären bei allen untersuchten Temperaturen besteht, und sich für jede Temperatur eine Gleichung von der Form $a = a - bp$ aufstellen läßt. Jedoch ergab sich, daß sowohl „a" wie „b" selbst wieder eine Funktion der Temperatur sind und mit steigender Temperatur abnehmen.

Die zu der Untersuchung benötigten Mittel verdankt das Laboratorium der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen in Wiesbaden.

Die vorhandene Kompressionsanlage und der von Dr. Vogel konstruierte Durchströmapparat konnte unverändert benützt werden. Dagegen war es erforderlich, den Thermostaten zur Erzielung von hohen Temperaturen einem Umbau zu unterziehen, sowie einen Kühlapparat zur Erzielung der tiefen Temperaturen zu schaffen.

Der Grundgedanke der Untersuchung war folgender: Es sollte die Luft einen Kreislauf beschreiben und hierbei bei den

[1]) Dr. Emil Vogel, „Über die Temperaturänderung von Luft beim Strömen durch eine Drosselstelle". Sitzungsb. der K. Bayer. Akad. der Wissensch., math.-phys. Kl., 1909 und Dissert., München 1910, sowie Mitteilungen über Forschungsarbeiten des Vereins Deutscher Ingenieure, Nr. 108/109.

verschiedenen absoluten Drucken eine konstante Druckdifferenz von 6, 8 oder 10 Atmosphären aufrecht erhalten werden. Dies wurde dadurch erreicht, daß ein Whitehead-Kompressor die Luft nach der Hochdruckseite des Durchströmapparates pumpte und die Luft von der Niederdruckseite wieder ansaugte. Zwischen Hoch- und Niederdruckseite mußte die Luft einen Asbest-Drosselstopfen passieren. Nachdem der Kompressor acht Stahlflaschen von je 30 Liter Inhalt, die je zur Hälfte der Hoch- und Niederdruckseite des Durchströmapparates vorgeschaltet waren, auf den gewünschten Druck gebracht hatte, wurde der Luftkreislauf durch den Durchströmapparat eingeschaltet. Vor und hinter dem Drosselstopfen waren zur Temperaturmessung der Luft Platinwiderstandsthermometer angebracht. Der Druck auf der Hoch- und auf der Niederdruckseite wurde durch Federmanometer gemessen, wogegen die Druckdifferenz zwischen beiden Seiten direkt durch ein Differential-Quecksilbermanometer bestimmt wurde, bei dem die Höhe der Quecksilbersäule durch einen elektrischen Kontakt angezeigt war.

Zur Herstellung der Anfangstemperaturen, mit denen die Luft in den Durchströmapparat eintrat, kamen drei verschiedene Vorrichtungen in Anwendung. Zur Erzielung von Temperaturen von über 0° diente ein Ölthermostat, der sowohl durch Gas als auch durch elektrische Heizkörper geheizt werden konnte. Bei Temperaturen bis 100° genügte die elektrische Heizung allein, während bei den höheren Temperaturen die Hauptheizung durch Gas erfolgte und die elektrische Heizung nur zur Regulierung der Badtemperatur benützt wurde. Zur Herstellung von 0° wurde fein zerschlagenes Eis benützt, das sich zusammen mit Wasser in einem Holzbottich befand. Sowohl in den Ölthermostaten wie in den Eisbottich wurde der Durchströmapparat einfach hineingehängt. Auch eine 12 m lange Rohrschlange, die die Luft vor Eintritt in den Durchströmapparat durchströmen mußte, befand sich in den Temperaturbädern.

Wesentlich größere Schwierigkeiten bot die Herstellung der tiefen Temperaturen. Hierzu wurde die Verdampfungstem-

peratur tiefsiedender Flüssigkeiten verwendet. Da diese Stoffe bei gewöhnlicher Temperatur unter hohem Druck stehen, so war es erforderlich, den Durchströmapparat druckdicht in einen eisernen Behälter einzubauen, der den Kühlstoff in flüssigem Zustand aufnahm. Es wurde zuerst versucht, durch Verdampfen von Stickoxydul eine Temperatur von — 87,9° zu erzielen, doch gelang es bei der relativ geringen Verdampfungswärme des Stickoxyduls von 59,5 Kalorien bei 0° C nicht, die infolge der großen Temperaturdifferenz zwischen dem Apparat und der Außenluft eintretenden Kälteverluste zu decken. Es konnte daher weder die Temperatur von — 88° noch bei einer etwas höheren Temperatur ein Dauerzustand erzielt werden. Die tiefste Temperatur wurde dann auf — 55° beschränkt und dieselbe durch Verdampfen von flüssiger Kohlensäure bei ca. 5 Atmosphären Druck erreicht. Auch hier benötigte die Erzielung der zum Versuch erforderlichen stundenlangen Konstanz der Temperatur ein großes Maß von Aufmerksamkeit und Erfahrung. Eine Zwischentemperatur von — 34° wurde durch das Verdampfen von flüssigem Ammoniak bei Atmosphärendruck erreicht. Bei der großen Verdampfungswärme dieses Gases von ca. 300 Kalorien konnte der Dauerzustand genügend leicht stundenlang aufrecht erhalten werden. Bei den Versuchsreihen unter 0° wurde ein Gegenstromapparat benutzt, um die den Apparat verlassende kalte Luft zur Abkühlung der dem Apparat zuströmenden warmen Luft zu verwenden.

Zur Messung der Temperatur waren wie oben erwähnt Widerstandsthermometer eingebaut. Die Messung des Widerstands erfolgte nach der von Kohlrausch angegebenen Methode des übergreifenden Nebenschlusses mittels eines Edelmannschen Differential-Galvanometers und geeichter Normalwiderstände. Die verwendete Schaltung ermöglichte es in einfacher Weise nacheinander, die Temperatur auf Hochdruckseite, auf Niederdruckseite und direkt die Differenz der beiden Temperaturen zu messen. Es wurden zwei Platinwiderstandsspulen verwendet, die in Glasrohre eingeschmolzen waren, um eine Beschädigung der Widerstände, die beim Vorversuch bei hohen Tempera-

turen eingetreten war, zu verhindern. Von beiden Widerstandsspulen wurde die sogenannte Platinkonstante δ durch Messen der Widerstände bei 0° bei der Siedetemperatur des Wassers und der Siedetemperatur des Schwefels bestimmt. Diese Platinkonstante ist eine für jede Platinsorte verschiedene aber stets unveränderliche Größe, welche nach dem Vorgang von Callendar[1]) zur Bestimmung der Temperatur aus dem Widerstande dient.

Nach Callendar bestehen nämlich zwischen Widerstand und Temperatur folgende Beziehungen:

$$tp = 100 \frac{W_t - W_0}{W_{100} - W_0}$$

und

$$t - tp = \delta \left\{ \left(\frac{t}{100} \right)^2 - \left(\frac{t}{100} \right) \right\},$$

hierbei bezeichnet tp die sogenannte Platintemperatur W_t, W_0 und W_{100} bzw. die Widerstände bei t^0, 0°, und 100° C. Die erste Gleichung ergibt die Platintemperatur, während aus der zweiten Gleichung die Abweichung der wahren Temperatur von der Platintemperatur bestimmt wird.

Bei den beiden verwendeten Widerstandsthermometern ergaben sich folgende Platinkonstanten:

$$\delta_1 = 1{,}5046$$
$$\delta_2 = 1{,}5571.$$

In den folgenden acht Zahlentafeln sind die Versuchsergebnisse numerisch angegeben. In den Zahlentafeln enthalten Reihe 1 das Datum der Versuche, Reihe 2 die Einströmungstemperaturen t_e auf Hochdruckseite, Reihe 3 die arithmetischen Mittel der absoluten Drucke von Hoch- und Niederdruckseite, Reihe 4 die Druckdifferenzen Δp zwischen Hoch- und Niederdruckseite, Reihe 5 die bei diesen Druckdifferenzen eingetretenen Abkühlungen, während in Reihe 6 diese Abkühlungen auf 1 kg/cm² Druckdifferenz und auf die mittlere Temperatur der ganzen Versuchsreihe reduziert sind.

---

[1]) Callendar, Phil. Trans. 1891.

Zahlentafel 1. Versuche bei $-55{,}4^0$ C.

1	2	3	4	5	6
Datum	t_e	$\frac{p_1 - p_2}{2}$	Δp	ΔT	$\alpha_{-55{,}4^0}$
26. V. 11	— 55,72	121,3	5,96	1,385	0,232
26. V. 11	— 56,29	96,7	5,96	1,692	0,283
31. V. 11	— 56,20	145,6	5,99	1,164	0,194
1. VI. 11	— 55,93	145,4	6,01	1,152	0,192
2. VI. 11	— 55,48	72,0	6,00	1,967	0,328
2. VI. 11	— 56,08	48,2	6,00	2,203	0,366
21. VI. 11	— 55,42	48,2	5,95	2,165	0,364
21. VI. 11	— 55,07	23,0	5,97	2,366	0,397
22. VI. 11	— 51,66	23,1	5,98	2,313	0,400
1. VII. 11	— 54,89	22,5	5,96	2,360	0,398
7. XI. 11	— 56,18	75,2	5,96	1.947	0,326

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{-55{,}4^0} = 0{,}441 - 0{,}00167 \cdot p$.

Zahlentafel 2. Versuche bei $-34{,}0^0$ C.

1	2	3	4	5	6
Datum	t_e	$\frac{p_1 - p_2}{2}$	Δp	ΔT	$\alpha_{-34{,}0^0}$
19. IX. 11	— 33,80	23,0	5,95	2,052	0,346
22. IX. 11	— 34,03	23,5	5,94	2.052	0,345
26. IX. 11	— 33,95	95,8	5,99	1,530	0,256
26. IX. 11	— 33,89	72,5	5,96	1,705	0,286
26. IX. 11	— 33,79	47,3	5,96	1,885	0,317
5. X. 11	— 34,16	120,3	5,96	1,219	0.205
5. X. 11	— 34,12	96,7	5,98	1,515	0,253
6. X. 11	— 34,08	145,0	5,97	1,125	0,189
6. X. 11	— 34,08	120,3	5,98	1,219	0,202
6. X. 11	— 34,05	145,1	5,99	1,121	0,187
7. X. 11	— 34,18	72,5	5.96	1,705	0,286
7. X. 11	— 34,07	48,2	5,96	1,872	0,314

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{-34{,}0^0} = 0{,}379 - 0{,}00135 \cdot p$.

Zahlentafel 3. Versuche bei — 0,6° C.

1	2	3	4	5	6
Datum	t_e	$\frac{p_1 - p_2}{2}$	Δp	ΔT	$\alpha_{-0,6^0}$
22. III. 12	— 0,53	149,8	7,97	1,197	0,150
22. III. 12	— 0,57	126,2	7,98	1,346	0,169
22. III. 12	— 0,59	101,0	7,84	1,498	0,189
22. III. 12	— 0,60	75,3	7,95	1,701	0,214
23. III. 12	— 0,69	50,2	7,97	1,858	0,233
23. III. 12	— 0,75	25,4	7,98	1,975	0,247
26. III. 12	— 0,50	149,4	7,95	1,212	0,153
26. III. 12	— 0,52	99,8	7,95	1,543	0,194
26. III. 12	— 0,61	51,0	7,95	1,798	0,226
26. III. 12	— 0,66	25,4	7,99	1,965	0,246
26. III. 12	+ 0,85	25,6	5,96	1,468	0,249

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{-0,6^0} = 0,268 - 0,000775 \cdot p$.

Zahlentafel 4. Versuche bei + 49,2° C.

1	2	3	4	5	6
Datum	t_e	$\frac{p_1 - p_2}{2}$	Δp	ΔT	$\alpha_{+49,2^0}$
6. II. 12	48,92	75,1	7,96	1,252	0,157
6. II. 12	49,41	50,4	7,96	1,350	0,170
13. II. 12	49,40	25,3	7,93	1,437	0,181
8. III. 12	49,73	148,9	7,96	0,937	0,118
8. III. 12	49,52	99,0	7,96	1,131	0,142
8. III. 12	49,43	50,5	7,94	1,338	0,169

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{+49,2^0} = 0,193 - 0,000539 \cdot p$.

Zahlentafel 5. Versuche bei $+99,5^0$ C.

1	2	3	4	5	6
Datum	t_e	$\frac{p_1 - p_2}{2}$	Δp	ΔT	$\alpha_{+99,5^0}$
17. I. 12	100,14	150,0	5,97	0,499	0,083
5. II. 12	99,47	76,6	7,98	0,897	0,113
12. II. 12	99,58	50,3	7,99	0,953	0.119
12. II. 12	99,49	25,0	7,98	1,004	0,126
6. III. 12	99,48	150,1	7,94	0,778	0,098
6. III. 12	99,26	100,0	7,96	0,809	0,102
6. III. 12	99,32	50,6	7,94	0,949	0,120

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{+99,5^0} = 0,134 - 0,000290 \cdot p$.

Zahlentafel 6. Versuche bei $+149,7^0$ C.

1	2	3	4	5	6
Datum	t_e	$\frac{p_1 - p_2}{2}$	Δp	ΔT	$\alpha_{+149,7^0}$
18. I. 12	149,84	151,0	8,01	0,370	0,046
18. I. 12	149,93	126,0	8,05	0,436	0,054
3. II. 12	149,53	76,5	7,95	0,606	0,076
3. II. 12	149,61	51,6	7,96	0,624	0,078
5. II. 12	149,83	101,9	7,95	0,547	0,069
12. II. 12	149,63	25,3	7,95	0,698	0,088

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{+149,7^0} = 0,098 - 0,000337 \cdot p$.

Zahlentafel 7. Versuche bei + 199,3° C.

1 Datum	2 t_e	3 $\frac{p_1 - p_2}{2}$	4 $\varDelta p$	5 $\varDelta T$	6 $\alpha_{+199,3^0}$
1. II. 12	198,04	154,3	7,97	0,259	0,032
1. II. 12	199,19	125,8	7,95	0,276	0,035
1. II. 12	199,50	101,5	7,98	0,294	0,037
1. II. 12	199,60	101,4	5,95	0,225	0,038
1. II. 12	198,67	76,6	7,97	0,323	0,041
12. II. 12	199,62	50,5	7,98	0,393	0,049
15. II. 12	199,80	25,2	7,97	0,355	0,045

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{+199,3^0} = 0,051 - 0,000123 \cdot p$.

Zahlentafel 8. Versuche bei + 249,9° C.

1 Datum	2 t_e	3 $\frac{p_1 - p_2}{2}$	4 $\varDelta p$	5 $\varDelta T$	6 $\alpha_{+249,9^0}$
8. II. 12	249,94	149,7	7,97	0,010	0,001
8. II. 12	249,74	124,7	7,96	0,034	0,004
8. II. 12	249,65	100,4	7,98	0,052	0,007
8. II. 12	249,65	75,0	7,97	0,080	0,010
10. II. 12	249,96	50,3	7,98	0,060	0,008
10. II. 12	249,93	25,2	7,94	0,124	0,014
11. III. 12	249,80	50,2	7,94	0,109	0,014
14. III. 12	249,91	150.2	7,94	0,060	0,007
14. III. 12	249,75	100,3	7,98	0,087	0,011

Gleichung für lineare Abhängigkeit des Kühleffekts vom Druck bei konstanter Temperatur: $\alpha_{+249,9^0} = 0,016 - 0,000084 \cdot p$.

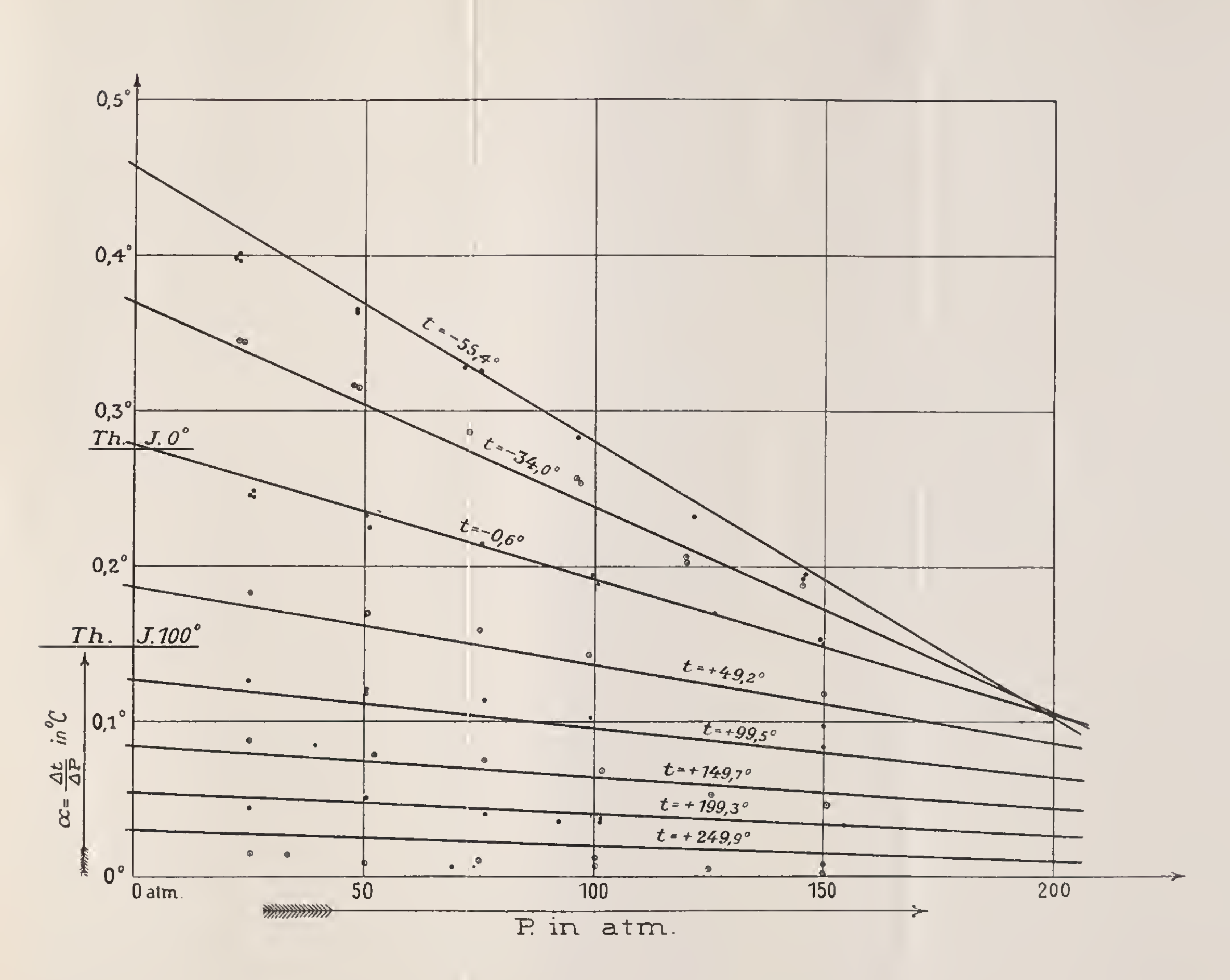
Aus den angegebenen Werten desKühleffekts wurde nachstehende Formel entwickelt:

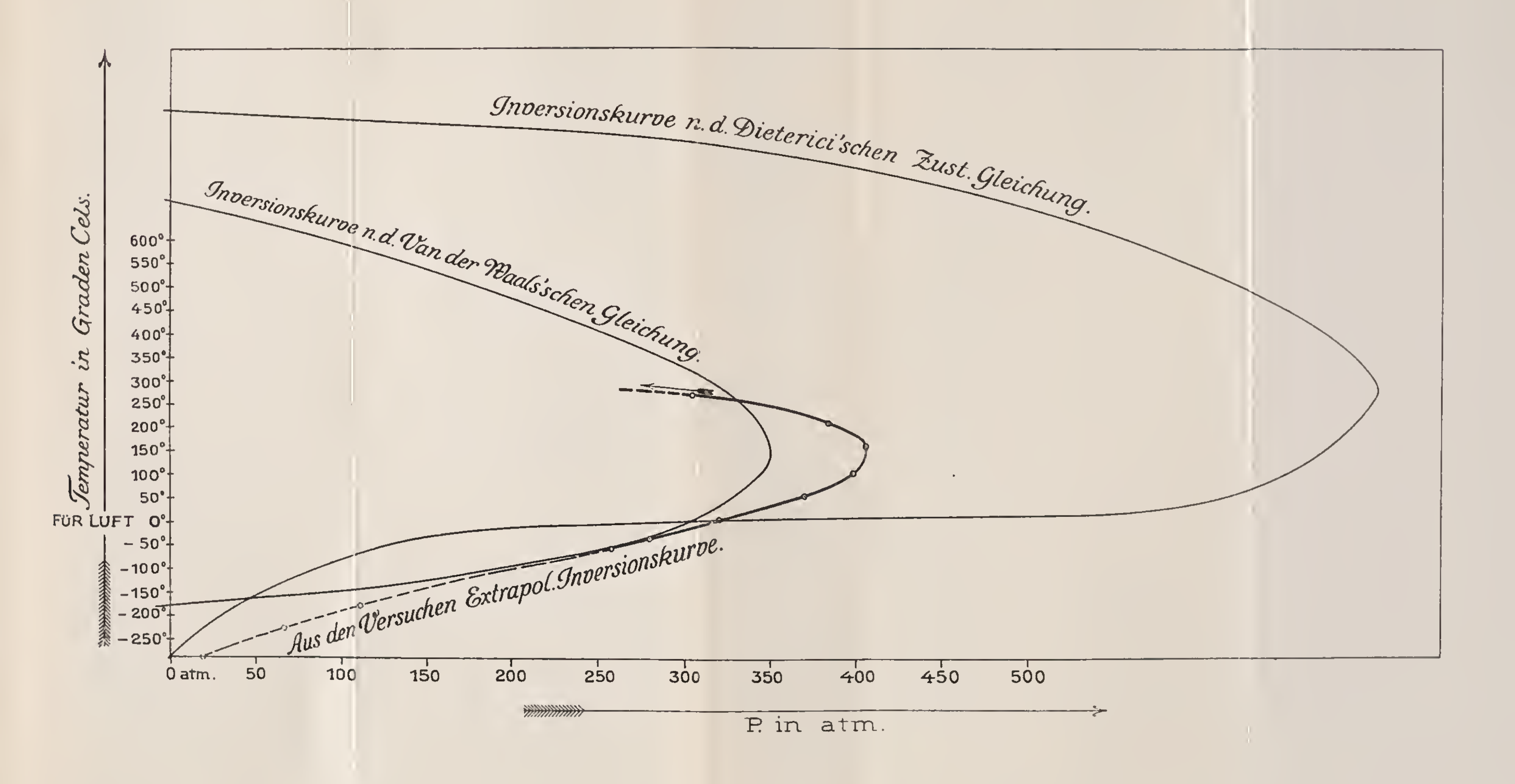
$$\alpha = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{50,1 + 0,0297 \cdot p}{T} + \frac{14830 - 1,674 \cdot p}{T^2}$$

$$+ \frac{366000 - 19093 \cdot p}{T^3} - (0,122 + 0,0000157 \cdot p).$$

In der Kurventafel 1 sind die Versuchspunkte und die aus obiger Gleichung sich ergebenden geradlinigen Isothermen des Kühleffekts aufgetragen. Es ist zu ersehen, daß zwischen $+ 200^0$ und $- 50^0$ die Gleichung mit den Versuchspunkten ziemlich gut übereinstimmt, während dies bei $+ 250^0$ nicht mehr der Fall ist. In Kurventafel 2 sind die Werte, die man aus obiger Formel für $\alpha = 0$ erhält, zusammengestellt mit den sogenannten Inversionskurven oder Nullkurven, wie sie Porter[1]) aus der van der Waalschen Zustandsgleichung und einer von Dieterici aufgestellten berechnet. Die sogenannte Nullkurve teilt die $T - p$ Ebene in zwei Teile. Innerhalb des von der Kurve umschlossenen Ebenenstückes ist der Kühleffekt positiv und es tritt bei Drosselung Abkühlung des Gases ein, außerhalb der Nullkurve ist der Kühleffekt negativ, es tritt Erwärmung ein. Der Vergleich der aus der Formel, die aus den Versuchen gewonnen wurde, berechneten Nullkurve mit jenen, die den beiden Zustandsgleichungen entsprechen, zeigt, daß bis zu Temperaturen von etwa $+ 100^0$ C die erste Kurve in der Nähe der beiden anderen verläuft, während bei höheren Temperaturen keinerlei Übereinstimmung mehr besteht.

[1]) Porter, Phil. Mag. 1906.


0,5°
0,4°
0,3°
0,2°
0,1°
0°
Th. J. 0°
Th. J. 100°
$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta P}$ in °C
t = −55,4°
t = −34,0°
t = −0,6°
t = +49,2°
t = +99,5°
t = +149,7°
t = +199,3°
t = +249,9°
0 atm.
50
100
150
200
P. in atm.



Lith. Hubert Köhler, München

Über das Interparietale und die Verknöcherung des Schädeldachs bei Affen.

Von **J. Ranke.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Meine Untersuchungen über „Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldachs" erschienen in den Abhandlungen unserer Akademie im Jahre 1899[1]).

Es reiht sich daran eine Anzahl von Publikationen ausgezeichneter Forscher[2]), durch welche die eine Seite der von

---

[1]) J. Ranke, Abhandlungen der K. Bayer. Akad. der Wissensch., II. Kl., XX. Bd., II. Abt., S. 277—464 (Separatabdr. S. 1—190), 1899.

[2]) Ich nenne nur einige der wichtigsten einschlägigen Abhandlungen:

1. Bianchi, S. Sullo sviluppo dell' osso parietale umano. Arch. di Anat. e di Embryol., vol. II, 1903.
2. F. Frasetto, Di parietali di Primati parzialmente divisi. Bull. dei mus. di zool. et anat. comp. della R. universita di Torino, vol. XV.
3. A. Hrdlicka, A bilateral Division of the Parietal Bone in a Chimpanzee, with a special Reference to the oblique Sutures in the Parietal. Bull. of the Americ. Mus. of Nat. Hist., vol. XIII, 1900.
4. A. Hrdlicka, Divisions of the Parietal Bone in Man and other Mammals. Bull. of the Americ. Mus. of Nat. Hist., vol. XIX, 1903.
5. H. Kantor, Geteilte Scheitelbeine bei Macacus rhesus. Zeitschr. f. Morph. u. Anthr., Bd. VII, S. 543.
6. A. F. Le Double, Traité des Variations des os du crâne, Paris 1903.
7. A. F. Le Double, Traité des Variations des os de la face, Paris 1906.
8. L. Maggi, Résultats des recherches morphologiques sur les os et les fontanelles du crâne humain. Arch. de Biologie, t. 27, 1896.
9. G. Schwalbe, Über geteilte Scheitelbeine. Zeitschr. f. Morph. u. Anthr., Bd. VI, 1903.
10. G. Schwalbe, Über die Stirnnaht bei den Primaten. Zeitschr. f. Morph. u. Anthr., Bd. VII.

mir behandelten Erscheinungen: die statistische Zählung der verschiedenen Formen der „überzähligen Knochen“ und der ihnen entsprechenden „überzähligen Nähte des Schädeldachs“, durch Beibringung eines reichen Vergleichsmaterials an Schädeln junger und erwachsener Individuen, sowohl von Affen der alten als der neuen Welt, in erfreulichster Weise einen weiteren Ausbau erfahren hat.

Dagegen hat die entwickelungsgeschichtliche und die allgemein vergleichende Seite der Frage geringe oder, wir dürfen wohl sagen, keine irgend wesentliche Fortbildung erfahren. Hiefür sollen die folgenden Mitteilungen einiges neue Beobachtungsmaterial bringen. Die von mir damals veröffentlichten Untersuchungen über die fötale Entwickelung der Hautknochen des Schädeldachs bezogen sich ausschließlich auf den Menschen. Hier ist sonach noch eine große Lücke auszufüllen, zunächst durch Beobachtungen an Affenembryonen. Aber auch für jugendliche und erwachsene Affenschädel hat sich einiges Neue ergeben.

Die Anregung zu den folgenden Mitteilungen ging aus von der im letzten Jahre (1912) erschienenen umfassenden Monographie des Herrn L. Bolk auf neuen Untersuchungen großartiger Serien von Affenschädeln basierend. Die Arbeit erscheint in Beziehung auf die statistischen Zählungen für unsere Frage im wesentlichen abschließend. Ein besonderes Verdienst erwarb sich der Autor auch durch Berücksichtigung und Benützung der einschlägigen Literatur[1]).

---

[1]) Prof. L. Bolk, Amsterdam, Über die Obliteration der Nähte am Affenschädel, zugleich ein Beitrag zur Kenntnis der Nahtanomalien (Neunter Beitrag zur Affenanatomie) mit 64 Textfiguren. Zeitschr. f. Morph. u. Anthr., Bd. XV, S. 1—206, 1912. Hier ist die neuere Literatur zusammengestellt, worauf ich verweisen möchte.

Die Untersuchungen des Herrn Bolk erstreckten sich auf nahezu 800 Schädel von Affen der alten und neuen Welt (l. c. S. 5):

Cebus capucinus .	60	Schädel	Semnopithecus . .	125	Schädel
Chrysothrix . . .	90	„	Siamang (Hylobates)	44	„
Ateles	12	„	Orangutan . . .	21	„
Mycetes seniculus .	12	„	Gorilla	16	„
Macacus cynomolgus	410	„			

Die neuen statistischen Untersuchungen haben trotz des so bedeutend angewachsenen Vergleichsmaterials aus den Sammlungen Europas und Amerikas meine damaligen Resultate in allem Wesentlichen bestätigt.

Scheitelbein.

Am meisten Interesse unter meinen Resultaten hat der Nachweis des frühfötalen Charakters der Scheitelbeinnaht, Sutura parietalis, beim Menschen durch die sichere Konstatierung eines oberen und eines unteren Scheitelbeins als normale elementare Bauelemente des menschlichen Schädels gefunden. Die Mehrzahl der einschlägigen neueren Publikationen beschäftigt sich mit der „überzähligen“ Scheitelbein-Naht.

Die Zahl der an Menschenschädeln beobachteten Fälle hat sich seit meiner Publikation infolge der Durchsicht der kraniologischen Sammlungen in Europa und Amerika sehr wesentlich vermehrt. Während ich 1899 durch eigene Beobachtungen und aus der Literatur nur 12 Fälle der Persistenz der frühfötalen Sutura parietalis bei erwachsenen Menschen namhaft machen konnte, als wissenschaftlich einwandfrei beschrieben,

---

Die Affenschädel unserer Anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates, welche ich vor allem zu meinen Studien benützt habe, sind folgende 632:

Orangutan (Selenka)	242 + 3	Schädel
Gorilla (Haberer)	9	„
Schimpanse	10	„
Tschego	1	„
Hylobates concolor (Selenka)	217	„
Hylobates syndactylus (Selenka)	10	„
Semnopithecus nasicus (Selenka)	17	„
Semnopithecus rubicundus (Selenka)	14	„
Semnopithecus pruinosus (Selenka)	13	Schädel
Inuus speciosus (Haberer)	80	„
Inuus silenus (Selenka)	10	„
Inuus nemestrinus (Selenka)	6	„
(Cercocebus) Macacus cynomolgus	3	„

Affen der neuen Welt fehlen bis jetzt in unserer anthropologischen Sammlung.

wurde mir selbst schon bald nach dem Erscheinen meiner Monographie, angeregt durch dieselbe, von Herrn W. His aus der Sammlung der Anatomie der Leipziger Universität ein Schädel mit Scheitelbein-Naht gesendet, den ich als 13. mir bekannt gewordenen Fall in den Sitzungsberichten unserer Akademie mitgeteilt habe[1]).

Herr G. Schwalbe konnte 1903 in seiner Abhandlung über geteilte Scheitelbeine schon 40 Fälle dieser typischen Bildung aufzählen; Herr Hrdlicka berichtet im gleichen Jahr (1903) von 58 Fällen vollkommener Scheitelbein-Naht beim Menschen und Herr L. Bolk schätzt in seiner erwähnten, 1912 erschienenen Monographie die Zahl der wissenschaftlich beobachteten Scheitelbeinnaht-Schädel des erwachsenen Menschen auf etwa 70.

Daneben wurden Zählungen der Scheitelbeinnaht-Schädel bei einer enormen Anzahl von Affen der verschiedenen Spezies ausgeführt.

Trotz dieses so großartig angewachsenen Vergleichsmaterials bleibt meine Aufstellung über die relative Häufigkeit der Persistenz der frühfötalen Scheitelbein-Naht bei Mensch und Affen vollkommen bestehen.

Durch meine statistischen Zählungen an 3000 Menschenschädeln (Altbayern) und 245 Orangutan-Schädeln hatte ich die bedeutend größere Häufigkeit der Scheitelbein-Naht bei letzteren sicher gestellt. Ich fand eine vollkommen trennende Scheitelbein-Naht bei Orangutan unter 245 Schädeln einmal und unter der gleichen Anzahl 13mal unvollkommen trennende Scheitelbein-Nähte; dagegen fand ich unter 3000 Menschenschädeln einmal einen Schädel mit vollkommen trennender Scheitelbein-Naht und 3 mit unvollkommen trennender Scheitelbein-Naht. „Auf 3000 Orangutan-Schädel würden sonach zirka 12 Schädel mit vollkommen trennender Scheitelbein-Naht treffen (dagegen ein Menschenschädel) und 170 mit unvollkommen tren-

---

1) J. Ranke, Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldachs. Nachtrag. Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., Bd. XXIX, Heft III. S. 415—422, 1899.

nenden Nähten (dagegen drei Menschenschädel), d. h. bei den Orangutan-Schädeln ist die Häufigkeit der Scheitelbein-Nähte zirka 40—50 mal größer als bei dem erwachsenen Menschen." [1])

„Über „das Vorkommen der (horizontalen, queren) Scheitelbein-Naht, Sutura parietalis an Schädeln anderer Affen" sagte ich damals [2]):

„Für andere Affen als den Orangutan stehen mir (abgesehen von Hylobates) größere statistische Zählungen nicht zu Gebote. Um so bedeutsamer erscheint es, daß unter dem ziffernmäßig geringfügigen Material, welches ich durchgesehen habe, doch einige quere Scheitelbein-Nähte nachgewiesen werden konnten."

Ich berücksichtigte vor allem jugendliche Schädel, bei welchen die Nähte offen und exakt zu beobachten waren. Eine vollkommen trennende Naht wurde in keinem Fall konstatiert, dagegen unvollständige sagittale Scheitelbein-Nähte unter acht jugendlichen Gorilla-Schädeln einmal; unter elf jugendlichen Schimpanse-Schädeln fand sich ein Schädel mit doppelseitigem großem Nahtrest; unter 70 Schädeln von Hylobates concolor fanden sich keine Reste der queren Scheitelbein-Naht. „Dagegen habe ich sowohl bei niederen Affen der alten wie der neuen Welt die (unvollständige) sagittale Scheitelbein-Naht gefunden": bei Cynocephalus ursinus und Mycetes seniculus. „Aus diesen gelegentlichen Funden kann wenigstens so viel geschlossen werden, daß sich bei allen Primatengruppen in einzelnen Fällen die horizontale Scheitelbein-Naht als die gleiche typische Bildung findet wie bei dem Menschen. Wir werden nicht fehl gehen, wenn wir, im Hinblick auf die geringe darauf geprüfte Schädelanzahl, weiter annehmen, daß die Häufigkeit der wahren Scheitelbein-Naht bei den Affen ziemlich viel größer ist als bei dem erwachsenen Menschen; für den Orangutan konnten wir je die größere Häufigkeit direkt feststellen."

Die von mir hier gestellte wissenschaftliche Aufgabe: der

---

[1]) J. Ranke, l. c. S. 315 (41).

[2]) J. Ranke, l. c. S. 317 (43) und 318 (44).

Scheitelbein-Naht auch bei den niedrigen Affen eine statistische Zählung und nähere Würdigung zu Teil werden zu lassen, wurde, wie gesagt, von den neueren Autoren in umfassender Weise gelöst.

Ohne hier in nähere Darlegung der geschichtlichen Folge der einschlägigen Untersuchungen eintreten zu wollen, möchte ich doch einige Bemerkungen des Herrn L. Bolk wörtlich zitieren. Er sagt[1]):

„Nachdem im Jahre 1899 Ranke wertvolle Mitteilungen über das Vorkommen der Scheitelbein-Naht gemacht hat, erschienen im Jahre 1903 unabhängig voneinander zwei mehr umfassende Arbeiten über dieses Thema, nämlich von Schwalbe und von Hrdlicka, während im selben Jahre die zusammenfassende Arbeit von Le Double über die Variationen der Schädelknochen veröffentlicht wurde, worin ebenfalls neue Beobachtungen bezüglich der parietalen Naht mitgeteilt wurden. Sowohl Schwalbe als Hrdlicka geben zunächst eine zusammenfassende Übersicht über die beim Menschen bekannt gewordenen Fälle von vollständig oder partiell geteilten Scheitelbeinen, um sodann auch die von anderen Primaten schon veröffentlichten Fälle zu erwähnen, wobei besonders Hrdlicka denselben eine nicht geringe Zahl neuer Fälle zufügt.“ („Im ganzen hat dieser Autor 391 Affenschädel auf das Vorkommen dieser Naht untersuchen können und zwar 273 Katarrhinen und 118 Platyrrhinen und fand bei der erstgenannten Gruppe eine Andeutung von kompletter Entwickelung der Naht in 12,8 °/₀, bei der zweitgenannten in 14,3 °/₀. Hier stellen sich somit — gegen eine frühere Annahme G. Schwalbes — die amerikanischen Affen an die Spitze.“) „Auch Le Double und Kantor teilen einige neue Beobachtungen mit.“

„Faßt man die Ergebnisse dieser Autoren zusammen, dann stellt sich folgendes als Hauptresultat heraus: Die Zweiteilung des Parietals kommt wohl bei allen Primatengeschlechtern vor.“ Wo in einzelnen Affenspezies bisher Beobachtungen noch fehlten,

---

[1]) L. Bolk, l. c. S. 21 ff.

„darf man das wohl auf Rechnung der geringen Anzahl dieser Schädel in den Museen stellen.“ Die Beobachtungen von Herrn L. Bolk füllen diese Lücken zum Teil, z. B. für Chrysothrix, schon aus.

„Der Mensch ist wohl als eine der Formen zu betrachten, wo die Parietalnaht am seltensten auftritt.“ „Viel häufiger tritt diese Variation bei Affen auf. Schon Ranke hat darauf hingewiesen und auf Grund einer mehr vollständigen Berücksichtigung der Literatur, besonders der niederen Primaten, kommt Schwalbe zum gleichen Ergebnis.“ Das Gleiche gilt von allen anderen genannten Autoren.

Auch die von mir ausführlich behandelten Fragen: der „schrägen Scheitelbein-Naht“ und der „Randspalten“[1]) wurden eingehend statistisch verfolgt und das Resultat zum Teil in einen gewissen Gegensatz gegen meine Angaben gestellt. Ich muß aber auch heute noch auf meinem alten Standpunkt beharren.

Die Ansicht, daß die von mir aufgezählten unvollständigen horizontalen Scheitelbein-Nähte vielleicht als „Randspalten“ könnten aufgefaßt werden, mag sich zum Teil daraus erklären, daß meine Mitteilungen über das Wesen der „Randspalten“ und meine entwickelungs-geschichtlichen Feststellungen über die Entwickelung des Scheitelbeins bei dem Menschen unbekannt oder unberücksichtigt geblieben sind. Es sei gestattet, an meine Resultate zu erinnern. Ich habe im Anschluß an Herrn C. Told gefunden:

„Das Scheitelbein der menschlichen Anatomie ist ein Komplex von zwei embryonal getrennt angelegten Elementarknochen des Schädels, welche erst im späteren Verlauf der Entwickelung miteinander verschmelzen.“ [2])

Nicht nur bleibt in gewissen Fällen die fötale Trennungsnaht zwischen den von mir als oberes und unteres Scheitelbein benannten Elementarknochen als Scheitelbein-Naht, Sutura

[1]) J. Ranke, l. c. S. 339 (65) ff., vgl. auch schon S. 336 (62) f.
[2]) J. Ranke, l. c. S. 326 (52).

parietalis bestehen, es erhalten sich auch typische Verschiedenheiten in der Nahtbildung zwischen ihnen und den Nachbarknochen (den beiden Stirnbeinhälften) und stets nehmen die unvollständigen Scheitelbein-Nähte ihren Ursprung an der Zwischengrenze zwischen diesen beiden durch die Nahtformen typisch charakterisierten Knochenabschnitten. Da wo die fötale Naht auf die Kranznaht stößt, bestand in der Entwickelungsperiode zeitweilig eine Art von Fontanella, welche bei erwachsenen Schädeln noch durch die bekannten, hier nicht selten doppelseitig gelagerten Fontanellknochen (Wormsche Knochen der Kranznaht) etwa in der Mitte der Kranznaht markiert wird.

Im frühfötalen Leben ist die Sutura parietalis eine normale Schädelnaht und damit erklärt sich ihre, wie ich konstatiert habe, noch bei älteren menschlichen Föten und Neugeborenen so außerordentlich viel größere Häufigkeit als bei Erwachsenen. Die Häufigkeit ist bei den noch unentwickelten Menschenschädeln eine weit bedeutendere als bei höheren und niederen Affen.

Unter genauer Darlegung meines Beobachtungsmaterals und der einzelnen Beobachtungen selbst habe ich meine statistischen Zählungen der Scheitelbein-Naht an 162 Schädeln altbayerischer Neugeborener und älteren Früchte"[1]) mitgeteilt:

„Fassen wir, wie wir es bei dem erwachsenen Menschen und dem Orangutan getan, nur die eigentlichen offenen Nahtreste ins Auge, so fanden sich unter 162 Schädeln altbayerischer Neugeborener und älterer Früchte:

18 mit Resten der Sutura parietalis = 111 pro mille, während bei den Schädeln erwachsener Altbayern nur

4 auf 3000

gefunden wurden, bei welchen die betreffende Naht im ganzen oder teilweise offen war."

„Unter 245 Orangutan-Schädeln verschiedenen Alters fanden sich 14 mit ganz oder teilweise offener Parietalnaht."

[1]) l. c. 335 (61).

„Daraus ergibt sich die folgende vergleichende Statistik nach meinen Zählungen für vollkommene und unvollkommene Scheitelbein-Nähte:

Anzahl der geprüften Schädel:	Anzahl der Scheitelbein-Nähte gezählt:	auf 1000 berechnet:
3000 erwachsenen Menschen (Altbayern)	4	1,33 ‰
162 neugeborenen Menschen und ältere Früchte (Altbayern) .	18	111,00 ‰
245 Orangutan	14	57,10 ‰

„Bei neugeborenen Menschen und älteren menschlichen Früchten des brachycephalen altbayerischen Stammes ist die Häufigkeit des Vorkommens von Resten der Sutura parietalis hundertmal größer als bei den Erwachsenen desselben Stammes. Bei den Orangutan-Schädeln ist das Vorkommen dieser Nahtreste etwa fünfzigmal häufiger als bei den erwachsenen Menschen (Altbayern) und etwa halb so häufig als bei den Neugeborenen und älteren menschlichen Früchten."

Der Zusammenhang der vollkommenen und unvollkommenen Sutura parietalis mit dem normalen Entwickelungsvorgang bei dem Menschenschädel erscheint damit festgestellt, und die Erscheinung darf daher nicht als „Fragmentierung des Ossifikationszentrums im Parietale", also als eine halbpathologische, betrachtet werden[1]). Herr Bolk bezeichnet diese „Fragmentierung" „als eine progressive Erscheinung" von gleicher Natur wie das Auftreten mehrerer Ossifikationszentren in der Squama occipitalis beim Menschen, die er auch als einen Neuerwerb betrachtet, „der mit der ansehnlichen Flächenausbreitung dieses Knochens bei dem Menschen in Konnex stehen darf." Ich komme im Verlauf dieser Untersuchung auf diese meinen Beobachtungen widersprechenden Erklärungsversuch zurück. Hier muß aber schon darauf hingewiesen werden, daß die größte Häufigkeit dieser angeblichen „Fragmentierung" sich

[1]) L. Bolk, l. c. S. 156.

nicht beim Menschen, sondern, wie nun allgemein anerkannt ist, bei den Affen trotz ihrer weitaus geringeren Flächenausbreitung der Schädelkapsel findet; die „Flächenausbreitung" kann sonach mit der angeblichen „Zersplitterung" nicht in einer positiven Relation stehen.

Der hier wie an anderen Stellen der neuen Untersuchungen auftretende Widerspruch gegen meine Darstellungen beruht vor allem darauf, daß wie gesagt die zweite Seite der von mir in der Monographie über die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädels behandelten Erscheinungen: das Studium der individuellen Entwickelung der betreffenden Knochen und ihrer elementaren Komponenten in den genannten neueren Untersuchungen leider viel zu sehr vernachlässigt worden ist. Hier hat gewiß die Forschung wieder einzusetzen, wenn Resultate, die nicht auf mehr oder weniger begründeten Vermutungen sondern auf realen Beobachtungen basiert sind, gewonnen werden sollen. In den Sammlungen Europas und Amerikas, welche so große Serien von Affenschädeln vereinigen, werden sich doch gewiß auch genug gut konservierte Affenembryonen finden, die ein exaktes Studium der Schädelknochenbildung gestatten. Freilich sind bis jetzt Affenembryonen in den einschlägigen Sammlungen nicht häufig, hier hat die Sammlungstätigkeit energisch einzugreifen.

Neue embryologische Untersuchungen an Affenembryonen.

Das mir für Bearbeitung der vorliegenden Frage zur Verfügung stehende Material an Affenembryonen ist leider auch sehr beschränkt, sodaß die folgenden Mitteilungen keine definitive Entscheidung sondern nur Richtpunkte für folgende vollständigere Serienuntersuchung liefern können.

Die anthropologisch-prähistorische Sammlung des Bayerischen Staates ist im Besitz von drei mazerierten Embryonen-Skelettchen von Hylobates(spezies?) und zwei nach der vortrefflichen Schultzeschen Methode durchsichtig gemachten Embryonen von Macarus cynomolgus L., die wir der Güte Se-

lenkas verdanken[1]). Die Hylobates-Embryonen sind ein Geschenk von Herrn Professor Dr. Haberer.

Der kleinere der beiden Macacus-Embryonen hat eine Scheitelsteißlänge (Fig. 1) von 35 mm. Dieser Größe würde,



Fig. 1.

wie Herr C. Told jun. bemerkte, ein menschlicher Embryo von nicht ganz zwei Monaten entsprechen, dem Entwickelungsstadium nach ähnelt er aber einem menschlichen Embryo des dritten Fötalmonats. Er ist männlichen Geschlechts.

Der größere der Macacus-Embryonen ist weiblichen Geschlechts, seine Scheitelsteißlänge beträgt 56 mm (Fig. 2), der Größe nach entspricht er, nach Herrn Told, einem menschlichen Fötus im Alter von gegen drei Monaten; der Entwickelungsstand ist aber auch bei ihm weiter fortgeschritten, als

[1]) Ich habe die beiden Embryonen durch Herrn Dr. Karl Told junior: Über die äußere Körperform zweier verschieden großer Embryonen von Macacus cynomolgus L. (aus dem Münchener anthropolog. Institut) beschreiben lassen. Archiv f. Anthropologie, Bd. XXVII, S. 277—287.

die Größenvergleichung vermuten läßt — wie das erwachsene Tier so ist selbstverständlich auch der Macacus-Embryo auf allen Entwickelungsstadien kleiner als der Mensch.

Die Hylobates-Skelettchen sind durch Mazeration in ihre einzelnen knöchernen Bestandteile zerlegt.



Fig. 2.

Die Scheitelbeine der Hylobates-Embryonen sind stark gekrümmt, in Projektion und mit dem Bandmaß gemessen ergeben sich folgende Größenverhältnisse:

Scheitelbeine von drei Hylobates-Embryonen:

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
a) Mittlere Breite in Projektion	32 mm	27,5 mm	31,0 mm
b) „ Höhe „ „	26 „	24,0 „	30,0 „
c) Wirkliche Höhe (mit dem Bandmaß über die Außenfläche gemessen	38 „	31,0 „	38,0 „
Krümmungsindex (aus b und c berechnet	68,42 „	77,71 „	78,94 „

Die Knochen des einen der drei Embryonen-Skelettchen Nr. 2 sind etwas kleiner als die der beiden anderen. Nach Größenschätzungen und Vergleichungen der Knochen mit menschlichen Embryonenschädeln entsprechen die Skelettchen menschlichen Embryonen vom 4. bis 5. Monat, etwa 19 CM Scheitelsteißlänge. Die Affenembryonen waren aber wohl, wenn wir die entschiedene Größe von neugeborenen Menschen und Hylobates berücksichtigen, nicht mehr fern von der Geburt, ihre uterine Entwickelung nahezu vollendet.

Die Untersuchung der embryonalen Macacus- und Hylobates-Scheitelbeine ergab folgende Resultate.

Bei dem kleineren der Macacus-Embryonen ist das Scheitelbein in den ersten Stadien der Anlage, welches nach Carl Told sen. beim Menschen in die 10. Embryonalwoche fällt, man erkennt nichts als ein unregelmässiges weitmaschiges Netz zartester Knochen-Bälkchen oder -Fäserchen noch ohne Andeutung einer oder mehrerer dichterer Zentren.

Bei dem größeren der beiden Macacus-Embryonen ist die Ausbildung weiter fortgeschritten. Das Scheitelbein erscheint als ein annäherndes Quadrat mit abgerundeten Ecken. Während die Mittelpartie eine deutliche Verdichtung des Knochenbälkchennetzes und eine gewissermaßen konzentrische Anordnung enger Knochenmaschen zeigt. gehen von da in annähernd radiärer Richtung, in strahlenförmigem Verlauf, nach den Rändern Knochenfäserchen und Bälkchen aus. Die Ränder erscheinen dadurch zerfasert und mehr oder weniger tief zer-

spalten (Abb. 3). Von zwei oder mehreren Ossifikationszentren, wie erstere die menschliche Entwickelung nach C. Tolds sen. und meinen Beobachtungen, letztere die Teilungstheorien der neueren Systematiker, welche drei oder vier elementare Bestandteile der sich bildenden Scheitelbeine als wahrscheinlich annehmen lassen, konnte ich bei diesem Affenembryo nichts wahrnehmen.

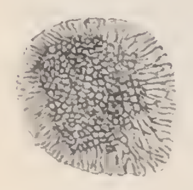


Fig. 3.

Die viel späteren Stadien der Fruchtentwickelung entsprechenden Hylobates-Embryonen zeigen die Entwickelung der Scheitelbeine noch weiter vorgeschritten (Abb. 4). Die Gestalt habe ich oben nach Messungen beschrieben. In der Mitte der etwa viereckigen stark gekrümmten, der Hauptsache nach faserig-porösen Knochenschale zeigt sich auf der Außenseite ein einheitlicher Scheitelbeinhöcker aus mehr verdichteter und mehr glatter Knochensubstanz bestehend. Besonders deutlich sind diese Verschiedenheiten der Struktur auf der Innenfläche des Knochens zu erkennen: von dem erwähnten dichteren Zentrum, welches von rundlicher, annähernd kreisförmiger Gestalt bei den sechs Scheitelbeinen von 11—17 mm (die vollkommener verdichteten Zentren von nur 5—8 mm) in den Durchmessern mißt, erstreckt sich, gegen die Knochenwände immer weniger dicht und immer zarter werdend, eine porös-faserige Knochenbildung, die im großen den konzentrischen Bau des Macacus-Scheitelbeins gewissermaßen nachahmt. In der Abbildung habe ich diese Strukturunterschiede wiederzugeben versucht, aber keineswegs ist die Feinheit des Originalgewebes zu erreichen gewesen, obwohl als Grundlage photographische Aufnahmen benützt worden sind.

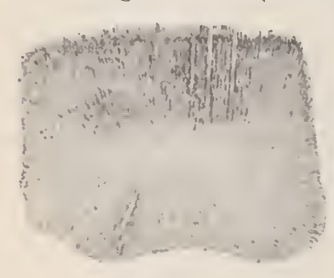


Fig. 4.

Für unsere Betrachtung ist der strahlige Bau der Hauptteile des Knochens besonders wichtig. Die Knochenstrahlen

durchsetzen zum Teil den Knochen, vom Ossifikationszentrum, nachbarlich nebeneinander aber ohne sich miteinander zu verbinden, bis zum Rand verlaufend, und Spalten zwischen sich lassend.

Wer diese durchschneidenden „Randspalten“ gesehen hat, wird nicht daran zweifeln können, daß wenn eine oder die andere von ihnen durch individuell gegebene Wachstumsbedingungen für das spätere Leben erhalten bleiben würde, sie eine „senkrechte Spaltung“ des Knochens, etwa rechtwinkelig auf die Richtung der queren fötalen Scheitelbeinnaht, darstellen müssen.

Nach diesem Ergebnis sollten, wie ich meine, die „senkrechten“ Spalten in den Scheitelbeinen nicht mehr ohne weiteres mit den horizontalen Scheitelbeinnähten zusammengeworfen werden — ihr Wert für die vergleichende Entwickelungsgeschichte ist ein ganz verschiedener.

Für weitere Fragen über die „Randspalten“ und ihr Wesen bei menschlichen Schädeln auf den verschiedenen Stadien ihrer Entwickelung verweise ich auf meine oft genannte Monographie (S. 336 (62) ff. und S. 339 (65) ff.). Bis auf weitere entwickelungsgeschichtliche Beobachtungen bleibe ich auf meinem früheren Standpunkte stehen. Ich verkenne nicht, daß eine andere Stellung der beiden elementaren Formbestandteile des Scheitelbeins als sie beim Menschen nach C. Told sen. und mir sich finden, wodurch zwischen ihnen eine horizontale fötale Scheitelbeinnaht bedingt ist, sich bei Affen finden könnten; wenn die fötalen Scheitelbein-Elemente resp. ihre Ossifikationszentren nicht über- sondern nebeneinander gelagert wären, würde der Verlauf der fötalen Trennung nicht horizontal sondern mehr weniger vertikal oder schief werden müssen. Auch mehr als zwei Knochenelemente oder Ossifikationszentren sowie eine „Zersplitterung“ des oder der Ossifikationszentren der Scheitelbeine sind gewiß denkbar. Aber das sind hypothetische Erklärungsversuche noch ohne wissenschaftlich festgelegten Beweis und sie erscheinen nach meinen eben mitgeteilten Ergebnissen unnötig.

Stirnbein.

Die Frage nach der Stirnnaht bei den Affen hat zunächst durch Herrn G. Schwalbe eine sehr wertvolle statistische Untersuchung gefunden.

Ich hatte in meiner Monographie über Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldachs von einem Mangel der Stirnnaht bei Affen gesprochen[1]):

„Bei den Anthropoiden und niederen Affen zeigen, soviel ich sehe, erwachsene Schädel die Persistenz der Stirnnaht niemals und auch an den jugendlichsten Schädeln (nach der Geburt) vermißt man die offene Trennung der beiden primären Stirnbeine."

Die Bemerkung bezog sich auf meine eigenen Beobachtungen, zu denen mir für niedere Affen, wie erwähnt, nur ein beschränktes Material zur Verfügung stand[2]), die Literatur hatte ich nicht speziell darauf durchgesehen.

Auch nach den neuen Zählungen in europäischen und amerikanischen Sammlungen und bei Berücksichtigung der einschlägigen Literatur ist in der Tat das Vorkommen von Stirnnahtschädeln bei den großen Anthropoiden so selten, daß bei ihnen noch immer von einem „Mangel der Stirnnaht" — das Wort Mangel im Sinne äußerster Seltenheit gebraucht — gesprochen werden darf. Nach der verdienstvollen Zusammenstellung der in der Literatur verzeichneten und von ihm selbst beobachteten Stirnnaht-Schädel bei Affen durch Herrn L. Bolk[3]) scheinen in der Literatur bei großen Anthropoiden bis jetzt nur zwei Fälle von Stirnnahtschädeln angeführt zu sein und zwar auch diese bei jugendlichen Individuen:

Herr H. Welcker hat, bereits 1892 — was mir entgangen war —, den Schädel eines zweijährigen Gorilla mit Stirnnaht beschrieben und Herr Le Double 1903 den Stirnnahtschädel eines jungen Schimpanse mit noch vollständigem

---

[1]) J. Ranke, l. c. S. 453 (179).

[2]) S. oben S. 224, 227.

[3]) L. Bolk, l. c. S. 100, 101 ff.

Milchgebiß. Herr G. Schwalbe erwähnt zwei Stirnnahtschädel bei zwei verschiedenen Arten von Hylobates. Unter 161 Hylobatesschädeln fanden sich nach ihm zwei unvollkommene Stirnnähte, eine bei einem erwachsenen Hylobates syndactylus, die andere bei einem ganz jugendlichen Schädel eines Hylobates lar „mit noch weit offener Fontanelle und unvollständigem Milchgebiß“ [1]).

Dagegen ist die Stirnnaht bei anderen Affen keineswegs selten. Herr L. Bolk faßt die bis jetzt durch die neuen umfassenden Zählungen gewonnenen Resultate zusammen [2]): „In seiner oben zitierten Abhandlung über die Stirnnaht der Affen zeigte G. Schwalbe, daß zwar die Persistenz einer Stirnnaht ein sehr verschieden häufiges Vorkommnis bei den verschiedenen Affengattungen ist, aber daß es sogar welche gibt, bei denen eine Stirnnaht viel häufiger ist als bei dem Menschen. Das Geschlecht Colobus nimmt, was diese Häufigkeit betrifft, die erste Stelle ein. Auch für Semnopithecus sei die Häufigkeit des Vorkommens einer Stirnnaht immerhin noch eine für Affenschädel recht ansehnliche“; schon 1892 hatte Herr H. Welcker den Stirnnaht-Schädel eines erwachsenen Semnopithecus beschrieben. Herr L. Bolk stimmt dem Ergebnis des Herrn G. Schwalbe auf Grund eigener umfassender Zählungen zu und bringt selbst mehrfache neue Fälle von Stirnnaht bei niederen Affen, einen bei Macacus cynomolgus (l. c. Fig. 41 S. 83) und einen bei einem zweiten Semnopithecus-Schädel (l. c. Fig. 44 S. 100).

Bekanntlich findet sich bei Halbaffen, Lemuren, wie bei zahlreichen niederen Säugetieren das Stirnbein stets in seine beiden Primärteile getrennt. Die Ursachen der Persistenz der Stirnnaht sind sonach zweifellos verschiedene und bei niederen Säugetieren gewiß von einer bedingenden Einwirkung des Gehirns, wie sie beim Menschen besteht, unabhängig.

Für die großen Anthropoiden: Gorilla, Schimpanse, Orang-

---

[1]) G. Schwalbe, Über die Stirnnaht bei den Primaten, l. c.

[2]) L. Bolk, l. c. S. 101.

utan sowie für die Hylobates-Arten bleibt meine Angabe bestehen, daß bei ihnen Stirnnaht-Schädel zu den größten Seltenheiten gehören, sodaß man wohl von einem Mangel der Stirnnaht bei ihnen sprechen kann. Immerhin wäre es wünschenswert, daß die Anthropoidenschädel der zoologischen Sammlungen überall auf das Vorkommen von Stirnnaht oder Stirnnahtresten durchgesehen werden. Daß man hier noch Entdeckungen machen kann, habe ich selbst erfahren.

Bei meinen statistischen Aufnahmen war ein kleines Skelett eines „neugeborenen“ Orangutan unberücksichtigt geblieben, dessen Schädelchen sich als Nr. 246 den oben S. 225 Anmerkung zitierten 246 Orangutan-Schädeln unserer Selenkaschen Sammlung anreiht.

Es ist das, soviel ich sehe, bisher der erste Orangutan-Schädel mit vollkommen offener Stirnnaht. Damit ist das Persistieren dieser fötalen Naht noch nach der Geburt für alle drei große Anthropoiden: Gorilla (H. Welcker), Schimpanse (Le Double), Orangutan (J. Ranke) als ein gelegentliches, freilich außerordentlich seltenes Vorkommen festgestellt. Ich zweifle aber, wie oben angedeutet, nicht, daß, wenn einmal die Aufmerksamkeit neuerdings darauf gerichtet ist, sich noch mehr Stirnnaht-Schädel bei den großen Anthropoiden finden werden.

Mein neuer Stirnnaht-Schädel gehörte einem sehr jungen Orangutan; er war lebend in die Pflege Selenkas gekommen und hatte von ihm seiner klagenden Stimme wegen den Namen Quix erhalten. Das Tierchen ist noch vor dem vollen Durchbruch der ersten Milchzähne gestorben, sodaß es als „neugeboren“ bezeichnet werden darf. Im Unterkiefer spitzen die beiden mittleren Schneidezähne eben etwas vor, im Oberkiefer sind die Alveolen noch geschlossen.

Der kleine Schädel erscheint sehr menschenähnlich: der schön gewölbte und gerundete Hirnschädel mit seiner menschlichen Stirnbildung zeigt ein entschiedenes Übergewicht über den noch unentwickelten Visceralschädel. Dagegen erscheint die Stellung des Foramen magnum in der Schädelbasis, und

der Winkel des Pars basilaris des Hinterhauptsbeins nicht menschlicher als bei älteren Tieren. Auffällig ist die schon teilweise, in dem oberen Drittel, eingetretene Verschmelzung des Nasenbeins und die, wohl auch schon durch beginnende Verschmelzung bedingte Enge und relative Undeutlichkeit der Naht zwischen Nasenbeinen und Oberkiefer, Sutura nasalis lateralis, und ebenso der jederseits den Zwischenkiefer vom Oberkiefer trennenden Sutura intermaxillaris.

Die allgemeinen Bauverhältnisse lassen die Abbildungen erkennen: Abbildungen des Schädels des „neugeborenen“ Orang-



Fig. 5.

Fig. 5. 6. Schädel des neugeborenen Orangutan Quix.

utan Quix: Ansicht von vorne, um die Stirnnaht zu zeigen. Photographie und Schema.

Einen etwas tieferen Einblick gestatten die im folgenden mitgeteilten Schädelmaße, die ich im wesentlichen nach den Methoden der Frankfurter Verständigung gewonnen habe.

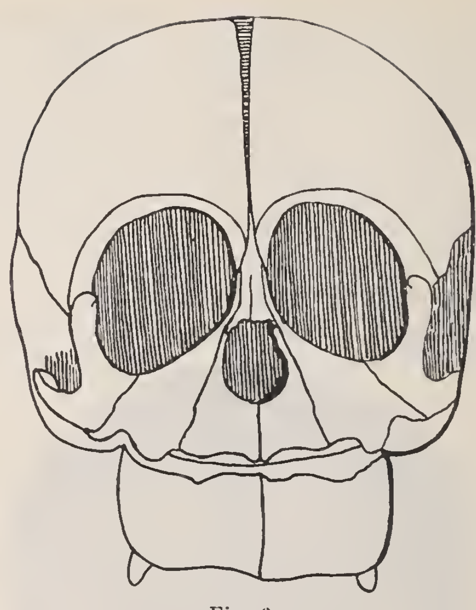


Fig. 6.

Schädelmessung des neugeborenen Orangutan Quix.

I. Hirnschädel.

Größte Länge des Hirnschädels	76 mm
Größte Breite „ „	67 „
Schädelindex	**88,1**
also in hohem Grade brachycephal.	
Gerade Länge des Hirnschädels	77 mm
Gerade Länge des ganzen Schädels mit dem Gesicht (vom Oberkiefer-Vorderrand (Wölbung der Alveolen) bis hervorragendsten Punkt des Hinterhaupts in Projektion	91 „

Die Schnauze steht sonach um 14 mm über die Stirn vor = 18,18 %.

Gerade Höhe	58,5 „
Kleinste Stirnbreite	50,0 „
Schädelbasis	48,0 „

Sagittalumfang bis zum Hinterrand des For. m.	141,0 mm
Länge des Foramen magnum	22,0 „
Sagittalumfang bis zum Vorderrand des Foramen magnum 141 + 22	163 „
Aus Schädelbasis 48 und Sagittalumfang bis zum Vorderrand des Foramen magnum 163 berechnet sich die Gesamt-Wölbung (Krümmung) des Hirnschädels zu	29,4
nahezu ³/₄ Kreisabschnitt.	
Sagittalumfang des Stirnbeins	50,0 mm
„ der Scheitelbeine	45,0 „
„ des Hinterhauptsbeins	46,0 „
(bis zum Hinterrand des Foramen magnum)	
Sehne des sagittalen Umfangs des Stirnbeins . .	46,0 „
„ „ „ „ der Scheitelbeine .	41,0 „
„ „ „ „ des Hinterhauptsbeins	39,0 „
Krümmungsindex des Stirnbeins	92,0
(Sehne zum Sagittalumfang)	
Krümmungsindex der Scheitelbeine	91,1
„ des Hinterhauptsbeins	84,8
Horizontalumfang des Hirnschädels	230 mm
Gesichts-Winkel	74°
Pars basilaris-Winkel	0°

Die Pars basilaris steht, wie bei erwachsenen Orangutan-Schädeln, horizontal!

Foramen magnum-Winkel nach rückwärts und aufwärts	32°

II. Gesichtsschädel.

Gerade Länge des Gesichtsschädels (s. oben) . . .	91 mm
Gesichtshöhe	32 „
Gesichtsbreite (Jochbogenbreite)	53 „
Gesichtsindex	60,4
Nasenhöhe (bis zu der deutlich erkennbaren Spina nasalis anterior)	24,0 mm
Nasenbreite (Breite der Apertura piriformis) .	10,0 „

Nasenindex	41,7
Augenhölen-Höhe (links, senkrecht gemessen) .	20 mm
Augenhöhlen-Breite (auch senkrecht auf die Höhe)	20 „
Augenhöhlen-Index	100

Die Augenhöhlen sind fast kreisrund, an den Kreis setzt sich aber eine Ausbuchtung nach unten und außen an.

Das Intermaxillare beginnt, wie es scheint, mit dem Maxillare zu verwachsen, die Sutura intermaxillaris ist beiderseits sehr fein und nur schwach zu sehen.

Die Sutura internasalis ist im oberen Drittel verwachsen.

Die Sutura maxillo-jugularis ist offen, ebenso die Sutura interjugularis.

Im linken Scheitelbein ein Rest der fötalen Parietalnaht circa 3 mm lang horizontal von der Kranznaht aus einspringend; das dadurch oben begrenzte fötale untere Scheitelbein springt beiderseits 5 mm, mit rechtwinkelig abgeschnittenen Rändern, in das Stirnbein vor.

Im Interparietale eine etwas nach rechts verschobene sagittale Mittelspalte von 13 mm Länge. S. Fig. 16 S. 264.

An der Grenze von Ober- und Unterschuppe des Hinterhauptsbeins jederseits ein Rest der Sutura mendosa, rechts etwa 4 mm, links 3,5 mm lang. S. Fig. 16.

Hinterhauptsbein.

Meine negativen Befunde betreffs Individualisierung der bei dem Menschen das Hinterhauptsbein zusammensetzenden Elementarknochen bei Affen haben, und zwar sowohl für Anthropoiden wie für niedere Affen, die auf umfassende statistische Reihen gestützten Resultate der neueren Forscher, wie es scheint, bisher ausnahmslos bestätigt. Das Ergebnis meiner damaligen statistischen Zählungen lautet[1]):

[1]) J. Ranke, l. c. S. 178 (452).

„Bei den höheren Anthropoiden und den eigentlichen Cynomorphen habe ich Bildungen, welche zum Os Incae gehören, noch nicht nachgewiesen. Dagegen kann ich einen Hylobates-Schädel vorlegen, welcher an der Spitze der Hinterhauptsschuppe einen durch eine horizontal verlaufende Quernaht abgetrennten überzähligen Knochen aufweist. Obwohl das Gebilde ziemlich unscheinbar ist, möchte ich dasselbe doch als Os Incae proprium bezeichnen (l. c. Fig. 125). Daß der kleine Knochen als ein prinzipaler oder elementarer Bestandteil der Hinterhauptsschuppe aufzufassen sei, geht, wie ich glauben möchte, daraus hervor, daß in sein oberes Ende eine zentrale Öffnung eindringt, welche bei den Hylobates-Schädeln sehr häufig vorkommt und vielleicht mit dem fötalen Zentralloch der Oberschuppe des Menschenschädels in Parallele gesetzt werden darf."

„Abgesehen von dem oben vorgebrachten Grunde würde man den vorliegenden überzähligen Knochen für einen einheitlichen „Spitzenknochen" resp. nach unseren Ergebnissen als eine Form von Fontanellknochen der hinteren Fontanelle bezeichnen dürfen. Der letztere Gedanke liegt um so näher, da wie die oben gegebenen Abbildungen lehren, Fontanellknochen und Nahtknochenplatten bei dem Hylobates in typischer Ausbildung sich finden."

„Dieser Mangel an überzähligen Knochenbildungen am Hinterhauptsbein bei den Affen steht in einem deutlichen Gegensatz gegen die bei ihnen relativ häufig persistierenden Reste der fötalen Trennungsnaht der Scheitelbeine speziell bei dem Orangutan. Dagegen stimmt jener Mangel zusammen mit dem Mangel der Stirnnaht bei den Affen, welche bei dem Menschen sich in annähernd derselben Zahl an den Schädeln zu erhalten pflegt wie die fötale Hinterhauptsquernaht. Bei den Anthropoiden und den niederen Affen zeigen, soviel ich sehe, erwachsene Schädel die Persistenz der Stirnnaht niemals und auch an den jugendlichsten Schädeln (nach der Geburt) vermißt man die offene Trennung der beiden primären Stirnbeine. Im Zusammenhang mit den oben dargelegten Betrachtungen wurde dieses Verhältnis vielleicht auf ein Überwiegen des Wachstums

der mittleren Großhirnpartien bei den Anthropoiden, speziell Orangutan, hindeuten."

Auch nach den neuesten umfassenden Zählungen der Nahtanomalien an Affenschädeln durch Herrn Bolk u. a. hat mein damaliges Ergebnis — mit den oben für die Stirnnaht angeführten Einschränkungen — für die Anthropoiden, speziell für den Orangutan, keinen Widerspruch erfahren. Auch Herr Bolk spricht ganz im allgemeinen von einem negativen Befund im Occipitale der Affen.

In der Tat sind die einschlägigen Beobachtungen, welche Herr Bolk, trotz seines reichen Materials namentlich an Schädeln niederer Affen, über „Anomalien" des Hinterhaupts bei Affen mitteilen kann, auffallend wenig zahlreich; ich finde in seiner, auch für diese Frage grundlegenden Publikation nur fünf hierher zu rechnende Fälle:

1. Bei einem Schädel von Cebus chrysopus, unbekannter Herkunft, „mit vollständigem Dauergebiß ist außer zwei Nahtknochen in der Pfeilnaht ein stattlich entwickelter Spitzenknochen von dreieckiger Form anwesend. Daß derselbe in der kleinen Fontanelle entstanden ist, ist wohl nicht zweifelhaft, denn der Schuppe des Occipitale fehlt die normal vorkommende Spitze und zwischen den Parietalia dringt der Knochen weiter nach vorn ein, als sonst bei den Cebiden der Fall zu sein pflegt. Man darf es sonach nicht einfach als einen selbständig gebliebenen Teil der Squama occipitalis auffassen. Es ist vielmehr als ein selbständiger Knochen zu betrachten mit kräftiger Wachstumsenergie."

Daß Herr Bolk bezüglich der Auffassung dieses überzähligen Knochens selbst geschwankt hat, geht aus der dieser Beschreibung beigegebenen Abbildung hervor (l. c. Fig. 9 S. 21). Dort lautet die Unterschrift unter die Figur: „Os incae. Cebus chrysopus 1911/34."

2. Bei einem Ateles ater (l. c. Fig. 29 S. 40) „waren zwei Fontanellknochen anwesend und zwar einer in der großen, ein zweiter in der kleinen Fontanelle. Sie waren als zwei dreieckige Knochenplättchen mit schmaler Basis im frontalen und occipitalen Ende der Sagittalnaht gelagert zwischen die beiden Parietalia."

3. l. c. S. 84. „Nicht weniger arm als an überzähligen Suturen ist der Schädel von Macacus cynomolgus an akzessorischen Knochen[1]). Bei den mehr als vierhundert Schädeln fand ich nur ein einziges Mal ein solches Knöchelchen, das in Fig. 42 skizziert ist. Es ist ein ein-

[1]) Meine Beobachtungen an derselben Affenspezies s. unten.

faches schmales Knochenstückchen in der Lambdanaht eines noch jungen Tieres."

4. l. c. S. 111 zu Siamanga (Hylobates) syndactylus. Fig. 47 zeigt „ein Schädeldach mit zwei Schaltknochen, welche ihre Lagerung zufolge als Fontanellknochen gedeutet werden müssen". Der eine der beiden „Schaltknochen" befindet sich in der „großen Fontanelle", der zweite liegt an dem mittleren Abschnitt des Oberrandes der Hinterhauptsschuppe, in das Hinterende der Sagittalnaht einspringend, also wahrscheinlich ein vereinigter Spitzenknochen in der ehemaligen kleinen Fontanelle.

5. l. c. S. 119 Fig. 53. Orangutan-Schädel mit der Unterschrift: „Orang-Utan 1911/163." S. 120 sagt der Autor, „daß zwei große Spitzenknochen gleichzeitig zur Entwickelung gelangt sind, ist nebensächlich" — wichtig erscheint in diesem Fall Herrn Bolk nur die in der Abbildung wiedergegebene, in das rechte Scheitelbein einspringende Nahtstrecke. Die Form der beiden „Spitzenknochen" dieses Orangutan-Schädels ist vollkommen menschlich, sodaß ihre Deutung keinem Zweifel unterliegt.

Abgesehen von dem im vorstehenden als 1. beschriebenen Schädel, bei welchem Herr Bolk über die vergleichend-embryologische Deutung selbst schwankte, handelt es sich bei den erwähnten „Anomalien" des Hinterhauptsbeins bestimmt nur um Fontanellknochen und nicht um die Persistenz eines oder des anderen Elementarknochens.

Auf diesen Mangel eigener Beobachtungen, trotz des großen von ihm bearbeiteten statistischen Materials, gründet Herr Bolk eine ablehnende Haltung zur Frage der elementaren Zusammensetzung des Hinterhauptsbeins bei den Affen im Gegensatz gegen den Menschen. Er sagt l. c. S. 156:

„Die zweite Erscheinung, worauf ich oben hindeutete, betrifft einen negativen Befund im Occipitale des Affen[1]). Bei den vielen jugendlichen Schädeln, welche ich für die vorliegende Abhandlung studiert habe, ist nicht ein einziges Mal eine Andeutung einer Sutura mendosa gefunden und auch an halberwachsenen oder erwachsenen Schädeln ist niemals ein Rest dieser Naht beobachtet worden. Eine Grenze zwi-

[1]) Die Auszeichnung dieser und der folgenden Stellen durch den Druck fehlt bei Herrn Bolk.

schen Ober- und Unterschuppe geht somit bei den Affen, wenn sie überhaupt vorkommt, gewiß sehr rasch und sicher intrauterinär verloren. Der längere Bestand der genannten Sutura beim Menschen ist dann auch wohl als ein Neuerwerb zu betrachten, der mit der ansehnlichen Flächenausbreitung dieses Knochens beim Menschen in Konnex stehen darf. Und wenn dem so ist, dann erhebt sich die Frage, ob nicht ebenfalls das Auftreten von mehreren Ossifikationszentren im Squama des Occipitale beim Menschen zu interpretieren ist als eine progressive Erscheinung von gleicher Natur als die Fragmentierung des Ossifikationszentrums im Parietale."

Dieser Satz wendet sich gegen die von mir vorgetragene Lehre von den vergleichend anatomischen Beziehungen der Hautknochen des menschlichen Schädeldachs zu den Hautknochen des Schädeldachs niederer Wirbeltiere. Im Jahre 1899 habe ich in der oft genannten Monographie die Zusammensetzung der Hautknochen des menschlichen Schädeldachs aus Elementarknochen gelehrt, die bei niederen Wirbeltieren, Fischen und namentlich Knorpelgnoiden dauernd und individualisiert bleiben, wie das besonders vollkommen bei der ausgestorbenen Gruppe der Stegocephalen der Fall war, beim Menschen und den höheren Wirbeltieren aber normal nur während des Fötallebens gesondert erscheinen und nur unter seltenen Wachstumsbedingungen während des nachembryonalen Lebens und im erwachsenen Alter ihre Selbständigkeit behaupten[1]).

Die von mir festgestellten Beziehungen der Schädelbildung des Menschen zu der Schädelbildung niederer Wirbeltiere, deren Bauverhältnisse gewisse individuelle Variationen im menschlichen Schädelbau erklären, scheinen in der Tat in einer gewissen Gegensatz zu treten gegen die populäre Auffassung von den „Postulaten" der Entwickelungstheorie. Während nach diesen ein Fortschritt von einfacheren Verhältnissen zu kom-

---

[1]) J. Ranke, l. c. S. 447 (173) bis 452 (178) mit den Abbildungen: Fig. 120, 121, 122, 123 und 124.

plizierteren selbstverständlich erscheint, welch letztere als Neuerwerbungen gewertet werden, tritt uns nach meinen Ergebnissen bei den Hautknochen des Schädeldachs ein Reduktions-Vorgang entgegen: die Bildungsverhältnisse sind auf unteren paläontologischen und niedrigen systematischen Stufen besonders kompliziert und werden in den höheren und höchsten systematischen Stufen durch Reduktion wesentlich vereinfacht. Aber individuelle Entwickelungsgeschichte und individuelle Variationen des Baues im nachembryonalen Leben lassen das primäre komplizierte Baugesetz auch bei den reduzierten Formen noch hervortreten.

Die Hautknochen des Schädels sind nur ein besonders in die Augen springendes Beispiel für die vorgetragene allgemeine Anschauung, für deren Begründung ich noch an anderen Stellen Material beigebracht habe.

In dem Vorwort zur ersten Auflage meiner zusammenfassenden Darstellung der modernen Anthropologie in meinem Buche: Der Mensch[1]) habe ich 1886 den Satz ausgesprochen:

„Die Grundlage aller in diesem Buche enthaltenen Betrachtungen bildet der allgemein anerkannte Satz, daß in gesetzmäßiger, d. h. logischer Weise die gesamte animale Welt in körperlicher Beziehung zu einer idealen Einheit zusammengeschlossen ist, an deren Spitze der Mensch steht. In diesem Sinne ist das Tierreich der zergliederte Mensch und der Mensch das Paradigma des gesamten Tierreichs."

In neuerer Zeit wird von einer oder der anderen Seite versucht, meine Resultate und meinen Gedankengang an die zünftige Descendenzlehre anzugliedern, und es erfüllt mich mit einem gewissen Gefühl der Befriedigung, daß bezüglich des Interparietale meine Annahme der Beziehungen desselben zu gewissen Hautknochen im Schädeldach niederer Wirbeltiere den modernsten Anschauungen der selbständigen Forscher so wenig mehr unsympathisch ist, daß meine im Jahre 1899 veröffentlichte Entdeckung im Jahre 1912 ganz unabhängig von

[1]) J. Ranke, Der Mensch. Dritte Auflage. Leipzig und Wien. Bibliographisches Institut, I. und II. Band, 1912.

mir und ganz ohne Kenntnis meiner bezüglichen Publikation wieder „entdeckt" worden ist.[1]) —

Herr Bolk hat die alte Doktorfrage nach dem Interparietale der Säugetiere wieder aufgerollt.

Es scheint mir unter den gegebenen Verhältnissen zweckmäßig, in Kürze das zu wiederholen, was ich 1899 darüber gesagt habe.[2])

„Während für Meckel und seine wissenschaftlichen Nachfolger die wichtigste vergleichend-anatomische Frage bezüglich der menschlichen Hinterhauptschuppe die war, ob sich bei dem Menschenschädel eine dem „Interparietale" der Säugetiere entsprechende Bildung nachweisen lasse, steht nun nach Bejahung dieser Frage eine zweite im Mittelpunkt des Interesses. Das „Interparietale" findet sich als konstanter Bestandteil des Schädeldachs nur bei den Säugetieren. Da fragt es sich nun: fehlen bei den niedrigen Wirbeltieren in der Tat alle Spuren eines „Interparietale?"

„Auch Herr C. Gegenbaur hat in letzter Zeit diese Frage wieder aufgeworfen. Die oben allegierte Stelle in seiner soeben (1898) erschienenen „Vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere"[3]) lautet wörtlich:"

„Zwischen sie (die Parietalia) fügt sich von hinten her ein an das Occipitale superius grenzendes Knochenstück, das Interparietale, welches gleichfalls eine paarige Anlage besitzt. Es verschmilzt meist, wie bei den Carnivoren und Primaten, mit dem Occipitale superius, aber auch mit den Parietalia (bei Nagern und Wiederkäuern). Den Schweinen fehlt es (? J. Ranke). Es ist ein anscheinend neu auftretender Teil am Säugetierschädel, von sehr verschiedenem Umfang, welcher wieder mit der Ausdehnung des Cavum cranii correlat ist. Ob er sich von einem in niederen Zuständen selbständigen Knochen ableitet, bleibt zu ermitteln."

---

[1]) Friedrich von Huene in Tübingen, Die Herkunft des Os interparietale der Mammalia, mit 5 Abbildungen. Anatomischer Anzeiger, 42, Nr. 20/21, 20. Dezember 1912, S. 522—524.

[2]) J. Ranke, l. c. S. 447 (173) ff.

[3]) C. Gegenbaur, l. c. S. 403 (1898).

Ich fahre l. c. im direkten Anschluß an das Zitat aus Gegenbaur fort:

„Nach unseren Ermittelungen ist das Interparietale des Menschen nicht nur von „paariger Anlage“, wir haben als konstante Verknöcherungselemente“ desselben zwei Paare in einer Horizontalreihe symmetrisch rechts und links neben der sagittalen Mittelspalte gelegene, an das Occipitale superius grenzende occipitale Hautknochenplatten festgestellt: das Os Incae quadripartitum. Nach dieser Bildung haben wir uns sonach unter den niederen Wirbeltieren umzusehen.“

Es sei gestattet, hier in Kürze an meine Ergebnisse über die Bildung der Hinterhauptsschuppe beim Menschen zu erinnern, die mich veranlaßten, an dem im Wesentlichen zurecht bestehenden Meckelschen Schema der individuellen Variationen der menschlichen Hinterhauptsschuppe einige Modifikationen vorzunehmen. [1])

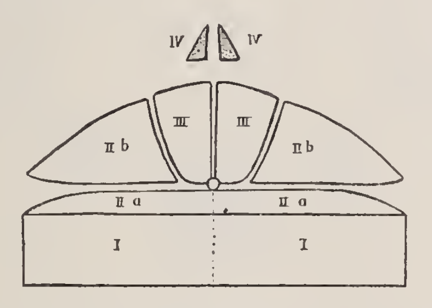


Fig. 7. Mein Schema der Ossifikationszentren der Hinterhauptsschuppe des Menschen.
I, I erstes Paar. IIa, IIb zweites Paar. IIa Hautknochen-Ergänzungsstück der Unterschuppe. III, III drittes Paar. IV, IV viertes akzessorisches Paar. (Fig. 119 S. 446.)

Die Unterschuppe setzt sich zusammen aus dem

I. Paar der Ossifikationszentren, welche das intracartilaginös entstehende Occipitale superius, das Supra occipitale, bilden und einem Hautknochen-Ergänzungsstücke der Unterschuppe, welches von dem II. Paar der Ossifikationszentren, durch die Sutura mendosa seitlich

[1]) J. Ranke, l. c. 445 (171) f.

abgegrenzt, gebildet wird. Das II. Paar ist nur echter, auf membranöser Grundlage gebildeter Hautknochen. Zwischen diesem Ergänzungsstück und dem eigentlichen Occipitale superius liegt in der ersten Bildungsepoche der Oberschuppe der breite fötale Trennungsspalt, welcher die Anlage des Occipitale superius (Knorpelknochen) von der Gesamtanlage der Interparietale trennt. Ein Offenbleiben dieser fötalen Trennungsspalte ist bisher beim Menschenschädel nicht beobachtet worden, sonach ebensowenig eine „reinliche Scheidung" zwischen Occipitale superius und Interparietale.

Die Oberschuppe selbst wird durch die quer durchschneidende Sutura mendosa = Sutura foetalis transversa squamae occipitalis R. Virchow, bei Bildung der zur Gruppe des Os Incae gehörigen individuellen überzähligen Knochen des Hinterhaupts in einem kleineren unteren und in einen größeren oberen Abschnitt getrennt. Der untere Abschnitt verschmilzt als Hautknochen-Ergänzungsstück der Oberschuppe mit dem Oberrand des Occipitale superius, der obere bildet, wenn keine sagittalen Spalten gleichzeitig offen sind, den vollkommenen Inkaknochen, das Os Incae proprium. Fig. 11 S. 255.

Dieser obere Abschnitt der Oberschuppe setzt sich zusammen aus zwei lateralen Stücken, welche von dem II. Paar der Ossifikationszentren der Hinterhauptsschuppe gebildet werden, sonach nicht akzessorische, sondern prinzipale und regelmäßige Elementarbestandteile der Hinterhauptsschuppe sind. Die lateralen Teile stellen den Rest der aus dem II. Paar hervorgehenden Verknöcherungen dar, soweit das II. Paar nicht zur Bildung des Hautknochen-Ergänzungsstückes der Unterschuppe verwendet worden ist. Da die sagittale Ausdehnuug dieses Hautknochen-Ergänzungsstückes eine etwas verschiedene ist, so schneidet die fötale Quernaht mehr oder weniger von dem unteren Abschnitt der Oberschuppe ab, die Quernaht entfernt sich dabei mehr oder weniger weit von der Protuberantia occipitalis externa nach aufwärts, so daß die „Unterschuppe" manchmal bei Os Incae eine beträchtlichere Ausdehnung zeigen kann.

Außer den zwei lateralen vom II. Paar gelieferten Stücken setzt sich der obere über der Sutura mendosa resp. der fötalen Quernaht liegende Abschnitt noch zusammen aus unserem III. Paar der Ossifikationszentren, welches die Mitte des oberen Abschnittes der Oberschuppe einnimmt. Dieses Paar wird in der Mitte geteilt durch die mittlere Sagittalspalte, seitlich schneiden rechts und links die beiden Randspalten ein, gegen das untere Ende der mittleren Sagittalspalte konvergierend. Hier liegt in der Mitte das (fötale) Zentralloch der Oberschuppe, gegen welches alle fünf normalen Trennungsspalten innerhalb der Oberschuppe verlaufen: außer der mittleren Sagittalspalte und den beiden Randspalten, welche das III. Paar seitlich begrenzen, die beiden Suturae mendosae, von rechts und links her einschneidend.

Durch diese fötalen Nähte werden die prinzipalen Elementarknochen der Hinterhauptsschuppe des Menschen abgegrenzt.[1])

Alle diese fötalen Trennungsspalten können offen bleiben, ist das der Fall, so bildet die Oberschuppe den vierteiligen Inkaknochen, das Os Incae quadripartitum. Diese Bildung ist es, nach welcher die vergleichenden Studien zu suchen haben. Fig. 8.

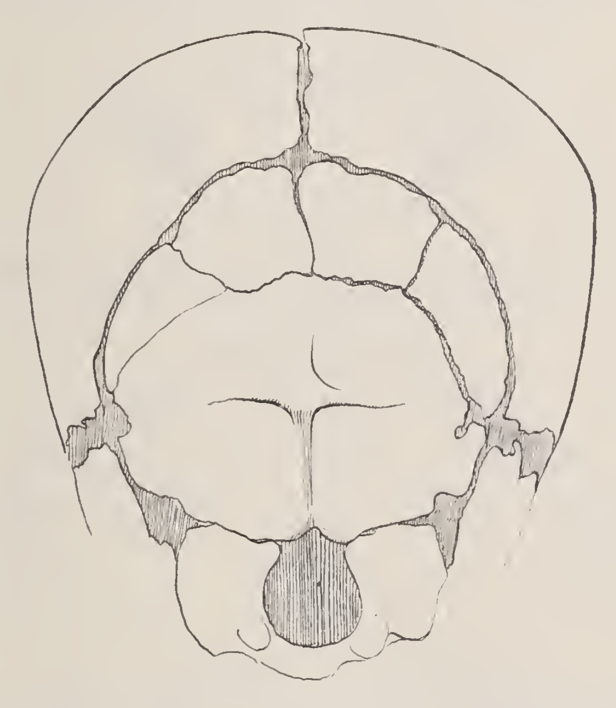


Fig. 8. Schädel eines Neugeborenen in Norma occipitalis mit Os Incae quadripartitum. Wenig verkleinert (l. c. Fig. 110 S. 440.

Verwächst nur die sagittal trennende Mittelspalte zwischen den beiden mittleren Hautknochenplatten, so bleibt der dreiteilige Inkaknochen, das Os Incae tripartitum, welches noch einen Rest der sonst verstrichenen Mittelspalte zeigen kann. Fig. 9.

---

[1]) Die in der hinteren Fontanella entstehenden akzessorischen halbpathologischen einfachen oder doppelten Fontanellknochen, die Spitzenknochen, das IV. Paar, sind keine prinzipalen Verknöcherungszentren.

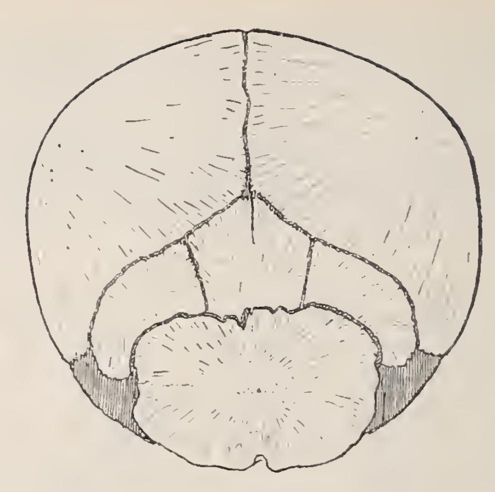


Fig. 9. Fötaler Schädel aus dem 7. Monat mit Os Incae tripartitum. $^2/_3$ natürlicher Größe (l. c. Fig. 114 S. 441).

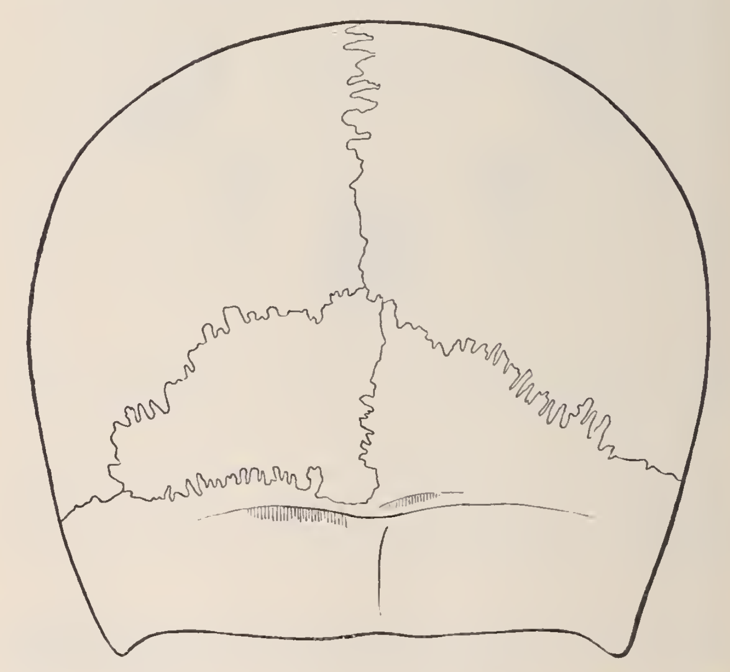


Fig. 10. Schädel mit Os Incae dimidium sinistrum (l. c. Fig. 55 S. 367).

Erhält sich nur die sagittale Mittelspalte offen und dazu die eine Hälfte der Sutura mendosa = der fötalen Quernaht der Schuppe des Hinterhauptsbeins, so ist nur die eine Hälfte des vollkommenen Inkaknochens, des Os Incae proprium, individualisiert als Os Incae proprium dimidium, halber eigentlicher Inkaknochen. Fig. 10.

Verwachsen alle sagittalen Randspalten und bleibt nur die Sutura transversa occipitalis foetalis offen, so haben wir den ganzen Inkaknochen, Os Incae proprium vor uns. Fig. 11.

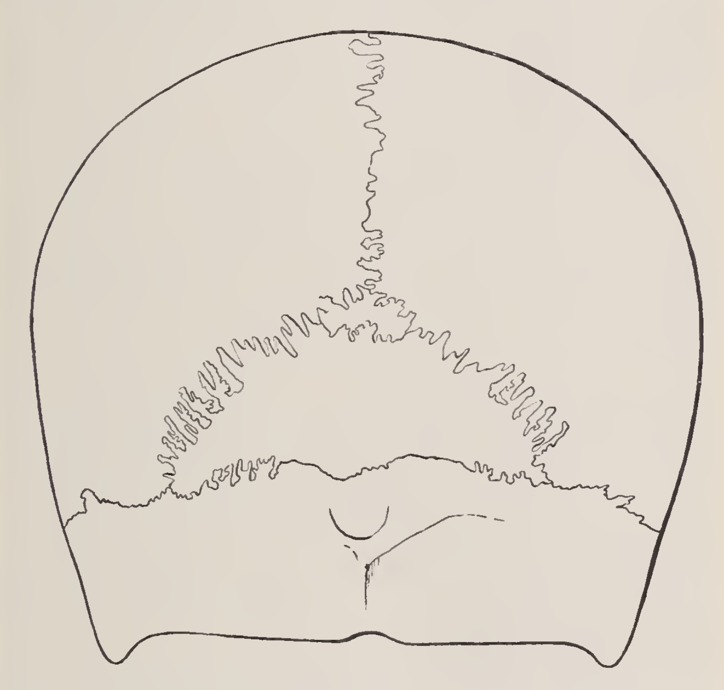


Fig. 11. Schädel mit Os Incae proprium. Oben im Lambdawinkel ein einfacher Spitzenknochen (l. c. Fig. 54 S. 366).

In meiner Abhandlung über die Hautknochen habe ich die gelegentliche Individualisierung jedes einzelnen der vier occipitalen Hautknochenplatten des Menschenschädels konstatiert, beschrieben und abgebildet. Ihre typische fötale Entwickelungsgeschichte stellt ihren Wert als prinzipale Elementarbestandteile der Oberschuppe des Menschenschädels sicher.

Auf die Frage: findet sich bei niederen Wirbeltieren eine entsprechende Reihe von vier occipitalen Hautknochenplatten? lautete damals meine Antwort l. c. (S. 174) S. 448 ff.:

„In erster Linie ist hier das Hautknochenskelett des Schädeldachs der Fische speziell der Knorpelganoiden in Betracht zu ziehen.“

„Während bei den Selachiern das ganze Kopfskelett aus Knorpel besteht, nehmen bei den Knorpelganoiden (Accipenser, Spatularia) bereits knöcherne Elemente an der Zusammensetzung des Schädels teil. Die Schädelkapsel bleibt zwar der Hauptsache nach knorpelig, aber von außen entstehen eine Anzahl Knochenplatten, Hautknochen, welche das Cranium oben und an den Seiten bedecken. Ähnlich wie die Knorpelganoiden verhalten sich die Dipnoer. Bei den Schuppenganoiden und Knochenfischen findet eine mehr oder weniger vollkommene Ossifikation der Schädelkapsel statt. Die Verknöcherung beginnt, wie bei den Knorpelganoiden, zuerst mit den Hautknochen.“

„Zur Illustrierung dieser wörtlich dem Werke des Herrn von Zittel[1]) entnommenen Darstellung habe ich eine Anzahl neuer Abbildungen der Hautknochen von Sturio, Lepidosteus und Polypterus unter meiner speziellen Leitung anfertigen lassen. Die Abbildungen (l. c. Fig. 120, 121 und 122) sind so angefertigt, daß die Hautknochen nicht in perspektivischer Ansicht, sondern nach rechts und links in eine Fläche ausgebreitet wiedergegeben sind, so daß auch das Größenverhältnis der Knochen zueinander mit ihren gegenseitigen Lagebeziehungen zur Darstellung gelangt.“

„Das Dach der beiden hinteren Schädelabschnitte zeigt, sagt Herr von Zittel[2]), folgende Hautknochen: es schalten sich zwischen das obere Hinterhauptsbein und die beiden Squamosa zwei Parietalia, Pa. ein, auf welche nach vorn die zwei Frontalia, Fr, folgen, die öfter zu einem größeren einfachen Hauptstirnbein verschmelzen. Seitlich davon liegt vor dem Squamosum das Postfrontale (Hinterstirnbein, Sphenoticum Parker), Ptf, das bei den Ganoiden zu den Haut-, bei den Teleostiern zu den Knorpelknochen gehört. Über den Augenhöhlen kommt zuweilen ein kleines Supraorbitale vor. Eine wechselnde Anzahl kleiner Hautknochen begrenzen als Supraorbitalia bogenförmig den hinteren und unteren Rand der Augenhöhle. Das über derselben gelegene Supraorbitale, sowie das Lacrimale (Thränenbein) sind kleine Hautknochen, welche in enger Verbindung mit dem Cranium stehen, aber nur selten entwickelt sind.“

„Für unsere Frage ist vor allem die Reihe der supraoccipitalen Hautknochenschilder dieser Fische von Interesse. Bei dem Stör (l. c. Fig. 120) springt in der hier gegebenen Abbildung eine als „occipitale superius“, So, bezeichnete Hautknochenplatte, in der Form einer wahren „Interparietale“ zwischen die Parietalia von hintenher ein. Der tiefe

---

[1]) C. von Zittel, Grundzüge der Paläontologie, 1895, S. 522 ff.

[2]) C. von Zittel, l. c. S. 522, 523.

mittlere Einschnitt des Unterrandes läßt diesen Hautknochen zweigelappt erscheinen, vielleicht auf eine paarige Anlage desselben deutend. Daneben liegt jederseits ein Occipitale externum, Oex. Wir haben hier sonach eine Horizontalreihe von drei (ev. vier) Hautknochenplatten, welche in ihrer gegenseitigen Stellung und in ihrer Anordnung gegenüber den Parietalia eine gewisse Ähnlichkeit mit der Reihe der vier elementaren Hautknochenplatten des menschlichen Interparietale nicht verkennen lassen. Der Name „Occipitale superius" ist dem Mittelstück der occipitalen Hautknochenschilder des Stör nur in uneigentlichem Sinn beigelegt, da das wahre Occipitale superius bei allen Wirbeltieren ein typischer Knorpelknochen ist, wie bei den Säugetieren und speziell bei dem Menschen. Die Bezeichnung „occipitale Hautknochenschilder" für die ganze Serie der betreffenden Knochen ist daher vorzuziehen."

„Eine ganz entsprechende Reihe occipitaler Hautknochenschilder zeigt sich auch bei Polypterus l. c. Fig. 121 und Lapidocteus l. c. Fig. 122. Hier liegen sie symmetrisch angeordnet in einer Reihe horizontal hinter den Parietalia. Bei Stör wie bei den beiden letztgenannten schließen sich an die occipitalen Hautknochenplatten direkt Hautverknöcherungen des Nackens (Rumpfes) an, sodaß hier doch eine wesentliche Differenz zwischen den entsprechenden Verhältnissen bei diesen Fischen und jenen bei den Säugetieren, speziell bei dem Menschen, sich ergibt. Immerhin erscheint der Nachweis, daß die Horizontalreihe der occipitalen Hautknochenplatten bei diesen Tieren der von uns nachgewiesenen Horizontalreihe der occipitalen Hautknochenplatten bei dem Menschen bemerkenswert ähnlich sieht, nicht ohne Bedeutung."

„Daß es aber in der Tat wohl nicht unberechtigt ist, die occipitalen Hautknochenbildungen des Menschen (das Interparietale) mit den occipitalen Hautknochenbildungen niederer Wirbeltiere in nähere Beziehung zu setzen, ergibt sich aus der Vergleichung der Verhältnisse mit denen bei Stegocephalen, von welchen die umstehende Abbildung der Hautknochen-Schädeldecke von Capitosaurus nasutus H. Meyer, Fig. 12 (l. c. Fig. 123), ein Beispiel gibt."

„Diese merkwürdige ausgestorbene Gruppe niederer Wirbeltiere, welche die Systematik an die Amphibien anreiht, zeigt die bei den Säugetieren aus Knorpelknochen bestehende Partie des Hinterhauptsbeins zum Teil auch in derselben Weise wie bei jenen verknöchert. Das gilt z. B. für die Occipitalia lateralia, außerdem ist ein wahres knorpeliges Occipitale superius vorhanden[1]. „Direkt an das Occipitale superius grenzend" zeigen die Stegocephalen eine Horizontalreihe von vier symmetrisch um die mittlere Sagittalspalte ge-

[1] E. Fraas, Die Labyrinthodonten der Schwäbischen Trias. Palaeontographica, Bd. XXXVI.

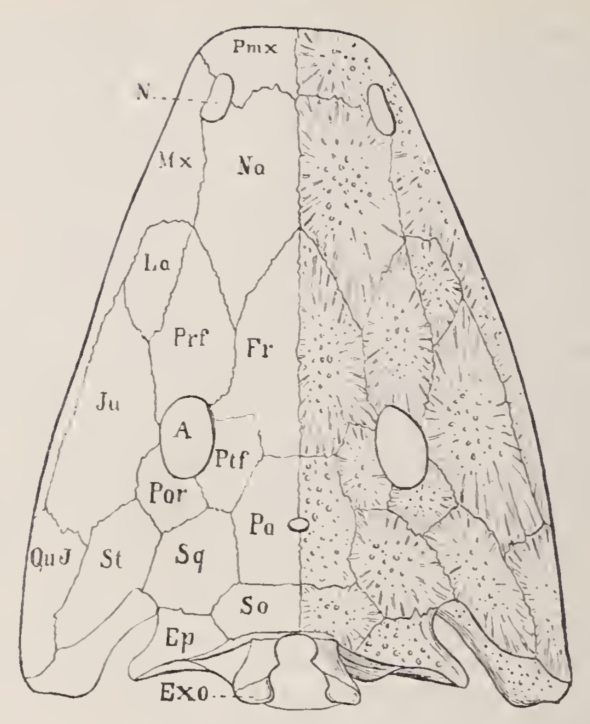


Fig. 12 (l. c. Fig. 123). Schädel von Capitosaurus nasutus, H. Meyer, nach von Zittel.

Pmx Praemaxillare, N Nasenöffnnng, Mx Maxillare, N Nasale, La Lacrymale, Prf Praefrontale, Fr Frontale, Jn Jngale, A Augenöffnung, Ptf Postfrontale, Por Postorbitale, QuJ Quadrato-Jugale, St Supratemporale, Sq Squamosnm, P Parietale mit Parietalloch, Ep Epoticnm, So Supraoccipitaler Hantknochen, Ep und So vier Supraoccipitale Hautknochenplatten, Exo Exoccipitale, Knorpelknochen.

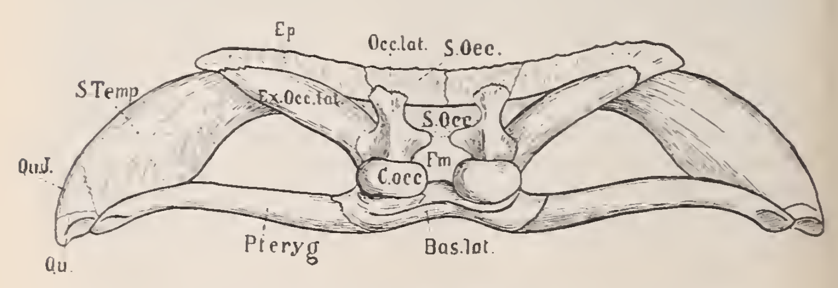


Fig. 13 (l. c. Fig. 124). Hinterhauptsansicht eines Stegocephalen-Schädels nach E. Fraas.

lagerte occipitale Hautknochenschilder, Fig. 13 (l. c. Fig. 124), welche in Lage und sogar in der Form den vier, bei dem Os quadripartitum des Menschen für die Lebenszeit individualisierten, typischen, elementaren occipitalen Hautknochenplatten entsprechen."

„Ich denke, sagte ich im Jahre 1899, wir haben keine Veranlassung, mit der auf unsere Ergebnisse sich stützenden Bejahung der Frage eines Zusammenhanges der elementaren occipitalen Hautknochenplatten des Menschen mit den entsprechenden Bildungen bei den Stegocephalen zurückzuhalten. Unsere Vermutung, welche in neuester Zeit, wie gesagt, auch von einer so anerkannten Autorität, wie es Herr C. Gegenbaur ist, als Möglichkeit formuliert wurde, darf danach wohl bejaht werden."

Nach einigen Bemerkungen bezüglich der bisher gebräuchlichen Benennungen der betreffenden Hautknochen kam ich zu dem Schlußergebnis dieser Betrachtungen:

„Unserer Auffassung nach würden von den betreffenden Hautknochenplatten die beiden „Supraoccipitalia" der Stegocephalen den beiden „mittleren fötalen Hautknochenplatten" des Os Incae quadripartitum des Menschen entsprechen, die beiden seitlich nach außen gelegenen „Epiotica", die „seitlichen Hinterhauptsbeine" den „lateralen Seitenplatten" des Os Incae quadripartitum."

Das ist noch heute der Stand der wissenschaftlichen Frage bezüglich des Interparietale des Menschen, neue embryologische Untersuchungen über diesen die vergleichende Anatomie seit den Zeiten J. F. Meckels (1809) beschäftigenden Gegenstand sind mir nicht bekannt geworden. Wir haben sonach da wieder anzuknüpfen, wo wir damals den Faden haben fallen lassen.

Das Interparietale der Affen.

I. Untersuchung an jungen und alten Schädeln.

Bei meinen neuen auf den Nachweis des Interparietale bei Affen gerichteten Studien hat sich zunächst ergeben, daß die Angabe des Herrn Bolk, er habe an jungen und erwachsenen Affenschädeln „nicht ein einziges Mal eine Andeutung der Sutura mendosa gefunden", doch nicht ohne Ausnahme Geltung beanspruchen kann.

Als neues, in meiner früheren Abhandlung nicht benutztes Vergleichsmaterial an Schädeln der großen Anthropoiden standen mir jetzt zur Verfügung: der Schädel des „neugeborenen" Orangutan, genannt Quix, außerdem 15 Gorilla-Schädel und 21 Schädel von Schimpansen[1]).

Von den 15 Gorilla-Schädeln besitzen zwei noch das vollständige Milchgebiß, elf sind erwachsen, zum Teil alt. An keinem dieser 15 Schädel zeigt sich eine Andeutung einer Sutura mendosa oder irgendwelche Bildung, die zur Gruppe des Os Incae gerechnet werden könnte. Das stimmt sonach zu meinen oben zitierten früheren Befunden und zu den neuen, auf ein weit größeres Beobachtungsmaterial, als von mir seinerzeit verglichen wurde, begründeten des Herrn Bolk.

Um so überraschender ist der Befund an dem Hinterhaupt der Schimpanse-Schädel.

Von den 21 Schimpanse-Schädeln — den Tschego miteingerechnet — zeigen zwei noch das vollkommene Milchgebiß, fünf stehen im Beginn der zweiten Zahnung, die übrigen besitzen vollkommenes Dauergebiß.

Von den 21 Schädeln hatten drei Fontanellknochen in der kleinen Fontanelle an der Spitze der Lambdanaht; bei dem Tschego, weiblich mit vollkommenem Dauergebiß, ist die rechte Hälfte der Lambdanaht und die Lambdaspitze selbst noch offen, der linke Schenkel der Lambdanaht zeigt beginnende Verwachsung; im rechten Schenkel findet sich ein großer, im linken ein kleiner Wormscher Knochen.

Ein weiblicher Schimpanse-Schädel mit Dauergebiß, aber noch ohne den III. Molar, von Herrn Oberleutnant Bertram

---

[1]) Davon stammen sechs Gorilla- und zehn Schimpanse-Schädel aus der Münchener zoologisch-zootomischen Staatssammlung. Ich möchte an dieser Stelle den Dank aussprechen für diese mir dadurch, wie so vielfach schon früher, von der Leitung der genannten Sammlung bei meinen Untersuchungen zu Teil gewordene Unterstützung. — Der anthropologischen Staatssammlung gehören neun Gorilla- und zehn Schimpanse- sowie ein „Tschego"-Schädel, der Mehrzahl nach Geschenke von Herrn Professor Dr. Haberer.

erbeutet und der zoologisch-zootomischen Sammlung geschenkt, zeigt eine Anhäufung Wormscher Knochen in beiden Schenkeln der Lambdanaht wie eine ähnliche, soviel mir bekannt, bei einem sonst normalen, nicht in Gefangenschaft aufgezogenen Affen bisher noch nicht beobachtet oder beschrieben wurde. Die ganze Lamndanaht ist erfüllt mit kleineren und größeren, zum Teil sehr großen Wormschen Knochen. Fig. 14. Es ist die entsprechende Bildung, wie ich sie

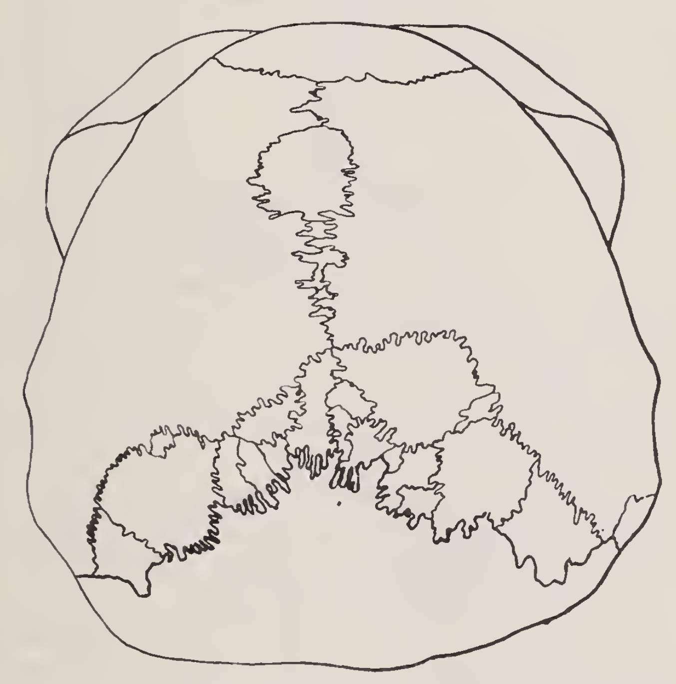


Fig. 14. Schimpanse-Schädel mit „doppelter Lambdanaht".

in meinen statistischen Aufnahmen der Schädelanomalien unter der altbayerischen Landbevölkerung[1]) als doppelte Lambda-

[1]) J. Ranke, Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern. München, Theodor Riedel 1883. — Die Schädel der altbayerischen Land-

naht bezeichnet und beschrieben habe. Bei dem Menschen gehört diese anomale Bildung keineswegs zu den größten Seltenheiten. Ich habe die vollkommene Erfüllung der Lambdanaht mit einer geschlossenen Zone Wormscher Knochen unter

2443 darauf geprüften altbayerischen Schädeln
122 mal gezählt, also je
1 Schädel auf 20 = 5 pro cent.

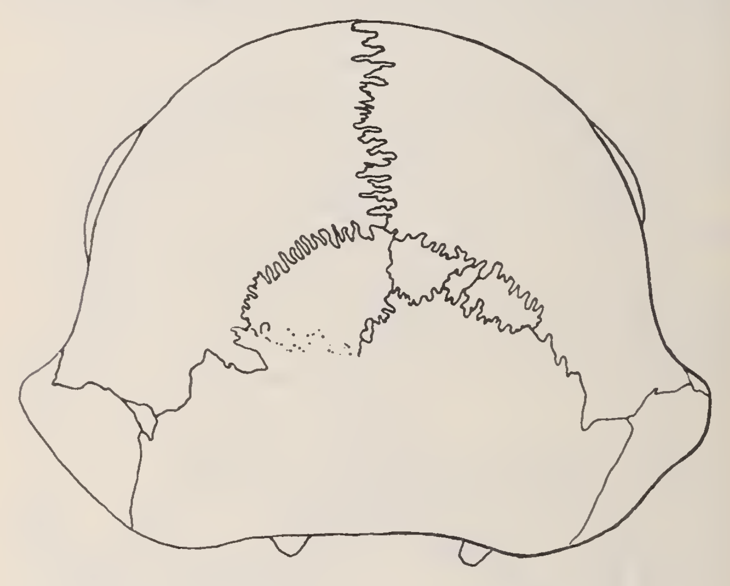


Fig. 15. Schimpanse-Schädel mit Os Incae dimidium sinistrum. Die untere Grenznaht ist am Original deutlich.

Ein männlicher Schimpanse-Schädel, mit Dauergebiß, der III. Molar aber erst im Durchbruch, Geschenk von Herrn Barker (z.z. S.) zeigt den ersten beobachteten Fall eines sicher zur Gruppe des Os Incae gehörigen überzähligen Knochens bei Affen. Der Schädel besitzt links einen fast voll-

bevölkerung, I. Abschnitt, Zur Physiologie des Schädels und Gehirns, S. 68 ff.

Zuerst veröffentlicht in: Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns, Bd. II, S. 15, 1879.

kommen individualisierten halben Inkaknochen, Os Incae dimidium sinistrum Fig. 15. Ich habe die gleiche Bildung als eine recht seltene auch bei dem Menschen konstatiert (s. oben S. 254 Abbildung Fig. 10). In der erwähnten statistischen Zählung konstatierte ich[1]) unter

2489 darauf geprüften altbayerischen Schädeln
2 mit halbem Inkaknochen, also je
1 Schädel auf 1245 = 0,8 pro mille.

Es ist das der gleiche Häufigkeitswert, wie ich ihn für den ungeteilten vollkommenen Inkaknochen Os Incae proprium unter den Schädeln der altbayerischen Landbevölkerung gefunden habe, nämlich unter denselben 2489 Schädeln zweimal = 0,8 %₀.

In dem rechten Schenkel der Lambdanaht des Schimpanse-Schädels mit halbem Os Incae befinden sich zwei große Wormsche Knochen.

Man vergleiche die Abbildungen des halben Inkaknochens bei Schimpanse Fig. 15 und bei dem Menschen Fig. 10, um die volle Gleichartigkeit beider Vorkommnisse zu erkennen.

Bei Schimpanse zeigen sich sonach Verhältnisse der fötalen Trennung der Ober- und Unterschuppe des Hinterhauptsbeins, welche den beim Menschen beobachteten entsprechen. Schon nach diesen neuen Beobachtungen erscheint ein Zweifel an der Existenz des „Interparietale“ als Elementarbestandteil der Hinterhauptsschuppe der großen Anthropoiden, als deren Vertreter wir den Schimpanse betrachten dürfen, nicht mehr berechtigt.

Aber auch für Orangutan ist mir in letzter Zeit der Nachweis des Interparietale gelungen, indem ich offene Nahtreste der Sutura mendosa konstatiert habe.

Das gleiche niedliche Schädelchen des „neugeborenen“ Orangutan Quix, das uns die erste Beobachtung einer Stirnnaht im nachembryonalen Leben des Orangutan gebracht hat.

---

[1]) J. Ranke, l. c. ebenda.

zeigt auch zum ersten Mal bei einem Affen beiderseitig die offenen Reste der Sutura mendosa. Der Nahtrest mißt rechts etwa 4 mm, links 3,5 mm. Die beigegebene Abbildung des Hinterhauptsbeins macht die Verhältnisse anschaulich. Fig. 16.

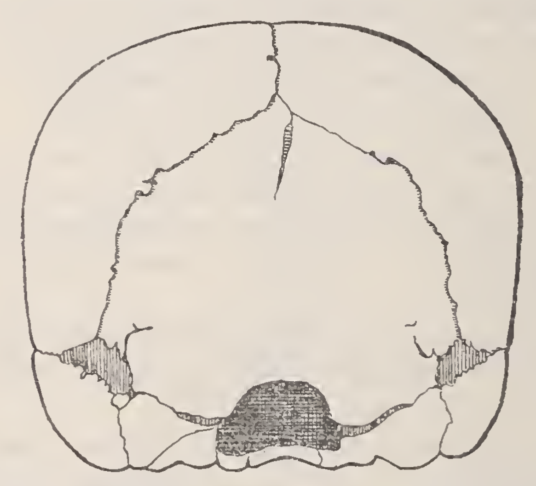


Fig. 16. Hinterhauptsansicht des neugeborenen Orangutan-Schädels, um rechts und links die Sutura mendosa zu zeigen.

Für die beiden großen Anthropoiden: Schimpanse und Orangutan ergibt sich sonach, den menschlichen Verhältnissen entsprechend, die Zusammensetzung der Hinterhauptsschuppe aus Supraoccipitale und Interparietale „eine Grenze zwischen Ober- und Unterschuppe des Occipitale“, welche Herr Bolk vermißt, kommt sonach beim Affen vor.

II. Untersuchungen an fötalen Affenschädeln.

Zur Untersuchung der fötalen Bildungsgeschichte der Hinterhauptsschuppe bei Affen konnte ich die gleichen Präparate benutzen, welche mir für das Studium der Scheitelbein-Verknöcherung gedient haben.

Zunächst die beiden nach der Methode von Schultze durchsichtig gemachten Embryonen von Macacus cynomolgus, dann die drei mazerierten Embryonen-Skelette von Hy-

lobates. Leider stehen mir zur Zeit passende Embryonen der drei großen Arten der Anthropoiden nicht zur Verfügung.

Die von unserem vortrefflichen Universitätszeichner, dem leider früh verstorbenen Keller, unter meiner Aufsicht hergestellten Abbildungen der durchsichtigen Macacus-Embryonen (s. oben S. 233 und 234) sind beide von der Seite aufgenommen, wodurch sie für die jetzt vorliegende Betrachtung wenig Anhaltspunkte bieten. Nur an der Abbildung des größeren der beiden Embryonen zeigt sich hinter dem Ohr eine Spur der Verknöcherung des Occipitale superius, das sich bekanntlich wie mehrfach erwähnt, als Knorpelverknöcherung bildet.

In Rückansicht des Schädels zeigt aber auch der kleinere der beiden Macacus-Embryonen eine schon eingetretene Verknöcherung des Occipitale superius. Die nach den Erfahrungen beim Menschen auch für die Affen vorauszusetzende Entstehung dieses Elementarknochens aus zwei getrennten Ossifikationszentren zeigt sich hier nicht. Das einheitliche Gebilde läßt eine Trennungsspur in der sagittalen Mitte nicht erkennen: zwei annähernd rundliche Endstücke werden durch ein schmaleres Zwischenglied zu einer hantelähnlichen Figur verbunden. Die unter meiner beständigen Aufsicht ausgeführte Abbildung, welche ich hier gebe, veranschaulicht ziemlich treffend die eben beschriebene Form der Verknöcherung Fig. 17.



Fig. 17. Occipitale superius des kleineren Macacus-Embryo stark vergrößert.

Über dem fötalen Occipitale zeigt sich, soviel ich mit freiem Auge und Lupe sehen kann, noch keine Spur einer Anlage des Interparietale. Bei menschlichen Embryonen ist mir dieses Stadium der embryonalen Bildung des Hinterhauptsbeins niemals entgegengetreten, ich konnte bei den mir zur Verfügung stehenden Entwickelungsstadien von zehn mensch-

lichen Embryonen aus dem dritten Monat stets über der kompakteren Anlage des Knorpelknochens auch die Anfänge der lockeren Hautverknöcherung nachweisen. Auch die Form der primären Knorpelverknöcherung ist bei dem Affenembryo von der bei menschlichen Embryonen etwas verschieden, am nächsten steht der Affenform meine Abbildung Fig. 69 l. c. S. 397 (S. 123) von einem menschlichen Embryo von 45 mm Körperlänge. Hier sind freilich die beiden Hälften des Supraoccipitale noch durch eine sagittale Synostose getrennt. Danach darf wohl geschlossen werden, daß die betreffende fötale Synostose bei Macacus rascher als beim Menschen verläuft.

Der größere der beiden Macacus-Embryonen zeigt die Bildung der Hinterhauptsschuppe schon wesentlich weiter vorgeschritten. Auch bei ihm zeigt die primäre Verknöcherung des Supraoccipitale noch annähernd die „Hantelform“ wie bei dem kleineren. Zwei annähernd rundliche Endstücke werden durch ein schmaleres Mittelglied verbunden; die Form der Endstücke ist etwas geändert und ich habe keine vollkommene Sicherheit gewinnen können, ob die Verschmelzung

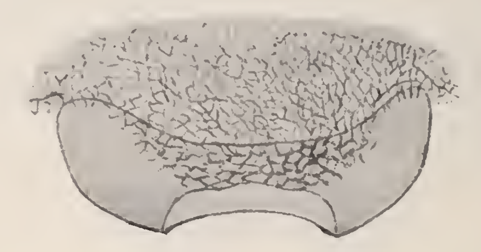


Fig. 18. Hinterhauptsschuppe des größeren Macacus-Embryo. (Das Klische gibt fälschlich eine Umgrenzung der Hautverknöcherung, deren Fasern ausstrahlen.)

in der sagittalen Mittellinie eine vollkommene ist oder ob hier nicht eine ganz schmale Synchondrose besteht. Was ich mit Sicherheit erkannt habe, habe ich in der Abbildung Fig. 18 darstellen lassen.

Hier tritt nun das durch Hautverknöcherung sich bildende

Interparietale in Erscheinung. Die Abbildung sucht die Verschiedenheit der faserig-maschigen, lockeren Struktur des sich bildenden Hautknochens von der dichten Struktur des Knorpelknochens zur Darstellung zu bringen. Die Hautverknöcherung resp. die Anlage des Interparietale greift zu beiden Seiten über die Anlage des Supraoccipitale hinaus, wodurch eine Andeutung eines in der Folge sich bildenden seitlichen Sutura mendosa-Restes gegeben erscheint. Die verschiedene Dichtigkeit des Knorpelknochens und des Hautknochens grenzt beide deutlich ab.

Die Beobachtungen ergeben, daß die Verhältnisse der fötalen Bildung der Hinterhauptsschuppe aus Knorpel- und Hautknochen bei Menschen und diesen Affen wesentlich übereinstimmen. Auch darin besteht eine Übereinstimmung, daß die Hautverknöcherung auch auf das aus Knorpelverknöcherung entstehende Supraoccipitale übergreift, wie ich das in Fig. 77a und b l. c. S. 410 (S. 136) zur Darstellung gebracht habe (s. auch O. Schultze, Grundriß der Entwickelungsgeschichte 1897, S. 208 Abb. 176).

Die drei Hinterhauptsbeine der Hylobates-Embryonen, welche in der fötalen Ausbildung beträchtlich weiter

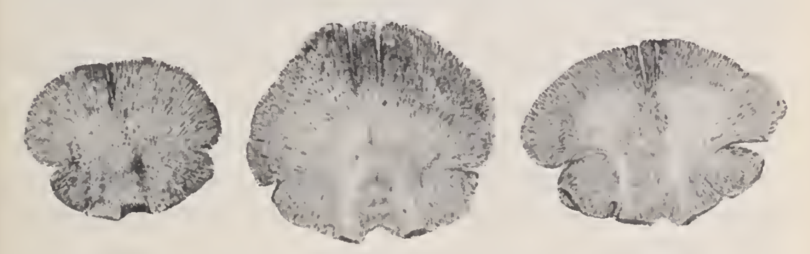


Fig. 21. I. Fig. 20. III. Fig. 19. I.
Drei Hinterhauptbeine von Hylobates-Embryoren, um die Sutura mendosa zu zeigen.

fortgeschritten sind als die Macacus-Embryonen, gebe ich hier in möglichst getreuen Abbildungen, die auf Grundlage von Photographien angefertigt worden sind Fig. 19 I, 20 III, 21 II. Interparietale und Supraoccipitale sind vollkommen verschmolzen, aber man erkennt noch deutlich die faserige Struktur des

ersteren und die kompaktere des letzteren und an allen dreien zeigt sich die bei den Affen so selten sich findende Sutura mendosa in voller Klarheit.

Die Maße der Hinterhauptschuppen sind folgende:

Hinterhauptschuppe (alle Maße in Projektion) in Millimetern	Fig. 19. I	Fig. 21. II	Fig. 20. III
Größte Breite	27	22	27
Höhe vom Hinterrand des Foramen magnum	21	16	20
Gesamthöhe der Schuppe . . .	24	18	21
Sutura mendosa, Abstand vom Oberrand	16 } 24	10 } 18	13 } 21
Sutura mendosa von der untersten Spitze	8	8	8
Länge der Sutura mendosa rechts	1,7	2,0	3
„ „ „ „ links	2,0	2,0	3

Bei dem Anblick der Innenseite zeigen die oberen, dem Interparietale zugehörigen Partien des Knochens bei Nr. III und ziemlich ebenso bei den zwei anderen Präparaten eine faserige, von der Mitte des Knochens gegen den Rand zu, also zum Teil in radiärer Richtung, angeordnete Struktur. Dagegen zeigt die Unterschuppe eine ziemlich glatte Oberfläche mit Ausnahme der an die Sutura mendosa anschließenden Teile; seitlich von dem den Oberrand des Foramen magnum bildenden Mittelstück des Unterrandes erscheint die Knochenstruktur mehr porös.

Auf der Außenfläche erscheint Nr. III wie von einem zarten porösen Netzwerk überkleidet, welches besonders an den Rändern der Unterschuppe, namentlich in der Umgebung der Sutura mendosa, deutlich ist. Bei Nr. I und II erscheint die Mittelpartie der Schuppe in etwas größerer Ausdehnung mehr glatt und gewissermaßen solider, aber bei beiden zeigen die Ränder der Unterschuppe, wie bei Nr. III, ein äußerlich poröses Ansehen.

Der Embryo, zu welchem das Scheitelbein Nr. II gehört, war in der fötalen Entwickelung etwas weniger weit fortgeschritten als Nr. I und III, was auch die oben mitgeteilten Messungen ergeben, wonach das Scheitelbein wesentlich kleiner ist. Der Oberrand der Oberschuppe erscheint etwas verschoben zweilappig, die rechte Seite ist etwas größer als die linke, an der Grenze der beiden Lappen durchsetzt eine sagittal verlaufende Randspalte die Oberschuppe. Ich möchte diese Spalte nicht für eine sapittale Mittelspalte halten, welche die Oberschuppe im Sinn der halben Inkaknochen in zwel Hälften teilen würde, sondern für eine der bei den beiden anderen Hinterhauptsbeinen in doppelter Anzahl vorhandenen, einen mittleren Abschnitt der Oberschuppe abgrenzenden, Randspalten. Daß übrigens bei den Anthropoiden die eigentliche mittlere fötale Sagittalspalte der Oberschuppe im nachembryonalen Leben erhalten bleiben kann, lehrt die Hinterhauptsschuppe des neugeborenen Orangutan Quix (s. Abbildung Fig. 16 S. 264).

Die Hinterhauptsbeine Nr. I und III zeigen übereinstimmend zwei parallel verlaufende die Oberschuppe durchsetzende Sagittale Randspalten, welche ein mittleres Stück der Oberschuppe von den Seitenpartien abgrenzen ganz im Sinne des dreigeteilten Inkaknochens des Menschen, des Os Incae tripartitum.

Die embryonale Bildungsgeschichte der Hinterhauptsschuppe der Affen erweist sich bei den mir vorliegenden Präparaten: 2 Macacus-Embryonen und 3 Hylobates-Embryonen, vollkommen der von mir beim Menschen beschriebenen entsprechend. Der Unterschied besteht nur darin, daß sich die fötale Elementarzusammensetzung der Schuppe des Hinterhauptsbeins bei Affen seltener als beim Menschen im Leben nach der Geburt noch erhalten zeigt.

Verkalkungsvorgänge im gesunden und rachitischen Knorpel.

Von Dr. **Adele Hartmann**,
Assistentin am hist.-embryol. Institut der Universität.

Vorgelegt von S. Mollier in der Sitzung am 1. März 1913.

Noch immer ist das Problem der Verkalkung ungelöst, wenigstens soweit es sich nicht bloß um eine Niederschlagung von Kalksalzen in toten oder nekrobiotischen Geweben handelt, sondern um normales Geschehen, nämlich um die Ablagerung von Calciumphosphat in das eben gebildete weiche Knochengewebe. Umgekehrt ist es daher auch noch nicht möglich gewesen, eine gut begründete Ursache zu finden dafür, daß bei der Rachitis die normale Verkalkung ausbleibt oder doch wenigstens sehr reduziert ist; denn alle bisher aufgestellten Theorien, vermehrte Kalkausscheidung oder mangelhafte Kalkzufuhr, entzündliche Reize, Übersäuerung des Blutes, wurden durch darauf hinzielende Experimente direkt widerlegt oder doch sehr in Frage gestellt (Pfaundler, Oehme, Stöltzner, Schabad).

Nun hat H. G. Wells in einer Reihe von Versuchen (1906 bis 1910) über pathologische Verkalkung gefunden, daß dem Knorpelgewebe als solchem eine besondere Fähigkeit innewohnt, Kalksalze aufzunehmen. Als er nämlich Stückchen sterilen Gewebes frei in die Bauchhöhle von Kaninchen verbrachte, stellte sich heraus, daß Thymus, Milz, Muskeln und Fettgewebe kaum verändert waren, vor allem kaum eine Einlagerung von Kalksalzen zeigten, trotzdem doch gerade in Thymus und Milz

reichlich Phosphorsäure vorhanden ist und dadurch die Bedingungen für eine Attraktion von Kalksalzen gegeben erscheinen. Dagegen zeigten Stückchen von fetalem Epiphysenknorpel (Kalbsfeten) schon nach relativ kurzer Zeit Zeichen von Erweichung neben reichlicher Einlagerung von Kalksalzen, die sich zu ca. 90 % als Phosphate erwiesen, demnach der Zusammensetzung der normalen Knochenasche sehr nahe kamen; dennoch enthält der jugendliche Knorpel kaum Spuren von Phosphorsäure. Aus der Tatsache, daß die Affinität zu Calcium sich im toten Gewebe in gleicher Weise manifestiert wie im lebenden, schließt Wells „that the tendency of living epiphyseal cartilage to take up calcium in ossifying, depends upon some non living constituent and is not solely a manifestation of the functual activity of the living cells". Welcher Art diese tote, in so eigenartiger Weise chemotaktisch wirksame Substanz sein könnte, darüber weiß er keinen näheren Aufschluß zu geben. Es wird auch sehr schwer sein, hierüber ins klare zu kommen, solange wir noch nicht wissen, welche Formbestandteile des jungen Knochengewebes eigentlich verkalken, die kollagenen Fibrillen oder das zwischen ihnen liegende Bindemittel.

Wells hat seine Untersuchungen auf normalen Knorpel beschränkt und sich begnügt mit dem Hinweis, daß eine nach ihm vorhandene, als „Kalksalzfänger" (Pfaundler) wirksame bestimmte Substanz nicht mit Phosphorsäure zu identifizieren sei, wie man bisher vielfach annahm; daß ferner, wo pathologischerweise eine Verkalkung auftritt, diese mit einer gewissen vorausgehenden Degeneration des verkalkenden Gewebes in engem Zusammenhange stehe und endlich, daß, so oft er auch die Verkalkungsbedingungen variierte, die Zusammensetzung der Kalksalze immer annähernd die gleiche war.

Mir lag vor allem daran, diese Versuche von Wells für die Pathogenese der Rachitis auszubeuten, d. h. nachzusehen, ob sich rachitischer Knorpel in Bezug auf die Einlagerung von Kalksalzen ebenso oder anders verhält als nicht rachitisches Material. Wenn nämlich die Ursache für die aus-

bleibende Verkalkung der osteoiden Substanz darin zu suchen ist, daß eine „spezifische Affinität“ für die Kalksalze des Blutes und der Gewebsflüssigkeit nicht vorhanden ist, also die Umbildung gewisser Gewebsbestandteile zu einer als „Kalksalzfänger“ funktionierenden Substanz ausbleibt, so steht zu erwarten, daß auch bei Einheilungsversuchen, wie sie Wells vornahm, die Verkalkung ausbleibt oder zum mindesten sehr herabgesetzt ist, sobald man statt normalem rachitischen Knorpel verwendet. Trifft das zu, so darf man mit einigem Recht die Ursache in einer Veränderung des Knorpels suchen.

Natürlich konnte ich die Versuchsbedingungen denen von Wells nicht absolut gleich gestalten. Denn ich konnte keinen fetalen Knorpel verwenden, sondern nur entsprechende Skelettteile kindlicher Leichen, die das Alter aufwiesen, in dem die Rachitis zumeist in Erscheinung tritt. Dies hat zur Folge, daß ich niemals ganz reinen Knorpel untersuchen konnte, sondern immer eine gewisse nicht genau zu bestimmende Menge bereits verkalkten Gewebes mit in Kauf nehmen mußte. Die Resultate der Versuche waren zum Teil sehr überraschend.

Ich beginne zunächst mit einer Beschreibung der einzelnen Versuche und ihrer Resultate, indem ich die für alle Untersuchungen in gleicher Weise geltenden Bemerkungen zusammenfassend voranstelle.

Die der Leiche bei der Obduktion entnommenen Skeletteile wurden mit Skalpell und Schere möglichst von allen Weichteilen befreit und in den zur Verbrennung bestimmten Tiegeln gewogen. Dabei trachtete ich, das Perichondrium nicht zu verletzen, um die Knorpeloberfläche glatt zu erhalten und die Reizwirkung auf das Peritoneum tunlichst herabzusetzen. Deshalb wog ich auch die Stückchen in frischem Zustand wie sie eingeheilt wurden, denn ein Vorversuch ergab, daß sie beim Trocknen leicht spröde und brüchig werden und zerfallen oder scharfe Ecken und Kanten aufweisen. Die zur Einheilung und zur Kontrolluntersuchung bestimmten Stücke entnahm ich symmetrischen Leichenteilen und versuchte sie auch in der äußeren Form möglichst entsprechend zu gestalten zur Schaffung glei-

cher Bedingungen für die Resorption. Die Epiphysen wurden gerade unterhalb der Epiphysenlinie abgeschnitten; es war von vornherein unmöglich alles Knochengewebe auszuschalten, da ja selbst beim Säugling innerhalb der Epiphysen zum Teil schon Knochenkerne vorhanden sind. Von den Rippen schnitt ich aus der 6. oder 7. meist ein 2—3 cm langes Stück aus, so daß die Knorpel-Knochengrenze gerade noch mit zur Untersuchung kam.

Die zur Einheilung bestimmten Stücke wurden an zwei aufeinanderfolgenden Tagen je $^1/_2$ Stunde in strömendem Dampf sterilisiert, wobei der Knorpel ein durchsichtiges, glasiges Aussehen gewann. Darnach wurden sie sofort zur Einheilung gebracht in folgender Weise: In der linea alba wurde dem Kaninchen durch einen 2—3 cm langen Schnitt unterhalb des Nabels die Bauchhöhle eröffnet, das Knorpelstück einfach zwischen die Darmschlingen eingeschoben und Peritoneum, Fascie und Haut in getrennten Nähten vereinigt. Nur eines der zehn operierten Kaninchen ging an septischer Peritonitis zu Grunde, wahrscheinlich infolge einer kleinen Stichverletzung des Darmes.

Die Kontrollstücke wurden sofort verarbeitet: bei langsam steigender Hitze bis zu 300 Grad getrocknet, zerkleinert, langsam verascht und die Asche geglüht, bis sie möglichst rein weiß war. Die Asche ward wiederum gewogen und, wo es möglich ist, in zwei Teile geteilt zur getrennten Untersuchung auf CaO und P_2O_5. Beide Aschenbestandteile werden gravimetrisch bestimmt; das Calcium als Oxalat gefällt nach der Methode von T. W. Richards, um eine Verunreinigung des Niederschlages mit Magnesium und dadurch eine Erhöhung des Calciumresultates zu verhüten, geglüht und als CaO gewogen. Die Phosphorsäure wurde aus der salpetersauren Lösung 2mal mit Ammoniummolybdat gefällt (nach Wooy), der Niederschlag auf dem Filter sorgfältig gewaschen, bis zur Gewichtskonstanz getrocknet, gewogen und nach Finkener aus dem Phosphorammoniummolybdat die Phosphorsäure als P_2O_5 berechnet.

Für die Bestimmung der Phosphorsäure ist es sehr wichtig,

ob dem Knorpel schon größere Mengen von Knochensubstanz beigemengt sind oder nicht. Untersucht man ganz reinen Knorpel ohne makroskopische Spur von Verkalkung, so erhält man nach der Fällung mit dem Molybdat kaum einen Niederschlag, während Ca in nicht unbeträchtlicher Menge immer noch nachzuweisen ist.

Versuch I.

Dient dazu einen allgemeinen Überblick zu geben; vier Stückchen (a, b, c, d) aus der Leiche eines neun Monate alten an alimentärer Intoxikation verstorbenen, hochgradig abgemagerten Kindes, dessen Skelett makroskopisch keinerlei Zeichen von Rachitis zeigte, werden in oben beschriebener Weise untersucht und liefern folgende Resultate:

Tabelle I.

I.	Skeletteil	Gewicht frisch	Aschengewicht	% Asche	Ca O	% Ca O	P_2O_5	% P_2O_5
a	distale Femurepiphyse	8.9695	0.4186	4.667	0.2116	50,55	Vorhanden	—
b	distale Femurepiphyse	8.4194	0.4234	5.029	—	—	—	—
c	Rippe (mehr Knochen)	2.7448	0.1384	5.042	0.1120	80.93	0.0502	36.27
d	Rippe (mehr Knorpel)	3.2336	0.1272	3.934	0.0494	38.83	Spur	—

Aus dieser Tabelle geht hervor, daß das Gewicht der Asche vorwiegend bestimmt wird durch die Beimengung an bereits verkalkter osteoider Substanz. Dies gilt in gleicher Weise für das Calcium; denn wo der Prozeß der Ossifikation sich im Fortschreiten befindet, sind die umgebenden Knorpelpartien ebenfalls schon verkalkt. Nur wenn das Verhältnis von Knorpel zu Knochen sich ganz vorwiegend zu Gunsten des ersteren verschiebt (wie in d), werden die Werte für den

Aschengehalt und CaO-Gehalt geringer. Der immer noch relativ hohe Calciumgehalt bei d entstammt vermutlich dem der Knorpel-Knochengrenze entsprechenden Teile. Ich habe nirgends in der vorhandenen Literatur über die Mineralbestandteile des Knorpels (Abderhalden, Hammarsten, Schmiedeberg) gefunden, daß das Calcium einen bedeutsamen Anteil der anorganischen Knorpelverbindungen ausmachte; hier stehen vor allem Sulfate und Chloride und als basischer Bestandteil Natrium im Vordergrund. Im übrigen ist über die Zusammensetzung reiner Knorpelasche fast nichts bekannt.

Liegt dagegen schon vorwiegend Knochensubstanz vor, so treten alle übrigen Mineralbestandteile vollständig gegen das Calciumphosphat zurück; die 0,0502 g P_2O_5 entsprechen 0,11057 g tertiärem Calciumphosphat; zieht man von der Menge des gefundenen CaO (0,1120 g) die zur Neutralisation der Phosphorsäure nötige Menge ab, welche 0,06031 g entspricht, so bleibt immer noch ein Überschuß von 0,05169 g, der an Kohlensäure, Chlor und Fluor gebunden ist, und zu einem Bruchteil wenigstens dem Knorpel angehört.

Um das Verhältnis von P_2O_5 zu CaO sicher zu stellen, machte ich nochmals Analysen von einem Stückchen Rippe (a), das fast nur aus Knorpel, und einem, das zu gleichen Teilen aus Knorpel und Knochen bestand (b). Beide stammten aus einer etwas älteren Leiche (2¼ Jahre); da das Alter, wie spätere Untersuchungen zeigten, nicht ganz gleichgültig ist, können sie nicht absolut zum Vergleich mit der vorhergehenden Analyse dienen. Tabelle 2 gibt das Resultat wieder, das im wesentlichen mit dem vorher genannten übereinstimmt.

Tabelle 2.

	Gewicht frisch	Aschen-gewicht	% Asche	CaO	% CaO	P_2O_5	% P_2O_5
a	2.4696	0.1084	4.389	0.0395	36.44	Spur	—
b	1.9410	0.1791	9.23	0.1385	77.33	0.0513	28.66

Versuch II.

Die vier zur Untersuchung gelangenden Stückchen werden der Leiche eines $2^1/_2$ jährigen, an Nephritis verstorbenen Kindes entnommen: je ein ca. 2 cm^3 großes Stück aus den beiden distalen Femurepiphysen (a und b) und zwei ca. $2^1/_2$ cm lange Stückchen symmetrischer Rippen (c und d). B und d dienen zur Kontrolluntersuchung; a und c werden am 1. August 1912 zwei Kaninchen in die Bauchhöhle eingeheilt. Die Tiere überstehen die Operation gut und befinden sich nach kurzer Zeit wieder ganz wohl.

Am 16. August geht Kaninchen c plötzlich ein; bei der Eröffnung der Bauchhöhle sind die Gedärme in der Umgebung der Wundstelle mit Fibrin verklebt, dazwischen reichlich Eiterflocken. Das Rippenstück c liegt etwas von der Wunde entfernt, ebenfalls in Fibrinmassen eingebettet, aus denen es sich jedoch leicht herausschälen läßt. Der Knorpel sieht gelblichweiß, undurchsichtig aus, läßt sich aber leicht schneiden. An einer ganz zirkumskripten Stelle, gerade der Knorpel-Knochengrenze entsprechend, finden sich Zeichen von Autolyse und Resorption. Neben dem sonst unveränderten Knochenstück ist eine durch Fibrinmassen abgekapselte, ca. nußgroße Eiterhöhle. Das Knorpelstückchen wird sofort in gleicher Weise wie das Kontrollstück verarbeitet; dabei ergibt sich:

Tabelle 3.

II.	Gewicht frisch	Aschengewicht	% Asche	CaO	% CaO
c	2.0202	0,2018	9.989	0.1012	50.15
d	3.3194	0.2288	6.893	0.1386	60.58

Trotzdem die Menge der Asche prozentual höher geworden ist, hat ein nicht unbeträchtlicher Verlust an Calcium stattgefunden. Es ist natürlich nicht auszuschließen, daß die hier vorhandenen pathologischen Bindungen Einfluß gewonnen haben

auf die Resorption von Calcium. Ich möchte aber gleich jetzt betonen, daß auch Wells bei Rippenknorpeln keine wesentliche Verkalkung beobachten konnte; er bemerkt ausdrücklich, daß von allen Skeletteilen Rippen am raschesten resorbiert werden, so daß oft nach 10 Wochen schon keine Spur mehr davon vorhanden ist.

Das Kaninchen a wird am 18. Dezember getötet, so daß das Epiphysenstück 7 Wochen (48 Tage) eingeheilt war. Die Bauchhöhle zeigt keine Spur von Entzündung. Am Übergang ins kleine Becken liegt etwas nach links verschoben das Knorpelstück. Hier ist dem Peritoneum eine vaskularisierte Fibrinmasse aufgelagert, welche sich aber leicht ablösen läßt und von welcher aus ein kurzer, schnurartiger Strang zur Schnittfläche der Epiphyse geht. Die Oberfläche derselben ist zum Teil mit einer ebenfalls stark vaskularisierten Fibrinkapsel überzogen, nur der obere knorpelige Teil erscheint frei und ist mit einer gelblichweißen, weichen, undurchsichtigen, ca. 1,5 mm dicken Schicht belegt, unter welcher der mehr bläulichweiße Knorpel zum Vorschein kommt. Diese Schicht erweist sich miskroskopisch als aus größtenteils zerfallenen Leucocyten bestehend und wird mit verbrannt. Die Veraschung dauert sehr lange. Vergleicht man die bei der Analyse erhaltenen Resultate mit denen des Kontrollstückes, so ergibt sich:

Tabelle 4.

II.	Gewicht frisch	Aschengewicht	% Asche	CaO	% CaO	P_2O_5	% P_2O_5
a	13.5388	1.1010	8.132	0.6362	57.79	0.2838	25.78
b	17.2794	1.3494	7.811	1.0020	74.23	0.4090	30.30

Es hat also auch hier ein Verlust an fester Substanz stattgefunden, der aber weniger das Calcium als die Phosphorsäure betrifft, doch hat sich das Verhältnis kaum verschoben.

Da bei beiden Experimenten dieses Versuches versäumt wurde, die Knorpelstücke auch vor der Einheilung zu wägen,

kann leider nicht berechnet werden, ob wirklich eine Verminderung des Calciumgehaltes stattgefunden hat, oder ob sich nicht am Ende der Gewichtsverlust auf resorbierbare, organische oder anorganische Substanzen bezieht und also trotzdem eine Anreicherung an Calcium vorliegt. Der höhere Aschengehalt legt diesen Gedanken nahe. Beträchtlich kann jedoch die Zunahme an Calcium, wenn überhaupt vorhanden, nicht gewesen sein; dagegen spricht schon die Verminderung der Phosphorsäure.

Versuch III muß wegen des Verlustes der Kontrollanalyse ausscheiden, doch hat das Skelettstück während der Dauer seiner Einheilung um ein Viertel seines Gewichtes verloren und der Calciumgehalt erscheint ebenfalls kaum vermehrt.

Versuch IV.

Vier ca. 3 cm lange Stücke von Rippenknorpeln werden der Leiche eines schwächlichen, an tuberkulöser Meningitis verstorbenen $2^{1}/_{2}$jährigen Kindes entnommen, das geringe Anzeichen einer abgeheilten Rachitis bot. Auf die Epiphysen wurde verzichtet, da sie schon fast vollständig aus Knochenspongiosa bestanden. Zwei Stückchen (a) werden einem Kaninchen eingeheilt am 8. August 1912, die beiden anderen (b) sofort analysiert.

Nach 42 Tagen, am 18. September 1912 wird das Kaninchen getötet. Die Bauchhöhle desselben ist frei von Entzündungserscheinungen, nur wo die beiden Rippenstückchen dem Peritoneum anliegen, finden sich reichlich vaskularisierte Fibrinniederschläge, die zum Teil auch die Knorpel überziehen und sich ablösen lassen. Das Gewicht beträgt 5,5502 g gegen 4,5096 g vor der Einheilung. Nur in diesem einzigen Falle konnte ich eine Gewichtszunahme konstatieren; vielleicht sind die Fibrinmassen daran beteiligt; außerdem fällt während des Veraschens auf, daß vor der Verkohlung eine eigentümlich schmierige, sehr feuchte Masse entsteht, die nur langsam verbrennt.

Die chemische Untersuchung ergibt:

Tabelle 5.

IV.	Gewicht frisch	Aschen-gewicht	% Asche	CaO	% CaO
a	4.5096 + 1.0406	0.2567	4.625	0.0665	25.106
b	2.4102	0.1196	4.962	0.0396	33.11

Die Phosphorsäurebestimmung mußte wegen Mangel an Material unterbleiben. Vergleicht man den tatsächlich erhaltenen Wert des eingeheilten Stückes an CaO (= 0,0665) mit dem, der sich für dasselbe aus den Daten des Kontrollstückes berechnen läßt (= 0,07409), so ergibt sich, daß hier trotz der langen Einheilungsdauer ein Verlust an Calcium stattgefunden hat (= 0,00759 g), wenn auch ein sehr geringer.

Da die Resultate von Versuch II nicht ganz sicher sind in Bezug auf die absolute Zu- oder Abnahme des Calciumgehaltes, werden noch zwei weitere Versuche in dieser Richtung unternommen.

Versuch IX.

Der Leiche eines akut verstorbenen 13 Monate alten Kindes (alimentäre Intoxikation), dessen sehr kräftiges Skelett keine sichtbaren Zeichen von Rachitis bot, werden zwei symmetrische Rippenknorpelstücke entnommen, aus der 6. und 7. Rippe beiderseits. Stück a wird wie gewöhnlich einem Kaninchen eingeheilt; Stück b sofort der Analyse unterzogen.

Nach 54 Tagen wird das Tier getötet; die Sektion ergibt eine gute Vernarbung der Wunde, keinerlei Spur von Entzündung. Das Knorpelstück liegt in der Bauchhöhle an der Grenze des rechten vorderen Leberlappens in das freie Ende des großen Netzes eingerollt, aber leicht herauslösbar, also nicht verwachsen. Es ist nirgends mit Fibrin bedeckt, sieht gelblichweiß, sehr feucht, undurchsichtig aus, ist weich und biegsam. An Gewicht hat es um 0,2820 g abgenommen. Die chemische Analyse ergibt:

Tabelle 6.

IX.	Gewicht frisch	Aschen-gewicht	% Asche	Ca O	% Ca O	P_2O_5
a	4.5908 — 0.2820	0.0476	1.105	0.0184	38.66	Spur
b	4.0812	0.0576	1.412	0.0192	33.33	kaum Spur

Aus den für das Kontrollstück gefundenen Werten berechnet sich der zu erwartende Gehalt an CaO zu 0,021606 g; tatsächlich wurden nur 0,0184 g gefunden, was einer Differenz von 0,003206 g entspricht. Trotzdem der Gehalt der Asche an CaO prozentual höher ist als vor der Einheilung, hat ein Verlust an Calcium stattgefunden; die Zunahme an CaO bedeutet demnach hier nur, daß ein Teil der löslichen Substanzen aus dem Skelettstück resorbiert worden ist, was auch der Gewichtsverlust anzeigt.

Versuch X.

Hierzu dienten die beiden distalen Femurepiphysen derselben Leiche wie im vorhergehenden Versuch, die nach Möglichkeit gleich groß geschnitten und in gewohnter Weise verarbeitet werden.

Das operierte Tier wird 54 Tage nach der Operation getötet; die Wunde ist gut vernarbt; nirgends finden sich Niederschläge oder Entzündungserscheinungen. Das Skelettstück liegt locker in das freie Ende des Omentum maius eingerollt, ziemlich weit kranial in der Bauchhöhle. Es zeigt sich in der Form fast unverändert, nur die beiden Kondylen erscheinen etwas eingedrückt; die Farbe ist gelblichweiß, undurchsichtig, die Knorpeloberfläche läßt sich mit der Pinzette nicht allzu schwer eindrücken; die Schnittfläche (Epiphysenlinie) ist rauh. Das Gewicht beträgt um 1,8012 g weniger als vor der Einheilung.

Die chemische Untersuchung ergibt:

Tabelle 7.

X.	Gewicht frisch	Aschengewicht	% Asche	CaO	% CaO	P_2O_5	% P_2O_5
a	16.1604 — 1.8012	0.4318	3.006	0.2323	53.80	0.1508	34.93
b	16.1708	0.3990	2.468	0.1921	48.14	0.1196	29.98

Vergleicht man diese Tabelle mit der vorhergehenden Tabelle 6, so scheinen auf den ersten Blick die gleichen Verhältnisse vorzuliegen wie dort. Trotzdem aber handelt es sich nicht nur um eine Konzentrierung fester Substanz in dem eingeheilten Skelettstück, sondern es hat hier tatsächlich noch eine Neuanlagerung von Kalksalzen stattgefunden, denn wenn man wie bei den vorhergehenden Versuchen den zu erwartenden Betrag an CaO aus dem Kontrollstück b berechnet, so ergibt sich nur 0,1920 g; es ist also hier ein Überschuß von 0,0403 g vorhanden. Dies wird noch auffälliger, wenn man den Gehalt an P_2O_5 in gleicher Weise berechnet. Gefunden wurden 0,1508 g P_2O_5, während der Rechnung nach nur 0,1196 g vorhanden sein müßten; das Plus beträgt hier 0,0312 g. Zur Umbildung der 0,0403 g CaO in tertiäres Phosphat sind aber 0,03353 g P_2O_5 notwendig; die neu eingelagerte Substanz besteht also aus nahezu reinem tertiären Calciumphosphat, was mit den Ergebnissen von Wells sehr gut übereinstimmt.

Um festzustellen, ob der Knorpel florid-rachitischer Individuen sich anders verhält in Bezug auf Resorption und Einlagerung von Kalksalzen als anscheinend gesunder Knorpel, werden die folgenden vier Versuche mit hochgradig rachitischem Material ausgeführt. Sämtliche daraufhin untersuchten Skeletteile entstammen der Leiche desselben Kindes, da nur dieser eine Fall florider Rachitis während der mir zur Verfügung stehenden Zeit ad exitum kam. Es handelt sich um die Leiche eines 8 monatlichen, an Cerebrospinalmeningitis verstorbenen, sehr abgemagerten Kindes, das deutlichen Rosenkranz, multiple Infraktionen beider oberen Extremitäten und Auftreibungen fast sämtlicher Epiphysen zeigte.

Versuch V.

Zwei Rippenstücke von ca. 3 cm Länge mit der Knorpel-Knochengrenze werden der Leiche entnommen, das eine davon (a) nach vorangegangener Sterilisation am 16. August 1912 einem Kaninchen in die Bauchhöhle eingeheilt und das Tier am 12. September 1912 27 Tage nach der Operation getötet.

Bei der Eröffnung der Bauchhöhle zeigt sich das Peritoneum ganz frei von Entzündungserscheinungen. Rechts von der Operationsnarbe findet sich eine vollständig durch fibröse derbe Massen abgekapselte Geschwulst, etwa von der Größe einer Walnuß; sie ist einerseits mit der Bauchwand, andererseits mit den anliegenden Darmschlingen verwachsen. Den Inhalt derselben bildet ein weißer, breiiger Detritus, der keine Bakterien enthält (steriler Abszeß). Das Ausstrichpräparat zeigt noch die Form und Umrisse der Leucocyten, aber Kerne und sonstige Struktur sind größtenteils verschwunden.

Inmitten dieser Masse liegen die zwei Knorpelstückchen, die entschieden kleiner aussehen als vor der Einheilung und sich als sehr brüchig erweisen; alle Stückchen werden in einem Tiegel gesammelt, gewogen und verascht. Es ergibt sich ein Gewichtsverlust von 1,8320 g.

Resultat der chemischen Untersuchung:

Tabelle 8.

V.	Gewicht frisch	Aschen-gewicht	% Asche	CaO	% CaO	P_2O_5	% P_2O_5
a	4.5146 — 1.8320	0.0786	2.93	0.0304	38.68	—	—
b	3.6092	0.1016	2.81	0.0370	36.42	Spur	—

Die Eitermasse wurde bei 100 Grad 24 Stunden lang getrocknet und ein Teil davon verascht, um auf eventuell darin vorhandenes Calcium zu prüfen. Während des Veraschens zeigt sich, daß die Masse nicht zu einem gleichmäßig feinen Pulver

verbrennt, sondern einzelne härtere Bröckelchen enthält. Deshalb wird eine gewisse Menge der ausgeglühten Asche abgewogen und ihr Gehalt an Calcium quantitativ bestimmt.

Aus 0,1324 g Asche erhält man 0,0188 g CaO, das sind 14,20 %. Da diese Zahl auf die Eiterzellen allein bezogen viel zu hoch wäre, wird man zu der Annahme gezwungen, daß verkalkte Knorpel- oder Knochenbröckelchen sich in der Detritusmasse befanden und man wird daher in Tabelle 8 den Aschen- und Calciumgehalt etwas höher annehmen dürfen als er tatsächlich gefunden wurde; denn trotz des prozentual höheren Calciumgehaltes hat ein geringer Verlust an Calcium stattgefunden, da sich theoretisch ein Wert von 0,04620 CaO hätte erwarten lassen.

Bemerkenswert ist ferner die große Verminderung des Aschengehaltes, welche zu der bei der Rachitis längst bekannten Vermehrung des Wassergehaltes im Knorpel in ursächlicher Beziehung steht, somit nichts Befremdliches bietet. Viel eher mag es merkwürdig und zunächst unerklärlich erscheinen, daß der Verlust an Calcium so gering ausfiel. Weitere Versuche müssen zeigen, ob es sich hier nur um einen zufälligen Befund handelt, vielleicht im Zusammenhange mit dem Abszeß, oder ob diesem Ergebnis etwas Spezifisches zu Grunde liegt.

Versuch VI.

Von den beiden distalen Femurepiphysen (a und b) wird die eine (a) in gewohnter Weise am 16. August 1912 einem Kaninchen eingeheilt und das Tier am 2. Oktober 1912, also 49 Tage nach der Operation getötet.

Das Knorpelstück liegt mitten zwischen den Gedärmen in das freie Ende des Omentum maius verwickelt, jedoch nicht mit demselben verwachsen. Der Knorpel sieht gelblichweiß, undurchsichtig aus und läßt sich an der Oberfläche mit der Pinzette ziemlich leicht eindrücken. Zwischen den beiden Kondylen sind einzelne Stellen vorhanden, an denen unverkennbar Resorption stattgefunden hat. An den Gedärmen sowie am

Peritoneum sind nirgends Zeichen von Entzündung, nicht einmal von stärkerer Gefäßinjektion zu sehen.

Während der Zeit der Einheilung hat das Knorpelstück 0,1346 g an Gewicht verloren.

Resultate der chemischen Untersuchung:

Tabelle 9.

VI.	Gewicht frisch	Aschen-gewicht	% Asche	Ca O	% Ca O	P_2O_5	% P_2O_5
a	12.1070 — 0.1346	0.3596	3.004	0.1378	38.32	0.0817	22.72
b	11.9976	0.3306	2.75	0.1149	34.76	0.0638	19.30

Berechnet man aus b den Calciumoxyd- und Phosphorsäuregehalt für a, so ergibt sich, daß hier wiederum ein Ansatz von Calcium und Phosphorsäure stattgefunden hat, wenn auch kein sehr beträchtlicher (CaO berechnet: 0,11537 g, gefunden: 0,1378 g = + 0,0221 g; P_2O_5 berechnet: 0,06425 g, gefunden: 0,0817 g = + 0,01745 g). Die geringe Zunahme des Aschengewichtes spricht allerdings auch für eine Konzentrierung im allgemeinen.

Versuch VII.

Zur Verwendung kommen die proximalen Femurepiphysen (in zwei Stückchen Kopf und Trochanter maior), an denen die Knochensubstanz möglichst entfernt worden ist. Die eine (a) wird am 16. August 1912 einem Kaninchen eingeheilt, die andere gibt die Kontrollanalysen. Nach 49 Tagen, am 3. Oktober 1912 wird das Tier getötet. Die beiden Knorpelstückchen liegen reaktionslos vom großen Netz umhüllt auf den Gedärmen; sie sind nirgends verwachsen, sehen undurchsichtig, fleckig gelblichweiß aus und zeigen an manchen Stellen ganz besonders aber auf den Schnittflächen Resorptionserscheinungen. Gewichtsverlust 2,1466 g. Am Peritoneum keinerlei Zeichen eines Reizzustandes.

Die Analyse ergibt:

Tabelle 10.

VII.	Gewicht frisch	Aschen-gewicht	% Asche	CaO	% CaO	P_2O_5	% P_2O_5
a	7.1264 — 2.1466	0.2386	4.79	0.1532	64.22	0.0843	35.34
b	8.5976	0.2102	2.45	0.0872	41.48	0.0485	23.07

Die Zunahme an CaO und P_2O_5 ist hier eine ganz beträchtliche. Sie beträgt in beiden Fällen ungefähr das Doppelte des Kontrollstückes. (CaO berechnet: 0,0724 g, gefunden: 0,1532 g, Gewinn: 0,0808 g; P_2O_5 berechnet: 0,04034 g, gefunden: 0,0845 g, Gewinn: 0,04396 g.) Vielleicht ist die Zunahme hier so besonders auffällig, weil fast reiner Knorpel zur Untersuchung und Einheilung kam, während in der distalen Epiphyse (Versuch VI) immerhin schon eine beträchtliche Menge fertiger spongiöser Knochensubstanz vorhanden ist. Schon die nicht unbedeutende Zunahme des Aschengewichtes von b gegenüber a deutet auf eine wirkliche Anlagerung neuer Substanz (Calciumphosphat), nicht nur auf eine Verdichtung des schon Vorhandenen durch Resorption löslicher Verbindungen; es wären dann nur 0,1746 g Asche zu erwarten gewesen, während tatsächlich 0,2386 g gefunden wurden.

Versuch VIII.

Es werden nochmals zwei Rippenstücke von ca. 3 cm Länge aus der Leiche entnommen und eines davon (a) einem Kaninchen eingeheilt am 16. August 1912. Auch dieses Tier wird nach 49 Tagen am 3. Oktober 1912 getötet. In der Bauchhöhle keine Entzündung, keine Hyperämie. Das Rippenstück liegt dicht bei der Operationsnarbe, schon durch die Bauchdecken durchschimmernd; es ist nirgends verwachsen; der knorpelige Teil sieht wie sonst gelblichweiß, fleckig und undurchsichtig aus; der kleine knöcherne Anteil hat schon

begonnen abzubröckeln und zeigt sich deutlich arrodiert; einzelne kleine Stückchen liegen auf den Darmschlingen verstreut, sie werden möglichst alle gesammelt und mitgewogen. Gewichtsverlust: 2,5964 g. Die Tabelle veranschaulicht die Resultate der Analyse:

Tabelle 11.

VIII.	Gewicht frisch	Aschengewicht	% Asche	Ca O	% Ca O	P_2O_5	% P_2O_5
a	4.2674 — 2.5964	0.0910	5.446	0.0572	62.86	0.0271	29.78
b	6.9818	0.1798	2.575	0.0692	38.49	Spur	—

und ergibt auch für diesen Versuch eine ganz beträchtliche Zunahme von Calciumphosphat. Damit darf wohl auch ein Zufall als ausgeschlossen betrachtet werden. Allerdings könnte eingewendet werden, daß sämtliche Skeletteile von derselben Leiche stammen. Es wäre ja sicherlich besser gewesen, die Kalkeinlagerung an verschiedenem rachitischen Material zu erproben; doch sind die Ausschläge zu Gunsten einer Kalkeinlagerung hier so groß, daß ich nicht glaube, daß sie bei einem Versuch mit Knorpel aus einer anderen rachitischen Leiche plötzlich ins Gegenteil umschlagen würden, selbst wenn dabei individuelle Verschiedenheiten zutage treten, mit denen man natürlich rechnen muß.

Um nach der Besprechung der Versuche im einzelnen die Übersicht über die Resultate für das Nachfolgende zu erleichtern, habe ich den Gewinn und Verlust an Calciumsalzen nochmals in zwei Tabellen zusammengestellt (Tabelle 12 und 13) und die Zunahme bzw. Abnahme in Milligramm CaO pro Grammsubstanz graphisch zu Darstellung gebracht (Tabelle 14).

Ganz im allgemeinen betrachtet fällt zunächst ein gewisser Unterschied auf in der Menge der erhaltenen Asche, der einmal zum Alter der Leiche in ursächlicher Beziehung steht, andererseits auch zu der Menge der bereits vor-

Tabelle 12.

Vers.		Alter der Leiche	Skeletteil	Dauer der Einheilung	Gewicht frisch	% Asche	CaO gefunden	CaO berechnet	CaO Differenz	P_2O_5 gefunden	P_2O_5 berechnet	P_2O_5 Differenz
Nicht rachitisches Material.												
II.	a	30 Mon.	distale Femurepiphyse	48 Tage	13.5388	8.13	0.6362	?	?	0.2838	?	?
	b	„	„	—	17.2794	7.81	1.0020	—	—	0.4090	—	—
	c	„	Rippe	15	2.0202	9.99	0.1012	?	?	—	?	?
	d	„	„	—	3.3194	6.89	0.1386	—	—	—	—	—
IV.	a	27	Rippe	42	4.5096 + 1.0406	4.63	0.0665	0.07409	— 0.0076	—	—	—
	b	„	„	—	2.4102	4.96	0.0396	—	—	—	—	—
IX.	a	12	Rippe	54	4.5908 — 0.2820	1.11	0.0184	0.0216	— 0.0032	Spur		
	b	„	„	—	4.0812	1.41	0.0192	—	—	„	—	—
X.	a	12	distale Femurepiphyse	54	16.1601 — 1.8012	3.006	0.2323	0.1920	+ 0.0403	0.1508	0.1196	+ 0.0312
	b	„	„	—	16.1708	2.47	0.1921	—	—	0.1196	—	—

Tabelle 13.

Rachitisches Material												
Vers.		Alter der Leiche	Skeletteil	Dauer der Einheilung	Gewicht frisch	% Asche	CaO gefunden	CaO berechnet	CaO Differenz	P_2O_5 gefunden	P_2O_5 berechnet	P_2O_5 Differenz
V.	a	9 Mon.	Rippe	27 Tage	4.5146 — 1.8320	2.93	0.0304	0.04620	— 0.0158	Spur	—	—
	b	"	"		3.6092	2.81	0.0374	—	—	"	—	—
	c	"	Abszesseiter				0.0188	—	—	—	—	—
VI.	a	"	distale Femurepiphyse	49	12.1070 — 0.1346	3.304	0.1378	0.11573	+ 0.0221	0.0817	0.06425	0.01745
	b	"	"		11.9976	2.75	0.1149	—	—	0.0638	—	—
VII.	a	"	proximale Femurepiphyse	49	7.1264 — 2.1466	4.79	0.1532	0.07242	+ 0.0806	0.0843	0.0403	+ 0.044
	b	"	"		8.5976	2.45	0.0872	—	—	0.0485	—	—
VIII.	a	"	Rippe	49	4.2674 — 2.5964	5.45	0.0572	0.04238	+ 0.0149	0.0271		
	b	"	"		6.9818	2.58	0.0692	—	—	Spur	—	—

Tabelle 14.

mgr 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 +1 0 −1 2 3 4

Versuch: IV. IX. X. V. VI. VII. VIII.

Zu- bzw. Abnahme in Milligramm CaO pro Gramm frischer Substanz.

handenen Osteoidensubstanz, deren Ausdehnung nicht genau zu bestimmen war, ohne Zerstörung des geweblichen Zusammenhanges. Aus dem oben bereits angeführten Grunde war es nicht möglich, den Wassergehalt der Knorpelstückchen vor den Versuchen zu bestimmen; es erscheinen die für die Asche gefundenen Zahlen so niedrig, weil sie auf die Gewichtseinheit des frischen wasserhaltigen Gewebes bezogen werden mußten. Nimmt man den Wassergehalt des Knorpels um die Wende des ersten Lebensjahres zu ca. 80% an (Friedleben), so ergeben sich auf die Trockensubstanz allein berechnet aus obigen Zahlen etwa 4—6 mal höhere Werte. Dies stimmt gut überein mit den Analysen anderer Autoren (Hoppe-Seyler, Hammarsten, Abderhalden). Entsprechend dem höheren Wassergehalt des rachitischen Knorpels ist der Aschenwert hier viel geringer gefunden worden, übereinstimmend mit den bereits vorliegenden Untersuchungen von Friedleben, Schabad u. a. Die für das Calciumoxyd gefundenen Werte sind ganz im allgemeinen genommen etwas zu hoch, doch hängt dies eben damit zusammen, daß die bereits gebildete und verkalkte Knochensubstanz vom Knorpel nicht vollständig

abgetrennt werden konnte. Ein gewisses Maß hierfür kann die Phosphorsäure abgeben; wo schon Knochensubstanz in sichtbarer Menge vorhanden ist, läßt sie sich leicht bestimmen. Hat man dagegen nur Knorpel verascht mit eben beginnender Kalkeinlagerung, so erhält man kaum einen Niederschlag, der bei der Berechnung nur Bruchteile von Milligrammen ergibt. Es werden dann auch die Fehlergrenzen entsprechend weiter, so daß ich diese unzuverlässigen Berechnungen unterlassen habe. Steigt der Gehalt an Ca O, so schnellt immer auch die Phosphorsäure in die Höhe und zwar bleiben beide Substanzen zueinander in annähernd gleichem Verhältnis, d. h. es werden immer ca. 75—80% des Calciums durch die Phosphorsäure abgesättigt. Dieser Wert ist etwas niedriger als der von Wells gefundene, welcher zwischen 80 und 90% schwankt und etwas höher als die von Schabad angegebenen Zahlen = 70—75%.

Wichtiger als diese ganz allgemein chemischen Fragen erscheint uns aber das Verhalten der besonderen Bedingungen ausgesetzten Knorpelstücke im Gegensatz zu ihren Kontrollstücken. Wells hat gefunden, daß dem Knorpel, der längere Zeit in der Bauchhöhle lebender Kaninchen verweilt, eine besondere Fähigkeit innewohnt, aus den Gewebsflüssigkeiten Calcium oder seine Salze zu absorbieren. Ein Blick auf die Tabellen lehrt, daß auch bei meinen Versuchen die Zunahme an Calciumoxyd über die Abnahme überwiegend ist, wenn auch in viel geringerem Maße als es von Wells beschrieben wurde. Dies hängt einerseits sicherlich damit zusammen, daß ich niemals ganz reinen Knorpel zur Einheilung bringen konnte, wie dies Wells tat, der fetale Knorpel benützte. Die Aufnahmefähigkeit des Knorpels für Calcium ist scheinbar keine unbeschränkte; wo bereits eine bestimmte Menge von Kalksalzen vorhanden ist, gleichgültig ob in organisierter Form oder nicht, kann daher auch die Zunahme, d. h. die Neueinlagerung von unlöslichem Kalksalz nicht mehr so groß sein als da, wo noch keine vorhanden waren. Ich werde darauf später noch zurückkommen müssen.

Andererseits aber hat Wells es unterlassen, über die Ge-

wichtsverhältnisse der implantierten Stückchen vor und nach der Operation Aufschluß zu geben, er konstatiert einfach in einer Tabelle (S. 518, 1906), um wieviel CaO jedes Gramm Gewebe zugenommen hat. Die Zunahme geht bis zu einem gewissen Grade ungefähr der Dauer der Einheilung parallel. Zwar hat Wells die Knorpelstückchen vor der Operation getrocknet, also wasserfrei gemacht. Während ihres Verweilens in der Bauchhöhle sind sie aber wieder mit Flüssigkeit durchtränkt worden und es ist wohl anzunehmen, daß ein Teil der leichtlöslichen organischen und anorganischen Substanzen resorbiert worden ist, wie dies bei meinen Versuchen auch der Fall war. Mit einer einzigen Ausnahme haben alle eingeheilten Skelettstückchen an Gewicht verloren. Man könnte nun einwenden, daß der Gewichtsverlust lediglich als Wasserverlust in Betracht käme. Ich glaube jedoch nicht, daß man eine Resorption auch von fester Substanz so ohne weiteres ausschließen darf, denn einmal war das Aussehen der Knorpelstückchen nach der Entnahme aus dem Tier eher wasserreicher als vorher, sie waren eher noch weicher, biegsamer geworden; und zweitens waren die meisten an manchen Stellen deutlich arrodiert, sie sahen wie angefressen aus. Wells gibt selbst zu, daß „a relatively great loss by absorption of the organic substance“ stattgefunden habe. Es dürften also wohl seine Zahlen, wenn man sie auf das Anfangsgewicht der eingeheilten Stücke bezieht, eher etwas zu hoch gegriffen sein; trotzdem bleibt die Tatsache einer beträchtlichen Kalkeinlagerung bestehen.

Interessant ist ferner auch die mikroskopische Veränderung, die während der Einheilung an den Skelettstückchen vor sich ging. Wells fand den Knorpel fast vollständig zu einer breiigen, formlosen Masse erweicht, von einer zarten Bindegewebskapsel umhüllt. Den Grund für die rasche Erweichung weiß er ebensowenig anzugeben wie für die rapide Kalkeinlagerung. Vielleicht ist er in der leichten Löslichkeit der chondrinogenen Intercellularsubstanz in der alkalischen Peritonealflüssigkeit zu suchen. Knorpel, welche normalerweise

nicht ossifizieren (Rippen- und Trachealknorpel) besitzen die Tendenz zur Kalkeinlagerung in viel geringerem Maße, werden dagegen so rasch resorbiert daß zum Teil schon nach wenigen Wochen überhaupt nichts mehr von ihnen vorhanden war. Damit stimmen die Resultate, die ich erhielt, nicht ganz überein, wozu ich allerdings bemerken muß, daß die Dauer meiner Versuche acht Wochen nicht überschritt, gegen 10—14 Wochen bei Wells. Zumeist lagen die Skelettstücke ganz reaktionslos in der Bauchhöhle und waren in der Form fast unverändert, indem sie nur in dem bereits ossifizierenden Teil anfingen arrodiert zu werden und in einigen Fällen zu zerbröckeln begannen (vgl. die Versuche von Tanaka über die Löslichkeit von Knochenplatten in mit Kohlensäure gesättigten Flüssigkeiten). Der Knorpel dagegen war weicher geworden, gelb und undurchsichtig und zeigte sich an seiner ganzen Oberfläche von einer ca. 1 mm dicken, aus Leukocyten bestehenden Schicht überzogen. Allerdings waren die Leukocyten schon sehr verändert. Damit ist wohl erwiesen, daß bei der Resorption toter Gewebsstücke in der Bauchhöhle nicht nur deren Löslichkeit in der alkalischen Peritonealflüssigkeit maßgebend ist, sondern daß hier aktive phagocytäre Kräfte wahrscheinlich verbunden mit Fermentwirkung in erster Linie in Betracht kommen. Lösliche Salze werden weggespült und unlösliche, organisierte Materie wird langsam verdaut und der Resorption zugänglich gemacht. Nur in zwei Fällen (Versuch II a und IV) fand ich das Skelettstück teilweise von einer vaskularisierten Hülle umgeben, die aber wieder den größten Teil der knorpeligen Oberfläche frei ließ. Diese Membran war so fest mit dem Skelettstück verwachsen, daß sie nicht abgelöst werden konnte. Merkwürdig ist, daß hier, wo durch die reichliche Gefäßeinwucherung die Bedingungen für den Stoffwechsel erleichtert und eine rasche Zu- und Abfuhr gewährleistet wurde, die Kalkeinlagerung ausblieb, in dem einen Falle sogar sicher eine Verminderung an CaO zu konstatieren war. Ohne hieraus irgend einen Schluß ziehen zu wollen für die Ablagerung von Calciumphosphat im Gewebe, wird einem doch der Gedanke

nahegelegt, ob nicht eine große Verlangsamung der Strömungsgeschwindigkeit des Blutes, wie sie in den weiten sinuösen Gefäßräumen des Knochenmarkes zustande kommt, auf die Verkalkung des osteoiden Gewebes einen nicht unwesentlichen Einfluß hat. Es ist auch schon wiederholt der Versuch gemacht worden, die Ursache der mangelhaften Kalkablagerung bei der Rachitis in einer primären Veränderung des Knochenmarkes (lymphoide Entartung, mit Markerythroblastose, fibröse Umwandlung) zu suchen (vgl. Schmorl, Oehme, Aschenheim-Benjamin, Marfan; ferner die Versuche von Hofmeister und Tanaka). Andererseits sind gerade im Blutplasma Einrichtungen getroffen, welche unter gewöhnlichen Verhältnissen ein Ausfallen des unlöslichen Calciumphosphates verhindern (W. Pauli).

Warum aber unter sonst gleichen Bedingungen das eine Mal um das eingeheilte Knorpelstück eine vaskularisierte Membran sich bildet, während sie das andere Mal vollständig ausbleibt, darüber vermag ich mir keine Vorstellung zu machen; es sei denn, daß infolge minimaler Verletzungen des Peritoneums durch den Fremdkörper ein formativer Reiz zustande kam, welcher eine Wucherung des subserösen Bindegewebes auslöste. Von dem eingeheilten Stück selbst ist die Gefäßneubildung sicher nicht ausgegangen; es wurde der Leiche meist erst viele Stunden nach dem Tode entnommen und außerdem durch das lange Sterilisieren im strömenden Dampf jeder Rest vitaler Qualitäten vernichtet.

Hat man einmal die Einlagerung von Kalksalzen in das abgestorbene Gewebe festgestellt, so ergibt sich als nächste Frage, woher diese Salze stammen und warum sie daselbst abgelagert werden. Wie auch Wells betont, müssen sie aus dem Blute kommen, wo sie auf eine noch nicht völlig geklärte Weise durch Eiweißstoffe in Lösung gehalten werden. Sie werden nach Wells dann zur Ausfällung gebracht, wenn das Blut stärker alkalisch wird, oder durch Veränderungen in den Proteiden des Plasmas oder in der Quantität oder Zusammensetzung der Kalksalze. Doch gibt die Verbringung eines Knorpel-

stückes in die Bauchhöhle eines Kaninchens keine Veranlassung zu irgend einer der obengenannten Veränderungen im Blute des Tieres. Es müßte dann nicht nur der Knorpel, sondern jedes andere eingeheilte Gewebsstück ebenfalls verkalken, was jedoch, wie aus den Versuchen von Wells hervorgeht, nicht der Fall ist. Dagegen liegen die Knorpelstückchen frei von der Peritonealflüssigkeit umspült. Die Lymphe enthält weniger Eiweiß als das Blutplasma, vermag demnach nur weniger Kalksalze in Lösung zu halten. So kommt möglicherweise hier schon durch geringere Schwankuugen der Alkaleszenz (Kohlensäureproduktion beim Abbau des Knorpels durch Leukocyten) eine Ausfällung von Calciumphosphat zustande. Höber hat gezeigt, daß die Bestimmung der Reaktion des Blutplasmas (und somit auch der Gewebsflüssigkeit) durch Titration nicht in befriedigender Weise gelöst werden kann, sondern daß es vor allem darauf ankommt, den wirklichen Gehalt an H(+)- oder OH(—)-Ionen (Pfaundler: = die aktuelle Reaktion) zu bestimmen, und daß eben diese aktuelle Reaktion durch die Kohlensäurespannung des Blutes nicht unbeträchtlich beeinflußt wird und die Ionenkonzentration von weittragender Bedeutung für viele biologische Vorgänge ist (vgl. auch Askanazy der den Grund für die häufigen Kalkablagerungen in Lunge, Magen und Niere darin sucht, daß in ihnen die Produktion saurer Sekrete eine Alkaleszenzzunahme der umspülenden Gewebsflüssigkeit bedingt). Außerdem kommt auch hier wieder die sehr verlangsamte Zirkulation in Betracht.

Damit ist jedoch die Frage noch keineswegs entschieden, warum gerade der Knorpel eine besondere Tendenz zur Aufnahme von Kalksalzen zeigt. Pfaundler hat schon vor Wells gezeigt, daß eine solche vorhanden ist, und daß die Aufnahme des Metalls (im toten Gewebe) wahrscheinlich nicht im Sinne einer chemischen Bindung aufzufassen ist, da sie nicht quantitativ erfolgt, sondern daß es sich mehr um einen physikalischen Prozeß, um eine „Ionenadsorption“ handelt. Er kommt dabei zu der Schlußfolgerung, daß in einem bestimmten Entwicklungsstadium im Knorpel eine Substanz gebildet wird,

mit einer spezifischen Affinität zu den Kalksalzen des Blutes bzw. der Gewebsflüssigkeit ausgestattet; „diese derart zum „Kalksalzfänger“ umgewandelte Masse wird zunächst von gelösten Kalksalzmassen durchdrungen, die mit der organischen Grundlage in Verbindung treten und bei deren Abbau präzipitieren.“ Wells ist in seinen Versuchen davon ausgegangen, die als Kalksalzfänger wirksame Substanz zu finden und hat sie gesucht zunächst in Kalkseifen, die sich aus Fett oder fettähnlichen, degenerativen Abbauprodukten bei nekrotischen Vorgängen bilden sollten, und dann in der in den Nucleinen der Gewebe vorhandenen Phosphorsäure; beidemal mit negativem Erfolg. Auch andere in dieser Richtung gehende Versuche haben kein beweisendes Resultat zutage gefördert. Es würde zu weit gehen, sie hier alle zu besprechen; ich verweise diesbezüglich auf die ausführlichen Referate von Hofmeister und W. H. Schultze. Aus meinen eigenen Versuchen läßt sich nur der Schluß ziehen, daß, wenn eine als Kalksalzfänger wirksame greifbare Substanz im Knorpel und osteoiden Gewebe vorhanden ist, sie auch im pathologisch veränderten rachitischen Material zur Wirkung kommt, wenigstens post mortem und daß für das Zustandekommen der Rachitis das Fehlen einer derartigen Substanz allein nicht maßgebend sein kann, sondern daß hier noch andere Vorgänge in Betracht gezogen werden müssen, wovon später noch die Rede sein wird.

Wells hat seine Versuche auch auf Rippen- und Trachealknorpel ausgedehnt, von dem Gedanken ausgehend, ob den normalerweise nicht ossifizierenden Knorpeln (Rippe, Trachea) die gleiche Tendenz zur Einlagerung von Kalksalzen innewohne, wie den zu Knochengewebe sich umbildenden Epiphysenknorpeln. Dabei stellte sich die interessante Tatsache heraus, daß Rippen- und Trachealknorpel diese Fähigkeit in viel geringerem Maße besitzen, jedoch nehmen sie mehr Calcium auf als Muskeln, Thymus, Milz und Fettgewebe.

Daß Rippenknorpel weniger leicht und rasch verkalken als Epiphysenknorpel, hat sich auch aus meinen Versuchen

ergeben. In zwei Fällen kam sogar ein geringer Calciumverlust zustande, wenn er auch in Versuch V sich in Wirklichkeit weniger hoch beläuft als sich aus der Berechnung ergibt, da der Calciumgehalt der weichen breiigen Masse, welche den Knorpel umgab, ziemlich hoch war (14,2 %) und dies in der Tabelle 14 nicht mitberücksichtigt wurde.

So selbstverständlich die geringere Verkalkungstendenz der Rippenknorpel auf den ersten Blick zu sein scheint, wird uns dadurch das Wesen der für den Verkalkungsprozeß in Betracht kommenden Vorgänge doch nicht näher erklärt. Es ist jedermann bekannt, daß mit zunehmendem Alter auch diese Knorpel der Kalkeinlagerung anheimfallen. Dieser Umstand, sowie die Tatsache, daß auch dem toten Knorpel noch die Fähigkeit bleibt, Calciumsalze aufzunehmen und niederzuschlagen, sprechen sehr gegen eine aktive Beteiligung der Knorpelzellen an dem Verkalkungsvorgang. Man könnte viel eher zu der Annahme gebracht werden, daß die jugendlichen lebensfrischen Zellen, diejenigen des wachsenden Gewebes, mit ihrem intensiven Stoffwechsel der Imprägnation mit Kalksalzen bis zu einem gewissen Grade entgegenarbeiten. Auch die Versuche Pfaundlers legen dar, daß für die Calciumbindung (Calcium-Ionenadsorption) nicht eine Funktion des überlebenden Gewebes als solchem entscheidend sein kann. Allein es geht doch nicht an, jedes aktive mit der Zelle in Zusammenhang stehende Prinzip von vornherein ausschließen zu wollen; denn ohne ein solches, mag man es nun mit bestimmten im Gewebe vor sich gehenden Abbauprozessen degenerativer oder autolytischer Art in Beziehung setzen oder als eine in bestimmter Richtung vor sich gehende physiologische Gewebsmetaplasie[1]) auffassen, läßt sich nicht verstehen, warum einmal zwischen Epiphysem- und Rippenknorpel eine Differenz besteht, und andererseits, warum bei unter gleich günstigen oder gleich ungünstigen äußeren Bedingungen stehenden Kindern das eine Mal eine Rachitis zustande kommt, das andere Mal nicht.

[1]) Allerdings nicht in dem Sinne Pacchionis, der das unmittelbare Zentrum der Verkalkung in die Knorpelzelle selbst verlegt.

Ehe ich auf die für die Theorie der Rachitis in Frage kommenden Konsequenzen aus obigen Versuchen näher eingehe, mögen noch ein paar Worte gesagt sein über das Verhalten der Phosphorsäure. Aus den Tabellen 12 und 13 geht hervor, daß jedesmal, wenn eine Zunahme an Calciumoxyd zu konstatieren war, sich auch eine Zunahme bzw. ein Vorhandensein von Phosphorsäure zeigte und zwar schwankt das Verhältnis von CaO zu P_2O_5 um einen Mittelwert von 1,86, ist also etwas höher als demjenigen in tertiärem Calciumphosphat entspricht; d. h. ein geringer Teil des Calciums liegt nicht als Phosphat, sondern wahrscheinlich als Karbonat und Chlorid vor. Diese der Zusammensetzung normaler Knochenasche sehr nahe kommenden Befunde stimmen mit den Resultaten von Hofmeister und Wells überein; beide Autoren glauben sie nicht durch die Bildung einer neuen Substanz bedingt, sondern führen sie zurück auf den annähernd konstanten Karbonat- und Phosphatgehalt des Blutes und der Gewebsflüssigkeiten. Wells hat durch seine Versuche gezeigt, daß selbst dann, wenn das Calcium in Form einer anderen unlöslichen Verbindung in der Bauchhöhle von Kaninchen deponiert wird, trotzdem nach kürzerer oder längerer Zeit die fremde Säure durch Phosphat und Karbonat ersetzt und das Verhältnis zwischen beiden letzteren Säuren zu einem ganz konstanten gemacht wird. Es wäre nun sehr interessant festzustellen, ob in diesen Fällen das Calcium eine Anlockung auf die Phosphorsäure ausübt, etwa nach Art eines chemotaktischen Reizes; ob das unlösliche Calciumsalz als Ganzes auf irgendeine Weise in Lösung gebracht und resorbiert und dann erst sekundär das Calciumphosphat niedergeschlagen wird, oder ob die ursprüngliche Verbindung gespalten und die Phosphorsäure als Ion zu dem zugehörigen Metall herangebracht wird. Die Möglichkeit der elektiven Ionenadsorption durch Knorpel aus einer Salzlösung hat Pfaundler für das Calcium bewiesen; dagegen haben die Versuche von Wells gezeigt, daß die Phosphorsäure nicht als attraktiver Faktor für die Einlagerung von Kalksalzen in Betracht kommt. Wir stehen hier noch vor einem ungelösten Rätsel.

In welcher Art lassen sich nun die Resultate obiger Versuche für das Rachitisproblem verwenden? Sie wurden unternommen in der Absicht nachzusehen, ob die bei der normalen Ossifikation als Kalksalzfänger wirksame Gewebsmasse sich im rachitischen Knorpel anders verhält als im gesunden, sobald man den Knorpel in die Bauchhöhle von Kaninchen verpflanzt. Das Wesen der Rachitis, das uns ebensogut bekannt ist, als uns ihre Pathogenese noch unklar erscheint, tritt am auffälligsten gerade dadurch in Erscheinung, daß die Ablagerung unlöslicher Kalksalze ausbleibt, die das Festwerden der Knochen bedingt. Ich erwartete daher auch, daß der Knorpel aus einer florid-rachitischen Leiche sich gegen eine Einlagerung von Kalksalzen ablehnend verhalten würde. Um so mehr war ich überrascht, als sich bei der chemischen Analyse die für CaO und P_2O_5 gefundenen Werte sogar höher erwiesen als bei den nicht rachitischen Knorpeln (die Resultate von Versuch V müssen hier wegen der besonderen Verhältnisse ausscheiden).

Es ist bekannt, daß der rachitische Knorpel viel wasserreicher ist als der nicht rachitische. Daher denkt man zunächst natürlich an einen größeren Wasserverlust des rachitischen Knorpels gegenüber dem nicht rachitischen und damit zugleich an eine Eindickung (Konzentrierung) der organischen Substanz mit den schon vorhandenen eingelagerten Salzen. Bis zu einem gewissen Grade ist dies auch sicherlich der Fall, denn die Aschenvermehrung ist in allen vier Fällen sehr deutlich ausgesprochen; in Versuch VII und VIII beträgt sie nahezu das Doppelte gegenüber dem Kontrollversuch. Dennoch glaube ich, darf man die Zunahme des Calciumoxyds nicht allein auf Konto des Wasserverlustes setzen; vergleicht man in den diesbezüglichen Tabellen (8, 9, 10 und 11) die erhaltenen Mengen CaO, die sich auf die Asche beziehen, nicht auf die frische Substanz, so findet man auch hier eine nicht unbeträchtliche Vermehrung; wäre die Calciumoxydzunahme allein bedingt durch den Wasserverlust, so müßte der Prozentgehalt der Asche an CaO für das Experiment und den Kontrollversuch wenigstens annähernd gleich sein; dies ist aber nicht der Fall. Überlegt

man nun weiter, wieso gerade am rachitischen Knorpel die Kalksalzeinlagerung auffälliger zutage tritt als am nicht rachitischen, so erscheint auch dieses nicht mehr befremdlich. Ich habe schon darauf hingewiesen, daß die Fähigkeit des Knorpels, Kalksalze aufzunehmen, offenbar keine unbeschränkte ist. Auch in den Versuchen von Wells enthält der Knorpel nach 14 Wochen eher weniger CaO als nach 12 Wochen (vgl. Tabelle auf S. 518). Der rachitische Knorpel bzw. die Knochen-Knorpelgrenze (Ossifikationszone), auf die es hier doch vor allem ankommt, enthält eben von vornherein viel weniger Kalksalze als der normale eines gleichaltrigen Kindes; daher er auch absolut genommen mehr in sich niederzuschlagen vermochte unter den genannten Versuchsbedingungen. Damit ist natürlich das Ausbleiben der Verkalkung intra vitam bei der Rachitis nicht erklärt und der einzige Schluß, der sich hieraus ziehen läßt, ist der, daß, post mortem wenigstens, wenn man wirklich eine als Kalksalzfänger wirksame Substanz annimmt, dieselbe im rachitischen Knorpel in gleicher Weise vorhanden und wirksam sein muß wie im gesunden Knorpel. Es liegt nun gar kein Grund vor, deswegen das Vorhandensein einer solchen Substanz überhaupt in Abrede zu stellen, sondern es heißt dies lediglich, daß sie als solche zur Pathogenese der Rachitis nicht in ursächlicher Beziehung steht. Daß sie in der Leiche vorhanden ist und unter geeigneten Umständen wirksam werden kann, lehrt das Resultat meiner Versuche; sie muß also auch im lebenden Knorpel schon vorhanden gewesen sein; denn ihre Bildung hier als einen postmortalen Vorgang aufzufassen, fehlt doch jede Berechtigung.

Dagegen wird man direkt zu der Annahme gedrängt, daß die Zellen des osteoiden Gewebes einen nicht unwesentlichen Einfluß auf den Verkalkungsprozeß ausüben. Pfaundler hat diesen Gedanken schon früher ausgesprochen, indem er den Mangel der spezifischen Affinität für die Kalksalzmassen in einer rückständigen Gewebsmetaplasie sucht. Diese denkt er sich als zustande gekommen „durch eine funktionelle Störung im Leben jener Zellen, von denen aus ein aktives Prinzip (etwa

im Sinne eines autolytischen Fermentes tätig) auf die umliegenden Gewebsmassen umgestaltend einwirken soll". Zu einer ähnlichen Ansicht gelangt auch Stöltzner, der die gleiche chemische Zusammensetzung der pathologischen osteoiden Substanz bei der Rachitis und der physiologischen auf Grund ihrer Übereinstimmung in allen färberischen Reaktionen nachgewiesen hat; nur sucht er das die Veränderungen verursachende Prinzip nicht in den Zellen des osteoiden Gewebes selbst, sondern in denjenigen der Nebennierenrinde, in ähnlicher Weise, wie die Thyreoidea für das Myxödem verantwortlich gemacht wird. (Eine neuere französische Arbeit [M. Parhon] berichtet über Herabsetzung des Kalkgehaltes im Knochen nach Verabreichung großer Thyreoidindosen).

Da nun aber der Mangel der Kalksalzeinlagerung bei der Rachitis nicht auf das Ausbleiben einer vorbereitenden Gewebsmetaplasie bezogen werden darf, so bleibt nichts anderes übrig, als die Ursache dafür in den Zellen selbst zu suchen. Allerdings stehen wir hier vor einem neuen Rätsel; denn für eine Veränderung der Zellen fehlt jede anatomische Grundlage. Vielleicht darf man jedoch die Vermutung aussprechen, daß eine Kalkeinlagerung nicht deshalb nicht zustande kommt, weil die Bildung eines besonderen Stoffes, etwa eines Fermentes, ausbleibt; sondern daß die Zellen durch besondere uns vorerst noch unbekannte Umstände eine derartige Beeinflussung ihrer Lebenstätigkeit erfahren, daß sie aktiv hemmend auf die Einlagerung und Präzipitation der Kalksalze einwirken; vielleicht sogar in der Weise, daß die Kalksalze zwar die Gewebe durchdringen, aber in Lösung gehalten werden und nicht zum Ausfallen gelangen.

Die nächste Aufgabe wird nun sein, jenen in besonderer Weise wirksamen Umständen nachzuforschen. Man hat bereits früher versucht (Pommer, Wachsmuth), in einem vermehrten Säuregehalt des Blutes, wobei in erster Linie Milchsäure und Kohlensäure in Betracht kommen, den die Kalksalze in Lösung haltenden Faktor zu suchen; doch hat seither Stöltzner bewiesen, daß die Reaktion des Blutes bei der Rachitis keine

Alkaleszenzabnahme erfährt; auch Experimente, die in der gleichen Richtung arbeiteten, ergaben negative Resultate. Außerdem sind beim Menschen Säurevergiftungen bekannt, die keinen Einfluß auf das Knochensystem haben.

Andere, vor allem Kassowitz, und neuerdings Marfan, haben den Grund in einem irritativen Reiz gesucht, der die Knorpelzellen trifft und sie zu abnormer Wucherung anregt. Sie werden dadurch unfähig, ihre normale Größe zu erreichen und die Kalkalbuminate des Blutes zu spalten und niederzuschlagen. Dem widersprechen jedoch schon die histologischen Bilder, die jedes Zeichen von Entzündung vermissen lassen. Auch die „Wucherung" darf nur sehr bedingt aufgefaßt werden. Sie ist nur scheinbar vorhanden, da der sonst neben der Kalkeinlagerung auch immer rasch vor sich gehende Abbau ausbleibt (Schmorl). Viel eher ließe sich denken, daß ein die Zellen des Knorpels und osteoiden Gewebes normalerweise treffender Reiz bei der Rachitis nicht in genügendem Maße zustande kommt: dadurch kommt es zwar noch zu einem gewissen Wachstum der Knochen, aber in einer bestimmten Entwicklungsphase tritt ein Stillstand ein. Heubner geht sogar so weit, in der Rachitis nur eine „vorübergehende Entwicklungshemmung" zu sehen, deren Ursache im Knochengewebe selbst begründet liegt.

Krasnogorski führt die Verdickung der Verknöcherungszonen bei der Rachitis auf eine Quellung, nicht Wucherung der hyalinen Knorpelgrundsubstanz zurück bedingt durch eine Verminderung der Calciumionen, welche sonst hemmend auf den Quellungsprozeß wirken. Doch läßt sich demgegenüber sagen, daß wir nicht wissen, ob es sich überhaupt um einen Mangel an Calciumionen bei der Rachitis handelt oder ob dem Gewebe nur die Fähigkeit verloren gegangen ist, dieselben als Phosphat niederzuschlagen. Letzteres scheint mir wahrscheinlicher zu sein, da der Kalkgehalt der übrigen Gewebe nicht vermindert ist; sobald aber das Calciumsalz niedergeschlagen ist, kommt seine Wirkung als Ion nicht mehr in Betracht. Den

Annahmen Krasnogorskis wurde übrigens von Pfaundler, sowie auf Grund der Nachprüfung von Salge widersprochen.

Es lag natürlich sehr nahe, einen primären Kalkmangel für das Ausbleiben der Verknöcherung verantwortlich zu machen, sei es als von vornherein ungenügende Kalkzufuhr, sei es durch eine Schädigung des Kalkresorptionsvermögens im Darm oder durch vermehrte Kalkausfuhr. Jedoch alle in dieser Richtung unternommenen Stoffwechselversuche haben nichts Positives zutage gefördert (Cronheim und F. Müller); außerdem fand sich, daß, trotzdem der Kalkgehalt der Knochen bei der Rachitis vermindert ist, derjenige der Weichteile nicht abnimmt. (Vgl. hiezu auch die Kontroverse Aschenheim-Wolff im 5. Band der Zeitschrift für Kinderheilkunde.) Man wird immer wieder darauf hingewiesen, die primäre Ursache der ausbleibenden Verkalkung im osteoiden Gewebe selbst zu suchen und zwar in den Zellen desselben, nicht in der jungen weichen Knochengrundsubstanz.

Neuere sorgfältige Versuche von Schabad, Aron und Dibbelt haben allerdings ergeben, daß die Kalkzufuhr mit der Nahrung nicht so beträchtlich ist, wie man bisher annahm, so daß es unter Umständen wirklich zu einer Kalkunterbilanz kommen kann. Dadurch wird die Kalkmangelhypothese in ein neues Licht gerückt. Trotzdem darf man in ihr allein die Ursache der Rachitis nicht suchen. Es ist bisher nicht gelungen, durch kalkarme Nahrung künstlich Rachitis hervorzurufen. Man hat zwar dadurch Veränderungen am Skelettsystem erzielt, die makroskopisch und klinisch der Rachitis sehr ähnlich sahen, allein das mikroskopische Bild zeigt vorwiegend eine Resorption bereits verkalkten Gewebes neben normaler Verknöcherung des frisch gebildeten osteoiden Gewebes, dagegen kein Ausbleiben der Verkalkung in jungen neugebildeten Knochenbälkchen (Heubner, Stöltzner, Schmorl). Auch die Resultate der Versuche Pfaundlers weisen auf einen Unterschied zwischen echter Rachitis und durch kalkarmes Futter erzeugter Rachitis. Er fand bei der Pseudorachitis eine deutlich gesteigerte Calciumionenadsorption, während rachitische

Knorpel sich in dieser Hinsicht ähnlich den normalen verhielten. Zweifellos wäre es interessant, Knorpelstücke pseudorachitisch gemachter Tiere in die Bauchhöhle von Kaninchen zu verpflanzen und das Verkalkungsresultat zu beobachten. Ist die Kalkablagerung im rachitischen Knorpel gegenüber dem gesunden schon gesteigert, so darf man beim pseudorachitischen wohl eine sehr große Zunahme erwarten, die direkt proportional sein muß der durch die Nahrung erzeugten Kalkarmut.

Es würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten, auch nur einigermaßen genau auf alles, was in dieser Richtung bis jetzt gearbeitet worden ist, einzugehen. So habe ich mich begnügt, nur die wichtigsten und interessantesten der vielen hier in Betracht kommenden Fragen gerade zu berühren, soweit sie zu den oben beschriebenen Experimenten in einiger Beziehung stehen. Leider hat die ganze ungeheure, auf dem Gebiet der Rachitis geleistete Arbeit bis jetzt nur sehr wenig Positives zutage gefördert und es muß noch immer der Zukunft vorbehalten bleiben, den Schleier des Rätsels zu lüften. Auch meine Versuche haben, trotzdem das Resultat ganz anders ausfiel als ich erwartete, die Sache kaum um einen kleinen Schritt vorwärts gebracht.

Fasse ich das Ergebnis derselben noch einmal kurz zusammen, so lautet es folgendermaßen:

1. Es muß eine uns ihrem Wesen nach bis jetzt noch vollständig unbekannte dem Knorpelgewebe eigentümliche Substanz in ihm vorhanden sein, welche es vermag, die Kalksalze der Gewebsflüssigkeiten aufzunehmen und niederzuschlagen.
2. Das niedergeschlagene Calcium ist zum größten Teil an Phosphorsäure gebunden.
3. Es ist diese als „Kalksalzfänger“ wirksame Substanz auch im rachitischen Knorpel vorhanden und vermag post mortem unter geeigneten Bedingungen Kalksalze niederzuschlagen.
4. Daraus folgt, daß jene Substanz im lebenden rachitischen Knorpel irgendwie beeinflußt wird, wodurch ihr die Fähigkeit, Kalksalze niederzuschlagen, verloren geht.

5. Es ist zu vermuten, daß dieser Einfluß mit der Lebenstätigkeit bestimmter Zellen in Zusammenhang steht, wobei allerdings dahingestellt bleiben muß, ob er von Knorpelzellen, Osteoblasten oder Knochenmarkszellen ausgeht oder — durch Hormone vermittelt — von entfernt liegenden Organen.

Herrn Professor Dr. von Pfaundler, der mir die Untersuchungen übertrug, möchte ich für die Überlassung derselben sowie für das ihnen jederzeit entgegengebrachte Interesse meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Literatur-Verzeichnis.

Abderhalden, Lehrbuch der physiologischen Chemie, 2. Aufl., 1909.

Aron, Biochemische Zeitschrift, Bd. XII, 1910.

Askanazy, Beiträge zur Knochenpathologie. Festschrift für Jaffé. Braunschweig 1901. Zitiert nach Hofmeister, Ergebnisse der Physiologie 10, 1910.

Aschenheim-Benjamin, Über Beziehungen der Rachitis zu den hämatopoetischen Organen. Deutsches Archiv für klinische Medizin, Bd. 97, 1909.

Cronheim W. und Müller E., Stoffwechselversuche an gesunden und rachitischen Kindern mit besonderer Berücksichtigung des Mineralstoffwechsels. Biochemische Zeitschrift, Bd. 9, 1908.

Dibbelt, Die Pathogenese der Rachitis. Arbeiten aus dem pathologischen Institut Tübingen, Bd. 6, 1907—1908.

— Die Pathogenese der Rachitis II. Ebenda, Bd. 7, 1909—1911.

Friedleben, Beiträge zur Kenntnis der physikalischen und chemischen Konstitution wachsender und rachitischer Knochen der ersten Kindheit. Jahrbuch für Kinderheilkunde, 1. F., Bd. 3, 1860.

Fürth v., Probleme der physiologischen und pathologischen Chemie, I. Bd. Leipzig 1912.

Hammarsten, Lehrbuch der physiologischen Chemie. 6. Aufl. Wiesbaden 1907.

Heubner, Lehrbuch der Kinderheilkunde, I. Bd. 3. Aufl. Leipzig 1911.

Hoeber, Physikalische Chemie der Zelle und der Gewebe. 3. Aufl. Leipzig 1911.

Hofmeister, Zur Lehre von der Wirkung der Salze. Archiv für experimentelle Pathologie, Bd. 24, 25, 27, 1888—1890.

Hofmeister, Experimentelles über Gewebeverkalkung. Münchener Medizinische Wochenschrift 1909.

— Über Ablagerung und Resorption von Kalksalzen in den Geweben. Ergebnisse der Physiologie, Bd. 10, 1910.

Kassowitz, Normale Ossifikation und die Erkrankungen des Knochensystems bei Rachitis und hereditärer Syphilis. Wien 1881.

Krasnogorski, Über die Wirkung der Calciumionen auf das Wasseradsorptionsvermögen des Knorpelgewebes und ihre Bedeutung in der Pathogenese des rachitischen Prozesses. Jahrbuch für Kinderheikunde, Bd. 70 (3 F. 20), 1909.

Marfan, zitiert nach Feer. Lehrbuch der Kinderheilkunde. Jena 1911.

Mohr, Erkrankungen der Knochen und Gelenke in Noordens Pathologie des Stoffwechsels, 2. Aufl., Bd. 2. Berlin 1907.

Oehme, Über die Beziehung des Knochenmarkes zum neugebildeten kalklosen Knochengewebe bei Rachitis. Zieglers Beiträge, Bd. 44, 1908.

Pacchioni, zitiert nach Pfaundler. Jahrbuch für Kinderheilkunde, Bd. 60, 1904.

Parhon, L'Influence de la Thyreoïde sur le metabolisme du calcium. Compt. rend. Soc. Bibl. Paris, t. 72, 1912.

Pauli, Wiener Medizinische Wochenschrift Nr. 39, 1910.

Pfaundler v., Über die Elemente der Gewebsverkalkung und ihre Beziehung zur Rachitisfrage. Jahrbuch für Kinderheilkunde, Bd. 60 (3 F. 10), 1904.

— Rachitis in Feer. Lehrbuch der Kinderkrankheiten. Jena 1911.

— Über die aktuelle Reaktion des kindlichen Blutes. Archiv für Kinderheilkunde, Bd. 41, 1905.

Salge, Zeitschrift für Kinderheilkunde, IV. Bd., 1912.

Schabad, Zur Bedeutung des Kalkes in der Pathologie der Rachitis I und II. Archiv für Kinderheilkunde, Bd. 52, 1910.

— Zur Bedeutung des Kalkes in der Pathologie der Rachitis. Archiv für Kinderheilkunde, Bd. 53, 1910.

Schmiedeberg, Über die chemische Zusammensetzung des Knorpels. Archiv für experimentelle Pathologie, Bd. 28, 1891.

Schmorl, Die pathologische Anatomie der rachitischen Knochenerkrankung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Histologie und Pathogenese. Ergebnisse der inneren Medizin und Kinderheilkunde, Bd. 4, 1909.

Schultze W. H., Verkalkung. Ergebnisse Lubarsch-Ostertag, Bd. 14, I. Teil, 1910.

Stöltzner, Rachitis in Pfaundler und Schlossmann. Lehrbuch der Kinderheilkunde, Bd. I, 2. Hälfte.

Stölzner und Salge, Beiträge zur Pathologie des Knochenwachstums. Berlin 1901.

Treadwell, Lehrbuch der analytischen Chemie.

Tanaka, zitiert nach Hofmeister, Ergebnisse der Physiologie, Bd. 10, 1910.

Volkmann, Verletzungen und Krankheiten der Bewegungsorgane. Handbuch der Chirurgie. Pitha-Billroth, Bd. 2, 1865.

Wachsmuth, Zur Theorie der Rachitis. Lehrbuch für Kinderheilkunde, Bd. 39, 1895.

Wells, Pathological Calcification. Journ. of Med. Research, Vol. XIV, 1906.

Wells and Benson, Studies on Calcification and Ossification II. Journ. of Med. Research, Vol. XVII, 1907.

Wells and Mitchell, Studies on Calcification and Ossification III. Journ. of Med. Research, Vol. XXII, 1910.

Druckfehler-Berichtigung

zu dem Aufsatze: Über den Taylorschen Lehrsatz für Funktionen einer reellen Veränderlichen von Alfred Pringsheim im Jahrgang 1912 dieser Berichte.

A. a. O., p. 149 Z. 5 und p. 152 Z. 1 muß es heißen:

$$0 < h \leq r \text{ (statt: } 0 \leq h \leq \varrho \text{ bzw. } 0 \leq h \leq \varrho_0).$$

Hierzu sei noch bemerkt, daß p. 149 Z. 3 zweckmäßiger zu sagen wäre:

für *irgend ein positives* $\varrho < R - r$ (statt: für *jedes* $\varrho < R - r$).

Über die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung.

Von **Fritz Noether** in Karlsruhe.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 3. Mai 1913.

§ 1. Einleitung.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit der ebenen Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei parallelen, ebenen, vertikal stehenden Wänden, von denen die eine ruht, während die andere mit konstanter Geschwindigkeit in ihrer eigenen Ebene horizontal bewegt wird. Dies ist die den theoretischen Untersuchungen von H. A. Lorentz[1]) und A. Sommerfeld[2]) zu Grunde gelegte vereinfachte Darstellung der von Couette[3]) verwandten, experimentellen Anordnung, bei der die Flüssigkeit zwischen koaxialen Kreiszylindern strömte, von denen der eine ruhte, während der andere gleichförmig umgedreht wurde. Die Versuche zeigten wieder das Auftreten der von O. Reynolds[4]) bei anderer Anordnung entdeckten „kritischen“ Geschwindigkeit (in diesem Fall für die bewegte Wand), unterhalb deren die theoretisch bekannte, stationäre Laminarströmung tatsächlich eintritt, während sie oberhalb, obwohl theoretisch möglich, im allgemeinen nicht hergestellt werden kann. An ihre Stelle tritt der „turbulente“ Zustand, der vor allem durch

1) Abhandlungen über theoretische Physik, Nr. 3, S. 43.

2) Verhandlungen d. IV. Intern. Math. Kongresses. Rom 1908, S. 116.

3) Annales de chimie et physique, Vol. 21 (1890), S. 433.

4) Phil. Trans. London R. Soc., Vol. 174 (1883), S. 935.

die veränderte Verteilung der mittleren Geschwindigkeit — stärkerer Anstieg in der Nähe der Wände, geringere Veränderlichkeit der Geschwindigkeit in der Mitte — charakterisiert ist.

Seit den Untersuchungen von O. Reynolds[1]) wird diese Abweichung von der theoretisch bekannten Strömungsform als Instabilität der letzteren erklärt, ohne daß es bisher gelungen wäre, auf Grund der hydrodynamischen Gleichungen die tatsächliche Instabilität zu beweisen. Wohl ist es O. Reynolds und H. A. Lorentz gelungen, die Stabilität der Laminarbewegung bis zu einer gewissen Geschwindigkeit hin mittels eines Energiekriteriums nachzuweisen, die natürlich unter der kritischen liegt, also eine untere Grenze für den Eintritt der Labilität zu berechnen. A. Sommerfeld (l. c.) suchte, wie früher in verwandter Weise schon Lord Kelvin[2]), die Stabilitätsgrenze selbst durch Anwendung der Methode der kleinen Schwingungen zu ermitteln, die in diesem Fall, da unendlich viele Eigenschwingungen existieren, die Lösung einer transzendenten Gleichung erfordert. Doch zeigte die weitere Verfolgung dieses Weges durch R. von Mises[3]) und L. Hopf, daß diese sämtlichen Eigenschwingungen, auch bei beliebig großer Geschwindigkeit, stabilen Charakter haben, daß er also nicht zur Auffindung der gesuchten kritischen Geschwindigkeit führen kann.

Inwieweit nun bei diesem Fall von unendlich vielen Freiheitsgraden für die Stabilität des ganzen Systems die Stabilität der einzelnen Eigenschwingungen entscheidend ist, diese von G. Hamel[4]) angeregte Frage soll hier nicht erörtert werden. Sicher ist, daß die Instabilität eines Freiheitsgrades auch für das ganze System Instabilität bedingen würde. Jedenfalls aber wäre es verfrüht, auf die Unzulänglichkeit der allgemein an-

---

[1]) Phil. Trans. London R. Soc., Vol. 174 (1883), S. 935.

[2]) Phil. Mag. (15), August 1887.

[3]) H. Weber-Festschrift. Leipzig 1912, S. 252. S. auch C. W. Oseen, Arkiv för Mathematik 7 (1911), Nr. 15.

[4]) Göttinger Nachrichten, math.-phys. Kl., 1911, S. 261; Monatshefte f. Math. u. Physik 1912, S. 312. Vgl. auch O. Haupt, Sitzungsber. der K. B. Ak. d. Wiss., Mai 1912.

genommenen hydrodynamischen Gleichungen zur Erklärung der Turbulenzerscheinung zu schließen, zumal auch gerade die neuesten experimentellen Untersuchungen von Sorkau[1]) gegen eine solche Vermutung sprechen. Das Resultat von v. Mises legt es vielmehr nahe, anzunehmen, daß die Laminarbewegung zwar tatsächlich für alle Geschwindigkeiten stabil ist, solange nur kleine, störende Kräfte auf sie wirken, daß sie aber oberhalb der kritischen Geschwindigkeit labil wird, wenn die Größe der Störungen eine gewisse Grenze überschreitet. Ähnlich wie eine Kugel, die auf der Spitze eines Berges in einer kleinen Vertiefung liegt, nach der Methode der kleinen Schwingungen sich als stabil herausstellen würde, während recht kleine, aber endliche Anstöße schon genügen, um sie ins Rollen zu bringen. Diese Auffassung wird noch gestützt durch das experimentelle Ergebnis von V. W. Ekman[2]), daß in sorgfältig geglätteten Röhren die Laminarströmung nicht die früher beobachtete scharfe Begrenzung habe, vielmehr die Reynoldssche kritische Zahl noch beträchtlich überschreiten könne, während eine Instabilität im Sinne des Sommerfeldschen Ansatzes zu sofortiger Umwandlung in turbulente Bewegung führen müßte.

Wir versuchen im folgenden dieser Frage näher zu kommen, indem wir von einer gleichfalls laminaren[3]) anfänglichen Geschwindigkeitsverteilung ausgehen, die aber von der Geschwindigkeitsverteilung der stationären Laminarbewegung endlich verschieden ist. Der nun folgende Strömungszustand kann eine nichtstationäre Laminarbewegung sein, vermittels derer die Geschwindigkeitsverteilung sich asymptotisch der der stationären Laminarbewegung nähert. Wird diese nichtstationäre Laminarbewegung stabil sein? Wir beweisen für einen speziellen Fall, indem wir ein einfaches Gesetz für den anfäng-

---

[1]) Phys. Zeitschr. 1912, S. 805; 1913, S. 147. Bemerkungen hierzu von Cl. Schaefer und G. Frankenberg, ebd. 1913, S. 89; G. Mie, ebd. 1913, S. 93. S. auch Th. v. Kármán, ebd. 1911, S. 283.

[2]) Arkiv för Matematik 6, Nr. 12 (1910).

[3]) Unter „Laminarbewegung" verstehen wir allgemein jede Strömung, bei der alle Geschwindigkeiten den Wänden parallel gerichtet sind.

lichen Strömungszustand annehmen, daß sie es für genügend große Wandgeschwindigkeiten nicht mehr ist. Die nichtstationäre Laminarbewegung, die zur stationären zurückführen würde, tritt also dann tatsächlich nicht ein, sondern eine nichtlaminare, turbulente Bewegung. Ihr näherer Charakter bleibt noch unbekannt, aber es ist zu vermuten, daß sie nicht zur stationären Laminarbewegung führt, sondern zu der experimentell bekannten turbulenten Strömungsform. Wir finden so einen tatsächlichen Hinweis auf den instabilen Charakter der stationären Laminarbewegung. Der Eintritt der Instabilität in diesem Sinne bedeutet eine obere Grenze für die „kritische" Geschwindigkeit.

§ 2. Grundgleichungen.

Wir nehmen an, daß nicht nur die zu Grunde gelegten laminaren Bewegungen sondern auch die überlagerten Störungsbewegungen eben und zwar horizontal seien. Die hydrodynamischen Gleichungen für inkompressible Strömung lauten für diesen kräftefreien Fall:

$$\begin{aligned} &\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu D(u)-\frac{\partial p}{\partial x} \\ (1)\qquad &\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\mu D(v)-\frac{\partial p}{\partial y} \\ &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \end{aligned}$$

wobei u, v die Geschwindigkeitskomponenten bzw. nach den Richtungen x und y, p den Druck, ϱ und μ die Flüssigkeitskonstanten Dichte und Viskositätskoeffizient bezeichnen und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=D(f)$$

gesetzt ist.

Wenn wir für eine laminare Strömung die x-Achse parallel zu den Wänden annehmen, wird $v=0$ und für deren Geschwindigkeitskomponente u_1 und den Druck p_1 erhalten wir aus (1):

$$\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial p_1}{\partial x};$$

(2)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0.$$

Aus den ersten beiden dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0,$$

der Druckabfall muß also linear sein. Da wir unsere geradlinige Strömung als eine vereinfachte Darstellung der geschlossenen kreiszylindrischen bei Couette betrachten, so muß somit der Druckabfall $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ überall 0 sein, und es bleibt die Gleichung:

(3) $$\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}.$$

Aus dieser Grundgleichung für die nichtstationäre Laminarbewegung folgt, daß der Ausgleich der Geschwindigkeiten nach der stationären Laminarbewegung hin nach den Gesetzen der Wärmeleitung vor sich geht und als solcher, solange man im Gebiet der laminaren Strömung bleibt, stabil wäre. Dies ist wichtig zu bemerken, weil daraus hervorgeht, daß es sich bei der weiterhin nachgewiesenen Instabilität nicht bloß um eine Veränderung des laminaren Ausgleichs, sondern wirklich um eine Abweichung von der laminaren Strömung handelt.

Wir bezeichnen nun mit U die Geschwindigkeit der bewegten Wand und beziehen aus Zweckmäßigkeitsgründen die Gleichungen auf ein Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit $\frac{U}{2}$ in gleicher Richtung bewegt, der Nullpunkt liege in der Mittelebene des Kanals. Dessen Breite sei h; dann lauten die Randbedingungen für die allgemeine Strömung:

(4)

$$\text{Für } y = +\frac{h}{2} \quad \text{ist: } u = +\frac{U}{2}; \quad v = 0.$$

$$\text{Für } y = -\frac{h}{2} \quad \text{ist: } u = -\frac{U}{2}; \quad v = 0.$$

Führen wir vorerst noch unbenannte Größen in unsere Gleichungen ein, die alle der Natur der Aufgabe nach reell sind:

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{h}; \quad \mathfrak{y} = \frac{y}{h}; \quad \mathfrak{u} = \frac{u}{U}; \quad \mathfrak{v} = \frac{v}{U}; \quad \mathfrak{t} = \frac{tU}{h}; \quad \mathfrak{R} = \frac{\varrho U h}{\mu}.$$

Die letzte ist die „Reynoldssche" Zahl, von deren numerischem Wert nach Reynolds der Turbulenzeintritt abhängt. Dann geht die Gleichung (3) über in

$$\mathfrak{R} \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2} \tag{3'}$$

und die Bedingungen (4) in:

(4′)
$$\text{Für } \mathfrak{y} = +\tfrac{1}{2} \text{ ist: } \mathfrak{u} = +\tfrac{1}{2}; \ \mathfrak{v} = 0.$$
$$\text{Für } \mathfrak{y} = -\tfrac{1}{2} \text{ ist: } \mathfrak{u} = -\tfrac{1}{2}; \ \mathfrak{v} = 0.$$

Die Gleichung (3′) mit den Randbedingungen (4′) kann bei beliebig vorgegebener Anfangsverteilung nach bekannten Methoden gelöst werden, es kommt aber für uns hauptsächlich auf die Feststellung an, daß die zeitliche Veränderlichkeit dieser nichtstationären Laminarströmung um so geringer ist, je größer $\mathfrak{R}$ und je kleiner der anfängliche Wert von $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2}$ ist. Die Stabilität dieser Strömung soll untersucht werden.

Wir eliminieren hierzu aus (1) zunächst den in den Randbedingungen nicht vorkommenden Druck p, wodurch sich ergibt:

$$\varrho \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$
$$= \mu D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und führen hier gleichfalls die oben definierten unbenannten Größen ein. So folgt:

$$\Re\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$(5)\qquad =\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

wobei jetzt $\Delta(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ gesetzt ist.

Die zweite Gleichung (5) läßt sich identisch befriedigen durch Einführung der Stromfunktion $f(x, y)$:

$$(6)\qquad u=\frac{\partial f}{\partial y};\quad v=-\frac{\partial f}{\partial x},$$

und die erste Gleichung (5) ergibt dann:

$$(7)\qquad \Re\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta(f)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Delta(f)}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\Delta(f)}{\partial y}\right]=\Delta\Delta(f).$$

Die Stabilität der „Grundbewegung" u_1 untersuchen wir nach der Methode der kleinen Schwingungen, setzen also:

$$u=u_1+u_2,\qquad v=v_2,\qquad f=f_1+f_2,$$

wo f_1 die zu u_1 gehörige Stromfunktion bezeichnet, und vernachlässigen die in u_2, v_2, f_2 quadratischen Glieder von (7). So ergibt sich:

$$(8)\qquad \frac{\partial\Delta(f_2)}{\partial t}+u_1\frac{\partial\Delta(f_2)}{\partial x}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\,\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{1}{\Re}\Delta\Delta(f_2).$$

Da u_1 die Randbedingungen (4') erfüllt, so müssen auf Grund von (6) für f_2 noch die Bedingungen gefordert werden:

Für $y=\pm\frac{1}{2}$ ist:

$$(9)\qquad -v_2=\frac{\partial f_2}{\partial x}=0;\quad u_2=\frac{\partial f_2}{\partial y}=0.$$

Die Frage ist, ob die hier formulierte Aufgabe für reelle Werte von $\Re$ Lösungen von instabilem Typus zuläßt; in ihr ist die von A. Sommerfeld gestellte als Spezialfall enthalten, indem dort $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$ verschwindet und u_1 selbst von t unabhängig ist.

§ 3. Ansatz zur Stabilitätsuntersuchung.

Es sei beispielsweise die anfängliche Strömungsverteilung gegeben durch

$$(10) \qquad \mathfrak{u}_1^{(0)} = 4\,\mathfrak{y}^3,$$

wodurch den Bedingungen (4′) genügt wird. Diese Verteilung weicht endlich von der der stationären Poiseuilleschen Laminarströmung ab, für die

$$\mathfrak{u}_p = \mathfrak{y}$$

zu setzen wäre. Obwohl die Strömungsverteilung (10) der mittleren hydraulischen Bewegung näher liegt, als die Poiseuillesche Verteilung, so wollen wir doch mit diesem einfachen Gesetz keineswegs eine Annäherung an die in Wirklichkeit viel kompliziertere hydraulische Bewegung suchen. Für unseren Zweck reicht ja die Behandlung eines einfachen Beispiels einer von der Poiseuilleschen Strömung endlich abweichenden Anfangsströmung aus.

Die Abweichung $\mathfrak{u}_1^{(0)} - \mathfrak{u}_p$ können wir durch ihre Fouriersche Entwicklung für das Gebiet $-\frac{1}{2} \leq \mathfrak{y} \leq +\frac{1}{2}$ ersetzen und finden so:

$$(10') \qquad \mathfrak{u}_1^{(0)} = \mathfrak{y} - \sum_1^\infty{}^n \frac{6}{n^3\pi^3} \sin 2\,n\,\pi\,\mathfrak{y}.$$

Für die nichtstationäre Laminarströmung ergibt sich dann aus (3′) und (4′):

$$(11) \qquad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{y} - \sum_1^\infty{}^n \frac{6}{n^3\pi^3} \sin 2\,n\,\pi\,\mathfrak{y}\, e^{-\frac{4\,n^2\pi^2}{\Re}\mathfrak{t}},$$

also

$$(11') \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2} = \sum_1^\infty{}^n \frac{24}{n\,\pi} \sin 2\,n\,\pi\,\mathfrak{y}\, e^{-\frac{4\,n^2\pi^2}{\Re}\mathfrak{t}}.$$

Die Stabilitätsuntersuchung ist erschwert durch die zeitliche Veränderlichkeit dieser beiden Koeffizenten der Gleichung (8), doch läßt sich diese Schwierigkeit durch geeignete quasistationäre Behandlung umgehen. Gleichung (11) zeigt unmittelbar, daß $\mathfrak{u}_1$ um so langsamer zeitlich veränderlich ist, je

größer die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}$ ist. Nach den Experimentalergebnissen von Reynolds und Couette liegt nun die uns interessierende kritische Geschwindigkeit bei sehr hohen Werten von $\mathfrak{R}$ (ca. 2000). Wir können daher zunächst versuchsweise $\mathfrak{u}_1$ als zeitlich unveränderlich in die Rechnung einführen. Diese Vernachlässigung rechtfertigt sich nachträglich durch das Ergebnis, daß von einem gewissen $\mathfrak{R}$ ab kleine Schwingungen von labilem Typus existieren, deren logarithmisches Inkrement mit wachsendem $\mathfrak{R}$ zunimmt.

Beschränken wir uns auf die erste Zeit des Strömungsvorganges, so können wir also in (11) $\mathfrak{t}$ durch den konstanten Wert 0 ersetzen, also $\mathfrak{u}_1$ durch den Anfangswert $\mathfrak{u}_1^{(0)} = 4\,\mathfrak{y}^3$. Ebenso können wir den Koeffizienten $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2}$ durch seinen Grenzwert für $\mathfrak{t} = 0$ ersetzen, der mit

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1^{(0)}}{\partial \mathfrak{y}^2} = 24\,\mathfrak{y}$$

im Gebiet $-\frac{1}{2} < \mathfrak{y} < +\frac{1}{2}$ bis in beliebige Nähe der Grenzen (für das Folgende ist das ausreichend) übereinstimmt. Mit anderen Worten: wir denken uns ein System von sehr kleinen, geeignet verteilten Kräften angebracht, die den Zustand $\mathfrak{u}_1^{(0)}$ entgegen den Reibungskräften aufrecht erhalten würden, wenn andere Störungen ausgeschlossen wären.

Die Gleichung (8) lautet jetzt:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial \Delta(\mathfrak{f}_2)}{\partial \mathfrak{t}} + 4\,\mathfrak{y}^3 \frac{\partial \Delta(\mathfrak{f}_2)}{\partial \mathfrak{x}} - 24\,\mathfrak{y} \frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \Delta \Delta(\mathfrak{f}_2).$$

Indem wir, analog dem Sommerfeldschen Ansatz, in der Stromrichtung fortschreitende Wellen betrachten, setzen wir:

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} \Delta \mathfrak{f}_2 &= e^{i(\beta \mathfrak{t} - \alpha \mathfrak{x})} \varphi(\mathfrak{y}) \\ \mathfrak{f}_2 &= e^{i(\beta \mathfrak{t} - \alpha \mathfrak{x})} \psi(\mathfrak{y}), \end{aligned}$$

worin α eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Eine Partikularlösung von (12) erhält man hieraus, wenn φ und ψ den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{y}^2} - a^2\varphi &= i\Re\left[(\beta - 4\,a\,\mathfrak{y}^3)\,\varphi + 24\,a\,\mathfrak{y}\,\psi\right] \\ \frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2} - a^2\psi &= \varphi. \end{aligned}$$

Die betrachtete Welle gehört dem instabilen Typus an, wenn der imaginäre Teil von β negativ ist, dem stabilen, wenn er positiv ist und bei reellem β handelt es sich um eine mit unveränderter Amplitude fortschreitende Welle. Bei kleinen Werten von $\Re$ gehören sicher alle Wellen zum zweiten Typus, wir fragen daher, ob für genügend große Werte von $\Re$ Wellen durch den dritten Typus hindurch zum ersten gehen, untersuchen also den Grenzfall (β reell). Dann ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in unserem Bezugssystem gleich dem Verhältnis $\frac{\beta}{a}$. Wir wollen nun nur solche Wellen auswählen, die sich in dem Kanal mit der halben Wandgeschwindigkeit bewegen, und die infolgedessen in unserem Bezugssystem, das sich mit der nämlichen Geschwindigkeit bewegt, stationär sind. Für diese ist $\beta = 0$. Die Gleichungen (14) lauten jetzt:

$$(14')\qquad \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{y}^2} - a^2\varphi &= -4\,a\,\Re\,i\,(\mathfrak{y}^3\varphi - 6\,\mathfrak{y}\,\psi) \\ \frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2} - a^2\psi &= \varphi \end{aligned}$$

und die Randbedingungen (9) gehen über in folgende:

$$(9')\qquad \text{Für } \mathfrak{y} = \pm\tfrac{1}{2} \text{ soll } \psi = \frac{d\psi}{d\mathfrak{y}} = 0 \text{ sein.}$$

Gibt es solche Wellen bei reellen Werten von $\Re$?

§ 4. Allgemeine Lösung. Diskussion der Stabilitätsbedingung.

Der Parameter a ermöglicht noch die unendliche Mannigfaltigkeit von Wellen jeder beliebigen Länge, da das Strömungsgebiet in der x-Richtung unendlich ausgedehnt ist. Wir wollen nur im Vergleich zur Kanalbreite lange Wellen betrachten,

näher präzisiert solche mit so kleinem α, daß auf der linken Seite der beiden Gleichungen (14′) $\alpha^2 \varphi$ bzw. $\alpha^2 \psi$ vernachlässigt werden können. Es wird sich nachträglich quantitativ ergeben, in welchem Maß durch diese Forderung α eingeschränkt ist. Die rechte Seite der ersten Gleichung, wo α linear und mit der großen Zahl $4\,\mathfrak{R}$ multipliziert vorkommt, wird natürlich nicht vernachlässigt. Wir setzen die rein imaginäre Größe

$$(15) \qquad -4\,\alpha\,\mathfrak{R}\,i = -R\,i = S,$$

so daß die Differentialgleichungen (14′) jetzt lauten:

$$(16) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{y}^2} &= S(\mathfrak{y}^3\varphi - 6\,\mathfrak{y}\,\psi) \\ \frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2} &= \varphi, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von φ die Differentialgleichung vierter Ordnung für ψ folgt:

$$(16') \qquad \frac{d^4\psi}{d\mathfrak{y}^4} = S\left(\mathfrak{y}^3 \frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2} - 6\,\mathfrak{y}\,\psi\right).$$

Vier partikuläre Integrale dieser Gleichung finden wir in Form von Potenzreihen

$$\psi = \Sigma B_m \mathfrak{y}^m,$$

für deren Koeffizienten sich die Rekursionsformel ergibt:

$$(m+5)(m+4)(m+3)(m+2)\,B_{m+5} = S[m(m-1)-6]\,B_m,$$

d. i.:

$$(17) \qquad B_{m+5} = S\,\frac{m-3}{(m+3)(m+4)(m+5)}\,B_m.$$

So folgen die vier Partikularlösungen:

$$(18) \qquad \psi_0 = B_0\Big(1 + \frac{-3}{3\cdot 4\cdot 5}\,S\mathfrak{y}^5 + \frac{-3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\,S^2\mathfrak{y}^{10} + \frac{-3\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15}\,S^3\mathfrak{y}^{15} + \frac{-3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 18\cdot 19\cdot 20}\,S^4\mathfrak{y}^{20}\ldots\Big)$$

$$\psi_1 = B_1\left(\mathfrak{y} + \frac{-2}{4\cdot 5\cdot 6} - S^6 + \frac{-2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11} S^2\mathfrak{y}^{11}\right.$$
$$+ \frac{-2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15\cdot 16} S^3\mathfrak{y}^{16}$$
$$\left. + \frac{-2\cdot 3\cdot 8\cdot 13}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 19\cdot 20\cdot 21} S^4\mathfrak{y}^{21}\ldots\right)$$
$$\psi_2 = B_2\left(\mathfrak{y}^2 + \frac{-1}{5\cdot 6\cdot 7} S\mathfrak{y}^7 + \frac{-1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12} S^2\mathfrak{y}^{12}\right.$$
$$+ \frac{-1\cdot 4\cdot 9}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17} S^3\mathfrak{y}^{17}$$
$$\left. + \frac{-1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 20\cdot 21\cdot 22} S^4\mathfrak{y}^{22}\ldots\right)$$
$$\psi_3 = B_3\mathfrak{y}^3.$$

Das allgemeine Integral ψ setzt sich aus diesen partikulären mit beliebigen Koeffizienten B_0, B_1, B_2, B_3, additiv zusammen. Da $S = -iR$ eine rein imaginäre Größe ist, so ist jedes dieser partikulären Integrale eine komplexe Funktion der reellen Variabeln $\mathfrak{y}$, und die Randbedingungen (9′) müssen daher durch den reellen und den imaginären Teil von ψ für sich erfüllt werden. Wegen der Symmetrie dieser Randbedingungen zum Punkte $\mathfrak{y} = 0$ suchen wir sie dadurch zu erfüllen, daß wir ψ_r, den reellen Teil von ψ, als gerade, ψ_i, den imaginären Teil, als ungerade Funktion von $\mathfrak{y}$ einführen. Das wird erreicht, wenn B_0, B_2 reell, B_1 und B_3 rein imaginär gewählt werden. Sei also $B_1 = iB_1'$; $B_3 = iB_3'$ und B_1' und B_3' reell.

Die Koeffizienten B sind so zu bestimmen, daß für $\mathfrak{y} = \frac{1}{2}$ die Gleichungen

$$\psi_r = \psi_r' = \psi_i = \psi_i' = 0 \left(\psi' = \frac{d\psi}{d\mathfrak{y}}\right) \tag{19}$$

bestehen; die nämlichen Bedingungen sind damit auch für $\mathfrak{y} = -\frac{1}{2}$ erfüllt. Der Koeffizient B_3' kann leicht eliminiert werden, indem wir die letzten beiden Gleichungen (19) durch ihre Kombination

$$\mathfrak{y}\psi_i' - 3\psi_i = 0$$

ersetzen. Die einzelnen Glieder der so erhaltenen drei Gleichungen lauten:

(20)
$$\psi_{0r} = \left(1 + \frac{3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 18\cdot 19\cdot 20} R^4 \mathfrak{y}^{20} \ldots\right)$$

$$\psi_{1r} = \mathfrak{y}\left(\frac{2}{4\cdot 5\cdot 6} R \mathfrak{y}^5 - \frac{2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15\cdot 16} R^3 \mathfrak{y}^{15} \ldots\right)$$

$$\psi_{2r} = \mathfrak{y}^2\left(1 + \frac{1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 20\cdot 21\cdot 22} R^4 \mathfrak{y}^{20} \ldots\right)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{0r} = \left(\frac{3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 18\cdot 19} R^4 \mathfrak{y}^{20} \ldots\right)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{1r} = \mathfrak{y}\left(\frac{2}{4\cdot 5} R \mathfrak{y}^5 - \frac{2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15} R^3 \mathfrak{y}^{15} \ldots\right)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{2r} = \mathfrak{y}^2\left(2 + \frac{1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 20\cdot 21} R^4 \mathfrak{y}^{20} \ldots\right)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{0i} - 3\psi_{0i} = \left(-\frac{3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} R^3 \mathfrak{y}^{15} + \frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15} R^3 \mathfrak{y}^{15} \ldots\right)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{1i} - 3\psi_{1i} = \mathfrak{y}\left(-2 + \frac{2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{2\cdot 3\cdot 8\cdot 13\cdot 18}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 19\cdot 20\cdot 21} R^4 \mathfrak{y}^{20} \ldots\right)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{2i} - 3\psi_{2i} = \mathfrak{y}^2\left(-\frac{1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7} R \mathfrak{y}^5 + \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17} R^3 \mathfrak{y}^{15} \ldots\right),$$

aus denen sich die drei Bedingungsgleichungen wie folgt zusammensetzen:

$$(19')\qquad \left.\begin{aligned} B_0\psi_{0r} + B_1'\psi_{1r} + B_2\psi_{2r} = 0 \\ B_0\mathfrak{y}\,\psi_{0r}' + B_1'\mathfrak{y}\,\psi_{1r}' + B_2\mathfrak{y}\,\psi_{2r}' = 0 \\ i\,B_0(\mathfrak{y}\,\psi_{0i}' - 3\,\psi_{0i}) + i\,B_1'(\mathfrak{y}\,\psi_{1i}' - 3\,\psi_{1i}) \\ + i\,B_2(\mathfrak{y}\,\psi_{2i}' - 3\,\psi_{2i}) = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{für } \mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}.$$

Die Bedingung des Verschwindens ihrer Determinante ergibt folgende transzentente Gleichung für R, in der $\mathfrak{y}\,(=\frac{1}{2})$ und R nur mehr in der Verbindung

$$(20')\qquad \eta = R\,\mathfrak{y}^5$$

vorkommen:

$$(21)\quad F(\eta) = \begin{vmatrix} \psi_{0r} & \dfrac{\psi_{1r}}{\mathfrak{y}} & \dfrac{\psi_{2r}}{\mathfrak{y}^2} \\ \mathfrak{y}\,\psi_{0r}' & \psi_{1r}' & \dfrac{\psi_{2r}'}{\mathfrak{y}} \\ \mathfrak{y}\,\psi_{0i}' - 3\,\psi_{0i} & \dfrac{\mathfrak{y}\,\psi_{1i}' - 3\,\psi_{1i}}{\mathfrak{y}} & \dfrac{\mathfrak{y}\,\psi_{2i}' - 3\,\psi_{2i}}{\mathfrak{y}^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Reelle Wurzeln dieser Gleichung führen auf ein reelles Wertesystem B und somit auf eine Lösung unserer Aufgabe. Der Nachweis der Existenz einer solchen Wurzel wird ermöglicht durch die starke (absolute) Konvergenz der Reihen (20), die es gestattet, die Reihen mit nicht zu hoher Gliederzahl abzubrechen und das Restglied abzuschätzen (zum Nachweis der ersten Wurzel genügt die Berücksichtigung von elf Gliedern jeder Reihe). Die Gleichung (21) scheint aber doch viel zu kompliziert zu sein, um Schlüsse allgemeiner Natur zuzulassen und man ist daher zur Entscheidung über die Realität ihrer Wurzeln auf die numerische Berechnung angewiesen. Für ihre Durchführung ist es zweckmäßig, die Koeffizienten der einzelnen Entwicklungen (20) auf etwa drei Dezimalen genau zu berechnen, wobei die Koeffizienten der zweiten Zeile von (21) je nur um einen ganzzahligen Faktor von den entsprechenden der ersten verschieden sind. Hierdurch wird die Berechnung der Unter-

determinanten der ersten beiden Zeilen sehr erleichtert. So ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
F(\eta) \equiv & + 4 + 2{,}08 \cdot 10^{-3}\,\eta^2 + 8{,}64 \cdot 10^{-8}\,\eta^4 \\
& + 3{,}70 \cdot 10^{-13}\,\eta^6 + 3{,}71 \cdot 10^{-18}\,\eta^8 - 8{,}5 \cdot 10^{-24}\,\eta^{10} \\
& + 1{,}36 \cdot 10^{-29}\,\eta^{12} - 7{,}00 \cdot 10^{-36}\,\eta^{14} + 3{,}61 \cdot 10^{-42}\,\eta^{16} \\
& - 1{,}93 \cdot 10^{-48}\,\eta^{18} + 5{,}14 \cdot 10^{-55}\,\eta^{20} - 9{,}60 \cdot 10^{-62}\,\eta^{22} \\
& + 5{,}0 \cdot 10^{-69}\,\eta^{24} - \cdots + \cdots = 0.
\end{aligned}
\tag{21'}
$$

Wir haben diese Form $F(\eta)$ für reelle η, also positive η^2, zu untersuchen. Daß die fünf ersten Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben, und die Gleichung (21') also jedenfalls keine kleinen Wurzeln hat, stimmt mit der sicher zu erwartenden Stabilität unserer Strömung für kleine R überein. Die abwechselnden Vorzeichen der höheren Glieder lassen aber das Vorhandensein reeller Wurzeln erwarten. Die numerische Berechnung von $F(\eta)$ für diskontinuierliche Werte von η beweist nun in der Tat die Existenz zunächst einer reellen Wurzel. Wir schreiben abkürzend:

$$\xi = 10^{-5}\,\eta^2, \tag{22}$$

so daß:

$$
\begin{aligned}
F(\xi) \equiv & \; 4 + 208\,\xi + 864\,\xi^2 + 360\,\xi^3 + 371\,\xi^4 - 85\,\xi^5 \\
& + 13{,}6\,\xi^6 - 7 \cdot 10^{-1}\,\xi^7 + 3{,}61 \cdot 10^{-2}\,\xi^8 - 1{,}93 \cdot 10^{-3}\,\xi^9 \\
& + 5{,}14 \cdot 10^{-5}\,\xi^{10} - 9{,}60 \cdot 10^{-7}\,\xi^{11} + 5{,}0 \cdot 10^{-9}\,\xi^{12} - \cdots + \cdots.
\end{aligned}
$$

Während die Form $F(\xi)$ für kleine Werte von ξ positiv ist, hat sie z. B. für $\xi = 25$ den negativen Wert:

$$
\begin{aligned}
F(25) = & \; 25^6 \cdot (1{,}7 \cdot 10^{-8} + 2{,}1 \cdot 10^{-5} + 2{,}2 \cdot 10^{-3} \\
& + 2{,}4 \cdot 10^{-2} + 0{,}6 - 3{,}4 + 13{,}6 - 17{,}5 + 22{,}5 - 30{,}2 \\
& + 20{,}1 - 9{,}4 + 1{,}2 - \cdots + \cdots) \\
= & - 2{,}5 \cdot 25^6.
\end{aligned}
\tag{22'}
$$

Übrigens überzeugt die Ableitung der Gleichung (21') aus (21), daß die Konvergenz der Reihe (21') und ihr durch die abwechselnden Vorzeichen bedingtes oszillatorisches Verhalten

systematisch im Bau der Determinante (21) begründet ist und nicht auf die angeschriebenen Glieder beschränkt bleibt. Daraus folgt, daß das nicht mehr angeschriebene Restglied in seinem absoluten Betrag kleiner als das letzte angeschriebene Glied ist und überdies negatives Vorzeichen hat. Also ist in der Tat $F(25)$ negativ und damit ist die Existenz einer reellen Wurzel von (21), für die $\xi < 25$ ist, bewiesen. Die genauere Berechnung ergibt für diese den Wert

$$\xi_0 = 20{,}9.$$

§ 5. Obere Grenze für die kritische Reynoldssche Zahl.

Aus der im § 4 gefundenen Wurzel ξ_0 ergibt sich zunächst nach (22):

$$\eta_0^2 = 2{,}09 \cdot 10^6,$$

also

$$\eta_0 = \pm 1445.$$

Nach (20′) folgt dann

$$R \mathfrak{y}^5 = \pm 1445,$$

und da die Randbedingungen $\mathfrak{y} = \pm \frac{1}{2}$ fordern, so wird

$$R = 1445 \cdot 2^5.$$

Nach (15) ist endlich:

$$a \mathfrak{R} = \frac{R}{4} = 11560. \tag{23}$$

Wir hatten bisher die Untersuchung auf sehr lange Wellen ($a = 0$) beschränkt und würden somit aus (23) die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \infty$ finden. Eine endliche Grenze für $\mathfrak{R}$ aber finden wir, wenn wir entscheiden, für welche Werte von a unsere Rechnung noch als Näherung gelten kann. Zu dem Zweck gebrauchen wir die aus den Gleichungen (14′) folgenden Entwicklungen von φ.

Die Elimination von φ aus diesen Gleichungen ergibt mit den Abkürzungen (15):

$$\frac{d^4 \psi}{d \mathfrak{y}^4} - 2\,\alpha^2 \frac{d^2 \psi}{d \mathfrak{y}^2} + \alpha^4 \psi = S\left[\mathfrak{y}^3 \frac{d^2 \psi}{d \mathfrak{y}^3} - (\alpha^2 \mathfrak{y}^3 + 6\,\mathfrak{y})\,\psi\right].$$

Vier partikuläre Integrale dieser Gleichung können wieder als Potenzreihen

$$\psi^{(\alpha)} = \Sigma A_m \mathfrak{y}^m$$

angegeben werden. Für ihre Koeffizienten gilt das Rekursionsgesetz:

$$\begin{aligned}(24)\qquad &(m+5)(m+4)(m+3)(m+2)\,A_{m+5}\\ &-2\,\alpha^2(m+3)(m+2)\,A_{m+3} + \alpha^4 A_{m+1}\\ &= S\,[(m-3)(m+2)\,A_m - \alpha^2 A_{m-2}].\end{aligned}$$

Nach dieser Rekursionsformel können wie für $\alpha = 0$ die Koeffizienten der vier Partikularlösungen so gewählt werden, daß deren reeller Teil je eine gerade, der imaginäre eine ungerade Funktion von $\mathfrak{y}$ ist. Denn da S rein imaginär ist, so steht nach (24) jeder Koeffizient zu einem vorangehenden in reellem Verhältnis, wenn die Differenz der Indizes gerade, und in rein imaginärem Verhältnis, wenn die Differenz der Indizes ungerade ist. Es reicht also aus, die vier Randbedingungen (19) für $\mathfrak{y} = +\frac{1}{2}$ zu fordern, womit sie zugleich für $\mathfrak{y} = -\frac{1}{2}$ erfüllt werden. Das Bestehen dieser vier Bedingungen erfordert wie früher das Verschwinden ihrer Determinante, was eine transzendente Gleichung für R ergibt. Deren Koeffizienten sind wie früher reell und weichen bei genügend kleinen Werten von α^2 nur wenig von denen der Gleichung (21′) (wenn man dort (20′) einsetzt) ab. Da wir für deren linke Seite einen Vorzeichenwechsel nachwiesen, so wird auch die neue Gleichung einen Vorzeichenwechsel, somit eine reelle Nullstelle, haben. Also kann unsere Untersuchung mit $\alpha^2 = 0$ wirklich als eine Annäherung auch für den Fall von kleinen, aber endlichen Werten von α^2 gelten.

Die numerische Rechnung zeigt, daß sie für $\alpha^2 = 1$ noch eine Annäherung darstellt. Da diese zwar ohne Schwierigkeit, aber mit großer rechnerischer Mühe verbunden ist, wollen wir hier ihren Gang nur durch eine überschlägliche Schätzung andeuten.

Der Vergleich der Rekursionsformel (24) mit (17) zeigt zunächst, daß hier an Stelle jedes Koeffizienten B_m der dort angeschriebenen Potenzreihen (18) eine nach Potenzen von $\alpha^2 \mathfrak{y}^2$ fortschreitende Entwicklung tritt. Deren Koeffizienten sind beständig abnehmend, und da ferner in dem in Betracht kommenden Gebiet $\mathfrak{y}^2 < \frac{1}{4}$ ist, so reicht es für den Zweck unserer Abschätzung auch für $\alpha^2 = 1$ noch aus, wenn wir uns auf die Glieder mit der Potenz $\alpha^2 \mathfrak{y}^2$ beschränken. Wir setzen also:

$$A_m = B_m + b_m,$$

wobei die B_m Koeffizienten einer der Reihen (18) sein sollen.

Für die b_m erhalten wir so, mit Vertauschung der Indizes und Vernachlässigung aller höheren Potenzen von α^2:

$$(25) \qquad b_{m+2} = \frac{2\alpha^2}{(m+1)(m+2)} B_m$$

$$+ S\left[\frac{m-6}{m(m+1)(m+2)} b_{m-3} - \frac{\alpha^2}{(m-1)m(m+1)(m+2)} B_{m-5}\right].$$

Gehen wir etwa von der Reihe ψ_0 (18) aus, so erhalten wir jetzt die folgende Reihe:

$$\psi_0^{(\alpha)} = B_0 + b_2 \mathfrak{y}^2 + (B_5 + b_7 \mathfrak{y}^2)\mathfrak{y}^5 + (B_{10} + b_{12}\mathfrak{y}^2)\mathfrak{y}^{10} + \cdots.$$

Dabei ergibt sich für $m = 0$ aus (25):

$$b_2 = \alpha^2 B_0$$

und durch Fortsetzung des Rekursionsverfahrens, mit Rücksicht auf die Rekursionsformel (17):

$$(26) \qquad \begin{array}{lll} b_7 = \frac{\alpha^2}{6{,}0} B_5; & b_{47} = \frac{\alpha^2}{12{,}9} B_{45} & b_{122} = \frac{\alpha^2}{26{,}1} B_{120} \\ b_{12} = \frac{\alpha^2}{6{,}0} B_{10}; & & \\ b_{17} = \frac{\alpha^2}{7{,}0} B_{15}; & b_{107} = \frac{\alpha^2}{23{,}7} B_{105} & \\ & b_{112} = \frac{\alpha^2}{24{,}5} B_{110} & \\ \vdots & \vdots & \\ b_{42} = \frac{\alpha^2}{12{,}0} B_{40}; & b_{117} = \frac{\alpha^2}{25{,}3} B_{115}. & \end{array}$$

In entsprechender Weise berechnen sich die Koeffizienten b für die anderen Partikularlösungen $\psi_1^{(\alpha)}$; $\psi_2^{(\alpha)}$; $\psi_3^{(\alpha)}$ und es ergeben sich ähnliche Resultate. Für die Grenzen des Gebiets, $\mathfrak{y} = \pm \frac{1}{2}$, entstehen somit die Reihen $\psi^{(\alpha)}(S)$ aus den entsprechenden Reihen $\psi(S)$ (18), in dem an Stelle jedes Koeffizienten B_m der letzteren der (von S unabhängige) Ausdruck

$$C_m = B_m + \frac{b_{m+2}}{4}$$

tritt, deren Verhältnis zu B_m aus (26) sich ergibt. Wegen der Homogenität der Funktionen $\psi^{(\alpha)}$ in den C_m kommen für die aus den Randbedingungen (19') abzuleitende Gleichung für R nur die Verhältnisse der C_m in Betracht. Deren Unterschied gegen die entsprechenden Verhältnisse der B_m muß hinreichend klein sein, damit die früher gefundene reelle Wurzel der Gleichung (21') als Näherungswert der gesuchten gelten soll.

Aus (22') sieht man nun, daß für die fraglichen Werte von R die ersten vier Glieder der linken Seite von (21') ganz belanglos sind und nur die höheren in Betracht kommen. Für deren Berechnung aus (20) und (21) sind aber in den einzelnen Reihen (20) auch die ersten Glieder ohne wesentlichen Einfluß, und nur die höheren sind maßgebend. An Stelle des Verhältnisses $B_{115} : B_{15}$ z. B. tritt für $\alpha^2 = 1$ das Verhältnis

$$C_{115} : C_{15} = \left(B_{115} + \frac{b_{117}}{4}\right) : \left(B_{15} + \frac{b_{17}}{4}\right)$$

$$= \frac{B_{115}}{B_{15}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4 \cdot 25{,}3}}{1 + \frac{1}{4 \cdot 7}} = \frac{B_{115}}{B_{15}} \cdot \left(1 - \frac{1}{39}\right)$$

und für die übrigen in Betracht kommenden Verhältnisse der C_m ergeben sich noch geringere Abweichungen von den entsprechenden Verhältnissen der B_m. Von höchstens der gleichen Größe wird die Änderung der Verhältnisse der maßgebenden Koeffizienten in der Gleichung (21') werden. Aus (22') ersieht man aber, daß eine Änderung der Koeffizientenverhältnisse in

diesem Maß nicht ausreichen kann, um den negativen Wert $F(25)$ in einen positiven zu verwandeln.

Es existiert somit eine reelle Wurzel, die in der Nähe der im Falle $\alpha^2 = 0$ gefundenen Wurzel der Gleichung (21') liegt. Da also unsere Rechnung noch als Annäherung für den Fall $\alpha^2 = 1$ angesehen werden kann, so finden wir aus (23)

$$\mathfrak{R} = 11560$$

als obere Grenze für die Zahl, die in unserer Aufgabe die Rolle der „kritischen Reynoldsschen Zahl" spielt. Da anzunehmen ist, daß für größere Werte von α^2 (kürzere Wellen) auch noch Labilität möglich ist, sich aber dann aus der der Gleichung (23) entsprechenden Gleichung ein kleineres $\mathfrak{R}$ ergäbe; da wir uns ferner nur mit endlichen Störungen der ganz speziellen Form (10) beschäftigten, so steht dieses Resultat nicht im Widerspruch mit der Beobachtung, die einen kleineren Wert ($\mathfrak{R}_k =$ ca. 2000) für die kritische Reynoldssche Zahl ergibt.

Es ist noch von Interesse, auf die Strömungsform beim Eintritt der Instabilität hinzuweisen. Je größer die Zahl R ist, desto mehr Glieder der Partikularlösungen ψ_i kommen schon in dem Intervall $-\frac{1}{2} < \mathfrak{y} \leqq +\frac{1}{2}$ in Betracht und desto mehr Oszillationen der reellen und imaginären Teile dieser Funktionen fallen, wegen der wechselnden Vorzeichen, in dieses Gebiet. Das gleiche gilt dann für die aus den Partikularlösungen zusammengesetzte Lösung ψ und die daraus nach (6) und (13) abgeleiteten Geschwindigkeitskomponenten. Da für die oben gefundene Grenze R mindestens elf Glieder der reellen und imaginären Teile der Partikularlösungen ψ_i berücksichtigt werden mußten, so folgt:

Beim Eintritt der Instabilität ist die Kanalbreite in eine größere Zahl von Partialwirbeln unterteilt.

Die vorangehende Untersuchung dürfte hinreichend beweisen, daß für die theoretische Behandlung des Turbulenzproblems ganz andere Verhältnisse vorliegen, wenn man die

Nachbarschaft der Poiseuilleschen Strömung verläßt und endlich von ihr abweichende Strömungszustände betrachtet. Die wirkliche Durchführung dieser Aufgabe müßte natürlich einen anderen Weg als den hier verfolgten einschlagen; es handelte sich um die Untersuchung der nichtlinearen hydrodynamischen Randwertaufgabe mit Einschluß ihrer (reellen oder imaginären) Verzweigungslösungen. Hilfsmittel hierzu liegen in der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen[1]) und einigen schon früher bekannten Spezialfällen[2]) dieser Theorie vor.

---

[1]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen III. Math. Ann., Bd. 65 (1908), S. 370.

[2]) Z. B.: H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta mathematica 7 (1885), S. 295.

Ein-, zwei- und dreiwertige Linien des Argons in den Kanalstrahlen.

Von J. Stark und H. Kirschbaum.

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 3. Mai 1913.

§ 1. **Einleitung.** — Helium[1]) bildet in den Kanalstrahlen ein- und zweiwertige positive Atomionen; jede der zwei Ionenarten besitzt ein ihr eigentümliches Spektrum. Es erschien wichtig zu prüfen, ob auch andere Edelgase dieses Verhalten in den Kanalstrahlen zeigen; insbesondere erhob sich die Frage, ob ein Element der Edelgasreihe, das ein größeres Atomgewicht als Helium besitzt, nicht bloß ein und zwei Elektronen sondern vielleicht drei durch Ionisierung zu verlieren vermag und demgemäß ein-, zwei- und dreiwertige Linien besitzt.

Für eine Untersuchung mit solchen Zielen empfahl sich von vornherein Argon. Dieses Element erscheint nämlich deswegen in spektralanalytischer Hinsicht merkwürdig, weil es, wie zuerst W. Crookes[2]) fand, zwei verschiedene Linienspektra besitzt. Bei kleiner Dichte bringt nämlich der Glimmstrom durch Argon in seiner positiven Säule ein Linienspektrum zur Emission, dessen Gesamtfarbe rot ist; bei großer Stromdichte dagegen, wie sie durch Vorschaltung einer kurzen Funkenstrecke vor die Argonröhre und Parallelschaltung einer Kapazität in der dadurch bedingten oszillatorischen Entladung

---

[1]) J. Stark, A. Fischer und H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 40, 499, 1913.

[2]) W. Crookes, Zeitschr. f. phys. Chem. 16, 369, 1895.

erhalten wird, erscheint in der positiven Säule ein anderes Linienspektrum, dessen Gesamtfarbe blau ist. Es lassen sich die Versuchsbedingungen ziemlich leicht so wählen, daß im roten Spektrum selbst die stärksten Linien des blauen Spektrums nur eben angedeutet sind und daß umgekehrt selbst die stärksten Linien des roten Spektrums im blauen kaum merkbar werden.

Die Darstellung des Argons nahmen wir nach dem einfachen Verfahren vor, das der eine von uns an anderer Stelle[1]) beschrieben hat. Wir untersuchten die Kanalstrahlenbilder der Argonlinien erstens für den Fall, daß Argonstrahlen in Argon verliefen, zweitens für den Fall, daß sie überwiegend in Helium verliefen. Das erste erreichten wir, indem wir zur Füllung der Kanalstrahlenröhre reines Argon verwandten, das zweite, indem wir Helium[2]) in der Röhre eine relativ sehr kleine Menge Argon beimischten. Die Untersuchung der Ar-Strahlen in He hatte den Zweck, klar gezeichnete Kanalstrahlenbilder der Argonlinien zu liefern, da sie, wie wir an anderer Stelle[3]) darlegten, unter diesen Bedingungen nur wenig durch die Zerstreuung der Kanalstrahlen verwischt werden.

Die Einrichtung und der Betrieb der Kanalstrahlenröhre waren dieselben, wie wir sie in unserer Untersuchung über das Helium ausführlich beschrieben haben. Auch verwandten wir denselben Spektrographen wie früher; es war lediglich das als Kameraobjektiv verwendete Zeiß-Tessar von 21 cm Brennweite durch ein Tessar von 30 cm Brennweite und gleichem Öffnungsverhältnis ersetzt.

Bei der vorliegenden Untersuchung kam es uns natürlich nicht auf eine genaue Bestimmung der Wellenlänge der Argonlinien, sondern nur auf die Untersuchung ihrer Kanalstrahlen-

---

1) J. Stark, Phys. Zeitschr. 14, 497, 1903.

2) Das von uns verwandte Helium hatte in dankenswerter Weise Herr Dr. A. Fischer (Aachen) nach dem an anderem Orte beschriebenen Verfahren (J. Stark, A. Fischer und H. Kirschbaum, a. a. O., S. 514) dargestellt.

3) J. Stark und H. Kirschbaum, Phys. Zeitschr. 14, 433, 1913.

bilder an. Wir benützten aus diesem Grunde im folgenden die von J. M. Eder und E. Valenta[1]) angegebenen Wellenlängen. Nur in folgenden wichtigen Punkten mußten wir in dem von uns genauer untersuchten Bezirk ihre Angaben verbessern. Diese Autoren verzeichnen bei λ 4266 Å nur eine einzige Wellenlänge (λ 4266,44 Å) und führen sie sowohl im roten wie im blauen Spektrum. Nach unseren Aufnahmen liegen hier zwei Linien, die eine λ 4266,65 Å gehört zum blauen, die andere λ 4266,40 Å zum roten Spektrum. Ferner erscheint in unserem blauen Spektrum bei λ 4182,50 Å eine Linie, im roten Spektrum bei λ 4182,03 Å, während Eder und Valenta bei λ 4182,03 Å nur eine rote Linie verzeichnen. Während wir auf Grund unserer Kanalstrahlen-Spektrogramme als erwiesen betrachten dürfen, daß bei λ 4266 Å eine „rote" und eine „blaue" Linie dicht beisammen liegen, ist es möglich, daß die von uns bei λ 4182,50 Å beobachtete Linie nicht dem Spektrum des Argons angehört.

Wie es uns auf eine Neubestimmung von Wellenlängen außer in vorstehenden Punkten nicht ankam, so haben wir auch darauf verzichtet, alle auf unseren Spektrogrammen auftretenden Linien, deren Kanalstrahlenbild bewegte Intensität aufweist, hier zu verzeichnen. Es sind dies ungefähr 140 Linien. Wir haben uns vielmehr auf eine sorgfältige Auswahl von solchen Linien beschränkt, über deren Kanalstrahlenbilder wir zuverlässige Aussagen machen können. Für die Photometrierung schieden darum alle oberhalb λ 4310 Å liegenden Linien aus, da in diesem spektralen Gebiet die Dispersion unseres Spektrographen für Argon nicht ausreichend ist. Auch sei bemerkt, daß alle hier mitgeteilten Linienbilder von denselben zwei Spektrogrammen abgenommen sind, nämlich für

[1]) J. M. Eder und E. Valenta, Denkschr. Wien. Akad. 64, 1896; Beiträge z. Photochemie, Wien 1904, I, 220. Die Angaben von H. Kayser (Berl. Ber. 1896, 551) verdienen nicht das gleiche Vertrauen, da dieser Autor, wie Rydberg (Astrophys. Journ. 6, 338, 1897) gezeigt hat, Geister und Quecksilberlinien in sein Verzeichnis von Argonlinien aufgenommen hat.

die Ar-Strahlen in Ar vom Spektrogramm 246 (Expositionszeit 2,5 Stunden) und für die Ar-Strahlen in He vom Spektrogramm 248 (Expositionszeit 4,75 Stunden).

Endlich ist hier noch darauf hinzuweisen, daß E. Dorn[1]) bereits nachstehende, vorläufige Mitteilung über die bewegte Intensität von Argonlinien (Dopplereffekt in Kanalstralen) veröffentlichte. „Bei Argon fand ich den Dopplereffekt für etwa 20 Linien sicher, für 10 weitere als wahrscheinlich. Merkwürdig ist, daß keine dieser Linien im „roten“ Argonspektrum eine erhebliche Lichtstärke besitzt, z. B. zeigt 4266,4 den Dopplereffekt nicht, obwohl die Intensität auch im „blauen“ Spektrum ziemlich bedeutend ist.“

§ 2. **Die einwertigen Linien des Argons.** — In Fig. 1 und Fig. 2 sind die Kanalstrahlenbilder zweier Vertreter der „roten“ Argonlinien dargestellt, nämlich der Linien λ 4259,50 Å und λ 4158,65 Å. Fassen wir zunächst die Linienbilder der Ar-Kanalstrahlen in He ins Auge, die nicht durch die Zerstreuung gestört sind. Es fällt an ihnen auf, daß die ruhenden Intensitäten im Verhältnis zu den bewegten Intensitäten sehr groß sind. Die bewegte Intensität zeigt bei beiden Linien in einem ersten Geschwindigkeitsintervall ein deutliches Maximum, dagegen ist sie in einem zweiten Intervall so gering, daß man an dessen Vorhandensein zweifeln könnte.

Diese Züge der zwei Kanalstrahlenbilder erklären sich zwanglos durch die Annahme, daß die Träger der zwei „roten“ Linien positiv einwertige Atomionen sind. Die bewegte Intensität im ersten Intervall ist solchen Argonionen zuzuordnen, welche einwertig den Kathodenfall durchlaufen und auch hinter der Kathode die „roten“ Linien in einwertigem Zustand emittiert haben. Die geringe bewegte Intensität im zweiten Intervall wurde von solchen Atomionen emittiert, welche zweiwertig den Kathodenfall durchlaufen und darum eine zweiwertige Geschwindigkeit angenommen haben, dann aber hinter der Kathode durch Elektronisierung einwertig wurden und wenigstens zu

[1]) E. Dorn, Phys. Zeitschr. 8, 589, 1907.

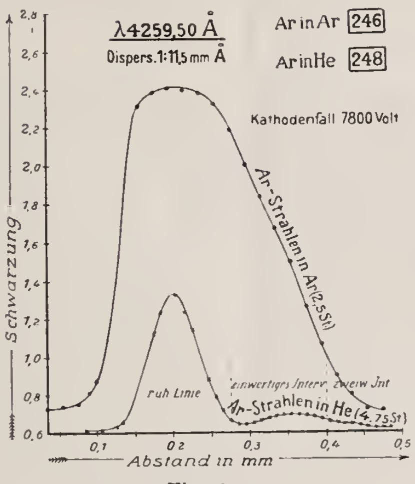

λ4259,50 Å
Dispers. 1:11,5 mm Å
Ar in Ar 246
Ar in He 248
Kathodenfall 7800 Volt
Ar-Strahlen in Ar (2,5 St)
einwertiges Interv.
zweiw Int
ruh Linie
Ar-Strahlen in He (4,75 St)
Schwärzung
Abstand in mm

Fig. 1.

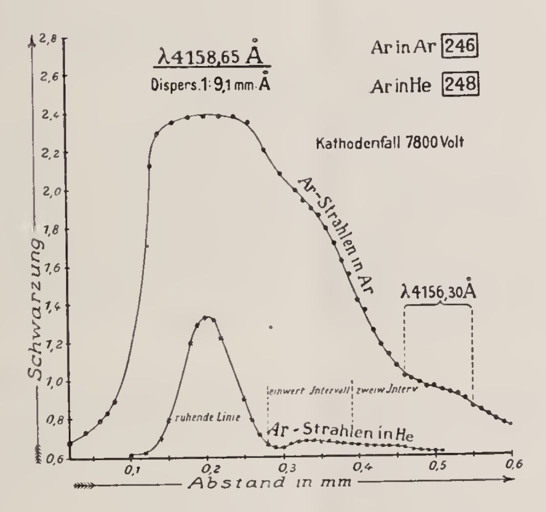

λ4158,65 Å
Dispers. 1: 9,1 mm Å
Ar in Ar 246
Ar in He 248
Kathodenfall 7800 Volt
Ar-Strahlen in Ar
λ4156,30 Å
einwert Intervall
zweiw Interv
ruhende Linie
Ar-Strahlen in He
Schwärzung
Abstand in mm

Fig. 2.

einem kleinen Teil in diesem Ladungszustand verblieben, als sie bei einem schwachen Zusammenstoß mit einem He-Atom einwertige Linien emittierten.

Die bewegte Intensität ist im ersten Intervall und aus demselben Grunde noch mehr in dem zweiten Intervall deswegen so klein, weil die meisten aus dem Kathodenfall kommenden, ursprünglich einwertigen Ionen hinter der Kathode durch Stoßionisierung in zweiwertige Ionen übergehen und dann als solche nicht mehr einwertige Linien emittieren können und weil die ursprünglich zweiwertigen Ionen, welche durch Elektronisierung einwertig geworden sind, bei einem Zusammenstoß zum größten Teil wieder zweiwertig durch Stoßionisierung werden, da infolge der größeren Geschwindigkeit die Chance für die Stoßionisierung größer ist. Aus dem gleichen Grunde könnte eine einwertige Linie im dreiwertigen Geschwindigkeitsintervall keine merkbare Intensität gewinnen, da die ursprünglich dreiwertigen Ionen, die durch zweifache Elektronisierung einwertig geworden sind, bei einem Zusammenstoß dank ihrer großen Geschwindigkeit sofort wieder zweiwertig oder sogar dreiwertig durch Ionisierung werden.

Die ruhende Intensität der einwertigen Argonlinien zeigt unter den gewählten Versuchsbedingungen deswegen einen relativ großen Betrag, weil die zahlreichen langsamen He-Strahlen, welche im Helium den Ar-Strahlen beigemischt sind, überwiegend einwertige Ar-Ionen durch Stoßionisierung schaffen, wenn sie auf die neutralen in geringer Zahl dem He beigemischten Ar-Atome stoßen.

Nunmehr können wir zu dem Vergleich der Bilder der zwei betrachteten einwertigen Linien für die Ar-Strahlen in Ar und die Ar-Strahlen in He übergehen. Man bemerkt zunächst, daß die bewegte Intensität der Ar-Strahlen, wenn sie in Ar verlaufen, nicht für so große Geschwindigkeiten vorkommt, als wenn sie in He verlaufen; ferner ist in jenem Falle das Maximum der bewegten Intensität so dicht an die ruhenden Linien herangerückt, daß das Intensitätsminimum zwischen ihnen verschwunden ist, während es im Falle der Ar-Strahlen in He

deutlich ausgebildet ist. Doch bringen diese zwei Züge in den Kanalstrahlenbildern nichts Neues; sie erklären sich aus der Zerstreuung der Kanalstrahlen, wie wir an anderer Stelle[1]) ausführlich dargelegt haben.

Indes ein anderer Zug ist neu; er wird zwar an anderer Stelle von dem einen von uns (Stark) ausführlich besprochen werden, doch muß der Vollständigkeit halber bereits hier kurz darauf hingewiesen werden. Beim Vergleich des Bildes der Ar-Strahlen in Ar mit demjenigen dieser Strahlen in He fällt nämlich auf, daß die bewegte Intensität in jenem Falle zwar bei kleineren Geschwindigkeiten auftritt, aber verglichen mit der ruhenden Intensität sehr viel größer ist als in diesem Falle. Und beim Vergleich einer einwertigen mit einer zweiwertigen Linie, etwa von Fig. 1 mit Fig. 3 und 4, ergibt sich, daß die Ar-Strahlen in Ar einer einwertigen Linie fast ebensoviel bewegte Intensität wie einer zweiwertigen Linie verleihen, während die Ar-Strahlen in He weitaus die zweiwertigen Linien in der Erregung bewegter Intensität bevorzugen. Dieses Verhältnis erklärt sich in folgender Weise. Beim Verlauf in Ar werden Ar-Strahlen durch die Zusammenstöße mit den relativ schweren Ar-Atomen stark gebremst, sowohl die Strahlen mit drei- und zweiwertiger wie diejenigen mit einwertiger Geschwindigkeit. Die verlangsamten zwei- und dreiwertigen Strahlen gehen durch Elektronisierung in großer Zahl in einwertige Ionen über und können dann in diesem Zustand in einwertigen Linien bewegte Intensität emittieren, da sie bei Zusammenstößen dank der Kleinheit ihrer Geschwindigkeit nicht wieder durch Ionisierung zum größten Teil zweiwertig werden.

Wir haben hier zwar nur für zwei Linien des roten Spektrums die Kanalstrahlenbilder mitgeteilt. Trotzdem aber oberhalb λ 4310 Å für die zwei- und dreiwertigen Ar-Linien die Dispersion unseres Spektrographen für eine genaue Analyse nicht ausreichend war, können wir für alle im Gebiet λ 4000 bis 5000 Å liegenden intensiven Linien des roten Ar-Spektrums

---

[1]) J. Stark und H. Kirschbaum, Phys. Zeitschr. 14, 433, 1913.

mit Bestimmtheit erklären, daß sie hinsichtlich des Verhältnisses von ruhender und bewegter Intensität für die Ar-Strahlen in Ar und in He dasselbe Verhalten zeigen und sich in dieser Hinsicht so deutlich von den „blauen“ Linien abheben, daß über ihre Zusammengehörigkeit kein Zweifel bestehen kann. Es erscheint somit die Folgerung gesichert, daß alle Linien des roten Ar-Spektrums positiv einwertige Atomionen als Träger haben.

§ 3. **Zwei- und dreiwertige Linien des Argons.** — Ehe wir zur Zuordnung der „blauen“ Argonlinien zu Atomionen von bestimmter Wertigkeit übergehen, sei kurz auch bei ihnen auf die Beeinflussung der Verteilungskurve der bewegten Intensität durch die Zerstreuung der Kanalstrahlen hingewiesen. Der Vergleich der zwei Kurven in Fig. 3 und 4 läßt diese Beeinflussung in die Augen springen und der Vergleich der Kurven für Ar-Strahlen in Ar in diesen Figuren mit den gleichnamigen Kurven in den Figuren 1 und 2 läßt erkennen, daß eine unterscheidende Charakteristik der „roten“ und „blauen“ Argonlinien in den Kanalstrahlen in Argon ein ziemlich unsicheres Unternehmen wäre. Hiefür kommen vielmehr nur die Verteilungskurven der bewegten Intensität für die Ar-Strahlen in He in Betracht; auf sie allein bezieht sich die nachstehende Besprechung.

Die fünf Linien, deren Kanalstrahlenbilder in den Figuren 3—7 dargestellt sind, gehören sämtlich dem „blauen“ Ar-Spektrum an. Sie stimmen in den wesentlichen Zügen alle miteinander überein. Ihre ruhende Intensität ist im Vergleich mit ihrer bewegten Intensität sehr klein, diese ist von jener deutlich durch ein Minimum getrennt. Die Verteilungskurve der bewegten Intensität zeigt bei allen vier Linien, wenn auch nicht gleich gut ausgebildet, zwei Wendepunkte, durch sie werden drei Intervalle der Geschwindigkeit unterschieden.

Ein Vergleich der Bilder dieser fünf „blauen“ Linien mit denjenigen der zwei „roten“ Linien in den Figuren 1 und 2 kann keinen Zweifel daran übrig lassen, daß die blauen Linien positive Atomionen von anderer Wertigkeit als die roten zu Trägern haben. Würden die Verteilungskurven der „blauen“

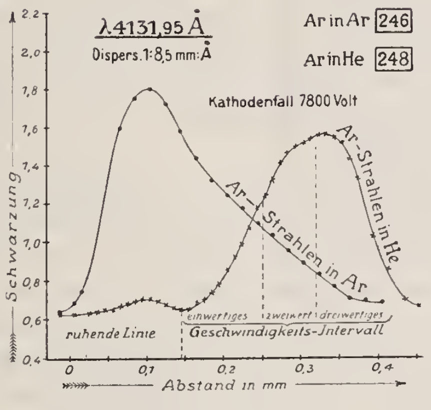

λ4131,95 Å
Dispers. 1: 8,5 mm: Å
Ar in Ar 246
Ar in He 248
Kathodenfall 7800 Volt
Ar-Strahlen in He
Ar-Strahlen in Ar
Schwärzung
ruhende Linie
einwertiges
zweiwert.
dreiwertiges
Geschwindigkeits-Intervall
Abstand in mm

Fig. 3.

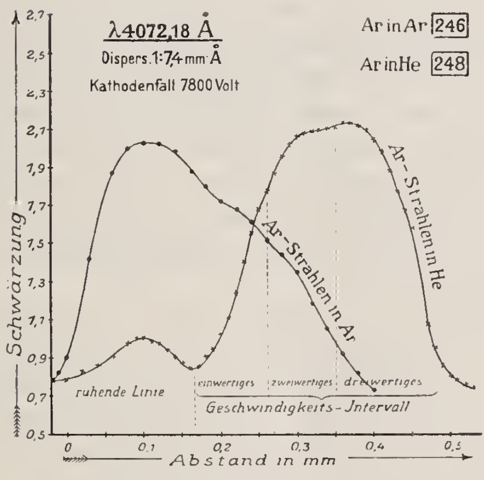

λ4072,18 Å
Dispers. 1: 7,4 mm Å
Kathodenfall 7800 Volt
Ar in Ar 246
Ar in He 248
Ar-Strahlen in He
Ar-Strahlen in Ar
Schwärzung
ruhende Linie
einwertiges
zweiwertiges
dreiwertiges
Geschwindigkeits-Intervall
Abstand in mm

Fig. 4.

Linien nur die zwei ersten Geschwindigkeitsintervalle aufweisen, wie es bei Helium der Fall ist, so wäre ohne weitere Diskussion nach Analogie zu schließen, daß das Argon in den Kanalstrahlen nur ein- und zweiwertige positive Atomionen bildet und daß diese die blauen, jene die roten Ar-Linien zur Emission an sich bringen. So aber ist das Auftreten eines dritten Geschwindigkeitsintervalles neu und verlangt eine eingehende Besprechung.

Zunächst läßt sich aus dem Vorkommen von drei Geschwindigkeitsintervallen bei den fünf Ar-Linien schließen, daß Argon vor der Kathode des Glimmstromes ein-, zwei- und dreiwertige positive Atomionen bildet und daß somit durch das elektrische Feld vor der Kathode positive Ar-Ionen in drei Ladungsstufen beschleunigt und somit in drei Geschwindigkeitsintervallen hinter die Kathode geliefert werden. Ist dies der Fall, dann dürfen wir erwarten, daß außer zwei- auch noch dreiwertige Ar-Linien hinter der Kathode bewegt zur Emission gebracht werden. Es müssen sich also dann auf den Kanalstrahlen-Spektrogrammen neben den einwertigen Ar-Linien zwei weitere Gruppen von Ar-Linien feststellen lassen, deren Bilder in ähnlicher Weise von denjenigen der roten Linien verschieden sind, die aber auch wieder charakteristische Unterschiede voneinander aufweisen. Aber die sichere Prüfung dieser Folgerung kann ein Zufall unmöglich machen. Es könnte nämlich die vermutete dritte Gruppe von Linien zufällig in dem Leistungsbereich des verwendeten Spektrographen durch keine intensive Linie vertreten sein.

Der Zufall hat es gefügt, daß in dem Leistungsbereich wenigstens eine intensive Linie vorkommt, deren Kanalstrahlenbild die für eine dreiwertige Ar-Linie zu erwartenden Züge zeigt. Es ist die Linie λ 4104,10 Å. Die Verteilungskurve ihrer bewegten Intensität ist in Fig. 8 dargestellt. Auf den ersten Blick freilich scheint sie durchaus mit derjenigen der zweiwertigen Linien übereinzustimmen. Indes hat man zu beachten, daß die Schwärzungen in Fig. 8 noch im Gebiet der Unterbelichtung oder dicht dabei liegen. Und hier entsprechen

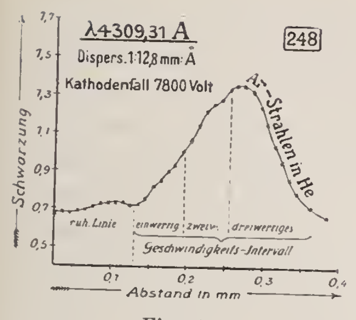


Fig. 5.

Fig. 6.

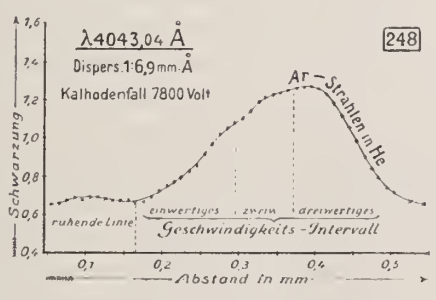


Fig. 7.

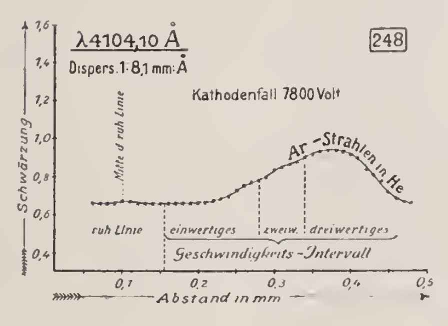


Fig. 8.

kleinen Schwärzungsdifferenzen sehr viel größere Intensitätsverhältnisse als im Gebiete der Normalbelichtung, wie sie für die Verteilungskurven in den Figuren 3, 4, 5 und 7 vorliegt. Beachtet man dies, so ergibt sich für die Linie λ 4104,10 Å, daß bei ihr die bewegte Intensität im dritten Intervall diejenige im zweiten Intervall beträchtlich überwiegt, während sie bei den Linien der Figuren 3, 4, 5 und 7 im dritten Intervall nur wenig größer als im zweiten ist. Und noch viel größer ist für λ 4104,10 Å das Verhältnis der bewegten Intensitäten im dritten und im ersten Intervall als für jene Linien. Daß dieser auf die Schwärzungsdifferenzen bezogene Vergleich der Intensitätsverhältnisse für die zwei Linienarten in der Tat zutreffend ist, zeigt der Vergleich des Bildes der Linie λ 4104,10 Å mit demjenigen der Linie λ 4283,03 Å in Fig. 6. Diese Linie gehört nämlich zu der Gruppe der anderen Linien; nur liegen bei ihr wie bei λ 4104,10 Å die Schwärzungen ebenfalls im Gebiet der Unterbelichtung oder an dessen Grenze.

Die vorstehenden Unterschiede der Kanalstrahlenbilder der Linien λ 4309 — 4283 — 4131 — 4072 — 4043 Å einerseits und der Linie λ 4104 Å andererseits erklärt sich zwanglos in folgender Weise. Jene Linien haben das zweiwertige Atomion als Träger, die Linie λ 4104 Å dagegen das positiv dreiwertige Ar-Atomion. Zwischen den ein-, zwei- und dreiwertigen Atomionen des Argons stellt sich in den Kanalstrahlen ein Gleichgewicht her, wie es für den Fall der Aluminium-Kanalstrahlen[1]) bereits ausführlich besprochen worden ist. Es gehen nämlich einerseits ursprünglich ein- und zweiwertige Atomionen durch Stoßionisierung in dreiwertige Ionen über und liefern im ein- und zweiwertigen Geschwindigkeitsintervall bewegte Intensität; andererseits verwandeln sich ursprünglich dreiwertige Atomionen durch Elektonisierung in zweiwertige, ebenso ursprünglich einwertige durch Ionisierung in zweiwertige, so daß eine zweiwertige Linie auch im ersten und dritten Geschwindigkeitsintervall bewegte Intensität gewinnen kann. Die bewegte

[1]) J. Stark, R. Künzer und G. Wendt, Ber. Berl. Akad. 1913. 430.

Intensität im ersten Intervall ist für die zweiwertigen Linien im Verhältnis zu derjenigen im dritten Intervall deswegen größer als für die dreiwertige Linie, weil die Chance dafür größer ist, daß ein ursprünglich einwertiges Ion durch Ionisierung zweiwertig wird, als dafür, daß es dreiwertig wird. Die bewegte Intensität im dreiwertigen Intervall ist bei der dreiwertigen Linie im Verhältnis zu derjenigen im zweiwertigen Intervall deswegen größer als bei einer zweiwertigen Linie, weil die ursprünglich dreiwertigen Ionen, die durch Elektronisierung zweiwertig geworden sind, dank ihrer großen Geschwindigkeit bei einem Stoß leichter wieder in dreiwertige sich verwandeln als ursprünglich zweiwertige Ionen von der kleineren zweiwertigen Geschwindigkeit.

Zu diesem eben zergliederten Unterschied zwischen den Kanalstrahlenbildern der zwei- und dreiwertigen Argonlinien tritt noch ein anderer Unterschied, der es ermöglicht, noch weitere, weniger intensive dreiwertige Linien außer λ 4104,10 Å auf unseren Spektrogrammen aufzusuchen. Beim Vergleich des von der positiven Säule gewonnenen blauen Spektrums mit dem Spektrum der Ar-Kanalstrahlen in He ergibt sich folgendes. Die dreiwertige Linie λ 4104,10 Å zeigt im Spektrum der positiven Säule eine sehr große ruhende Intensität, dagegen gar keine ruhende Intensität im Kanalstrahlenspektrum; im Vergleich hiermit zeigen zweiwertige Linien, die im Säulespektrum weniger intensiv sind als λ 4104 Å, im Kanalstrahlenspektrum eine schwache ruhende Intensität. Die bewegte Intensität von λ 4104 Å ist viel kleiner als diejenige von zweiwertigen Linien, welche im Säulespektrum ungefähr dieselbe oder sogar eine etwas kleinere ruhende Intensität als λ 4104 Å aufweisen. Beim Durchsuchen unserer Spektrogramme haben wir nun eine Reihe weiterer dreiwertiger Linien in dem Gebiet λ 4300 — 4000 Å an diesem Intensitäts-Verhalten erkannt. Sie besitzen im Kanalstrahlenspektrum alle keine merkbare ruhende Intensität und keine oder nur eine eben angedeutete bewegte Intensität. In Tabelle I sind zweiwertige, in Tabelle II dreiwertige Linien aus dem bezeichneten spektralen Gebiet zusammengestellt nebst rohen Intensitätsangaben.

Tabelle I.
Zweiwertige Linien.

Wellenlänge Å	Intensität		
	Säulespektrum	Kanalstrahlen	
		ruh.	bew.
4309.31	5	1	6
4300,82	4	1	6
4283,03	6	1	4
4277,65	10	4	10
4266,65	9	2	8
4237,34	4	1	5
4228,57	7	2	9
4202,11	2	0	2
4131,95	6	1	8
4072,18	10	3	10
4043,04	5	1	8

Tabelle II.
Dreiwertige Linien.

Wellenlänge Å	Intensität		
	Säulespektrum	Kanalstrahlen	
		ruh.	bew.
4222,76	4	0	1
4218,79	4	0	1
4156,30	3	0	0
4104,10	9	0	4
4076,85	3	0	0

Die Intensitätsverhältnisse der drei Linienarten des Argons im Falle der Ar-Kanalstrahlen in He lassen sich ungezwungen in folgender Weise deuten. Die ruhende Intensität der Ar-Linien wird unter den von uns gewählten Bedingungen hauptsächlich von den an Anzahl überwiegenden, relativ langsamen He-Kanalstrahlen hervorgebracht. Diese schaffen durch ihren Stoß auf neutrale Ar-Atome überwiegend einwertige Ar-Ionen, in geringerer Zahl zweiwertige und darum in noch geringerer Zahl dreiwertige Ar-Ionen; parallel dem Maß dieser Ionisierung geht die Erregung der ruhenden Intensität. Auf der anderen Seite sind, was die bewegte Intensiät der Ar-Strahlen selbst betrifft, die zweiwertigen Ar-Ionen und ihrer Linien vor den ein- und dreiwertigen Ionen sehr bevorzugt. Die ursprünglich und nachträglich einwertigen Ionen gehen nämlich bei einem Stoß, der an ihnen Licht erregen könnte, leicht in zweiwertige Ionen über; die ursprünglich dreiwertigen Ionen dagegen verwandeln sich durch Elektronisierung zu einem sehr großen Teil in zweiwertige Ionen und geben dann den zweiwertigen Linien im dritten Geschwindigkeitsintervall bewegte Intensität.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, möchten wir im Anschluß an das Vorhergehende ausdrücklich folgende Bemerkung machen. Wenn wir oben alle ein-, zwei- und dreiwertigen Linien des Argons in je eine Gruppe zusammengefaßt haben, so soll damit nicht gesagt sein, daß alle Linien einer jeden Gruppe genau dasselbe Verhalten zeigen wie etwa die Linien einer Serie. Gewiß zeigen die Linien einer Gruppe untereinander wieder Unterschiede in verschiedener Hinsicht und mögen sich in Untergruppen, z. B. in Serien, ordnen lassen; diese Unterschiede treten indes gegenüber denjenigen zurück, welche durch die verschiedene Wertigkeit der drei Gruppen bedingt werden.

Endlich möchten wir noch einmal betonen, daß auf unseren Spektrogrammen außer den oben angeführten Linien noch zahlreiche weitere zweiwertige und auch noch einige dreiwertige Linien vorkommen und zwar überwiegen die zweiwertigen an Zahl und Intensität die dreiwertigen Linien auf unseren Spektrogrammen. Wir sehen indes von der Mitteilung ihrer Wellenlängen und der Beschreibung ihrer Kanalstrahlenbilder ab. Einerseits befinden sie sich nämlich in einem Gebiet unzureichender Dispersion unseres Spektrographen, andererseits brächte ihre Diskussion hinsichtlich des Unterschiedes von Ar-Linien verschiedener Wertigkeit kaum etwas Neues. Um die zahlreichen Linien des Argons nach ihrer Wertigkeit von Rot bis Ultraviolett zu sortieren, ist es notwendig, unsere Beobachtungen mit einem lichtstarken Konkavgitter zu wiederholen.

§ 4. **Vergleichende Charakteristik der drei Argonspektra.** — Den nachstehenden Ausführungen sei folgende Bemerkung vorausgeschickt. J. M. Eder und E. Valenta haben, wie bereits erwähnt wurde, eine sehr schöne und wertvolle, eingehende Untersuchung über die Argonspektra ausgeführt. Wenn wir in der vorliegenden Mitteilung ihre verdienstvolle Arbeit in einigen Punkten verbessern oder ergänzen, so möchten wir deren Einschätzung damit in keiner Weise beeinträchtigen; sie wird dadurch vielmehr an Wert gewinnen.

Nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit haben die Linien des roten Argonspektrums positiv einwertige Ar-Atomionen als Träger; man kann darum dieses Spektrum auch „einwertig“ nennen. Auf der anderen Seite setzt sich gemäß vorliegender Arbeit das blaue Spektrum des Argons aus zwei verschiedenen Ar-Spektren, nämlich den Linien der zwei- und den Linien der dreiwertigen positiven Ar-Atomionen zusammen; man kann diese zwei Spektren sachgemäß „zweiwertiges“ und „dreiwertiges“ Spektrum nennen.

Eder und Valenta haben neben dem roten und blauen Ar-Spektrum noch die Bezeichnung „weißes“ Spektrum auf dasjenige Ar-Spektrum angewandt, welches bei sehr großer Stromdichte von der positiven Säule emittiert wird und dessen Gesamtfarbe dem Auge weiß erscheint. Wie wir das rote und das blaue Ar-Spektrum an der positiven Säule in der Kapillare einer Geißlerröhre erzeugten, so haben wir uns auch das weiße Spektrum Eder und Valentas an derselben Geißlerröhre gemacht. Das rote Spektrum erhielten wir, indem wir ein kleines Induktorium oder eine 0,4 Milliampère liefernde Influenzmaschine ohne parallele Kapazität an die Röhre legten. Wurde vor die Röhre eine Funkenstrecke an die nicht zusammenstoßenden Pole der Röhre und der Funkenstrecke eine Kapazität und an deren Pole die Influenzmaschine gelegt, wurde mit anderen Worten die Argonröhre in einen Schwingungskreis eingeschaltet, so erschien bei kurzer Funkenstrecke die positive Lichtsäule in Argon schön blau, bei langer Funkenstrecke blendend weiß. Zur Beurteilung dieser Verhältnisse hat man sich an folgende Verhältnisse zu erinnern. Liegt eine Geißlerröhre in einem Feddersen-Hertzschen Schwingungskreis und geht eine elektrische Schwingung in ihr hin und her, so ist ja in ihr der relativ schwache Glimmstrom durch einen Lichtbogen[1]) von mehr als 100 Ampère momentaner Stromstärke ersetzt; das negative Glimmlicht des Glimmstromes an der Kathode und mit ihr dessen Kathodenfall ist

[1]) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 12, 712, 1903.

verschwunden und die positive Säule reicht fast bis unmittelbar an die Kathode heran. Wird ausgehend von kleinen Werten die Funkenstrecke verlängert, so steigt mit der Funkenspannung die momentane Stromstärke der elektrischen Schwingung zunächst an, um bei sehr langer Funkenstrecke infolge der zunehmenden Dämpfung in dieser wieder abzunehmen. Gemäß unseren Beobachtungen erscheint also das rote Ar-Spektrum in der positiven Säule bei kleiner Stromdichte, das blaue Spektrum bei einer sehr viel größeren Stromdichte und das weiße bei einer noch erheblich größeren Stromdichte.

Wenn wir somit die Beobachtung eines „weißen" Ar-Spektrums durch Eder und Valenta bestätigen können, so möchten wir doch die Einführung dieser Bezeichnung neben derjenigen des roten und blauen Spektrums nicht für ganz zweckmäßig halten. Wie nämlich Eder und Valenta selbst finden und wir bestätigen können, kommen fast alle Linien des „weißen" Spektrums im „blauen" vor, wenn ihr Aussehen und ihre Intensitätsverhältnisse in beiden Spektren auch beträchtlich voneinander verschieden sind.

Es seien nun zunächst die Bedingungen dargelegt, unter welchen das ein-, zwei- und dreiwertige Ar-Spektrum in der positiven Lichtsäule erscheinen. Das rote oder einwertige Ar-Spektrum erscheint nach den übereinstimmenden Angaben aller darüber vorliegenden Untersuchungen bei kleiner Stärke (genauer Dichte) des Glimmstromes in Argon von mehr als etwa 1 mm Druck; kommen bei niedrigem Druck und gegebener Spannung des Induktoriums infolge größerer Stromdichte neben den roten auch bereits die intensiveren blauen Argonlinien heraus, so treten sie wieder zurück, wie Eder und Valenta fanden, wenn der Druck des Argons auf etwa 30 mm erhöht wird. Es nimmt dann nämlich der Spannungsabfall in der positiven Säule zu und darum sinkt in dieser bei Konstanz der elektromotorischen Kraft die Stromdichte; gleichzeitig werden auch die größten Kathodenstrahl-Geschwindigkeiten in der positiven Säule infolge vermehrter Absorption kleiner. Daß das Auftreten des roten Argonspektrums an kleine Geschwin-

digkeiten der Kathodenstrahlen in der positiven Säule, durch deren Stoß sie erregt werden, geknüpft ist, wird durch unser Resultat sofort verständlich, daß die Träger der roten Argonlinien positiv einwertige Atomionen sind. Bei kleiner Geschwindigkeit vermögen eben die Kathodenstrahlen durch ihren Stoß nur ein Elektron von einem Ar-Atom unter gleichzeitiger Lichterregung abzutrennen.

Das blaue Argonspektrum vermag man bei jedem Druck, auch bei einem solchen, welcher bei kleiner Stromstärke das rote Spektrum liefert, dadurch herauszuholen, daß man entweder die Dichte des Glimmstromes in der positiven Säule vergrößert oder noch besser dadurch, daß man den Glimmstrom durch den stromdichten Lichtbogen einer elektrischen Schwingung ersetzt, wie es eingehend von J. Trowbridge und Th. W. Richards[1]) gezeigt wurde. Infolge der gesteigerten spezifischen elektrischen Leistung in der positiven Säule wächst dann in dieser die Temperatur sehr an und mit ihr die mittlere Geschwindigkeit der freien Elektronen (Kathodenstrahlen), durch deren Stoß auch die blauen Ar-Linien zur Emission gebracht werden. Auch diese Tatsache findet durch unser Resultat über die Wertigkeit der Ar-Linien eine ungezwungene Deutung. Bei großer Geschwindigkeit werden nämlich schnelle negative Elektronen in der positiven Säule durch ihren Stoß von dem einzelnen Ar-Atom oder von dem einwertigen Ar-Ion nicht bloß ein Elektron, sondern ein weiteres oder drittes unter Lichterregung abschlagen, oder mit anderen Worten bei hoher Temperatur überwiegen in der positiven Säule in Argon die zwei- und dreiwertigen Ionen weitaus die einwertigen.

Erinnert man sich hierbei an das spektrale Verhalten anderer Elemente und vergleicht mit den vorstehenden Darlegungen die Ausführungen[2]) des einen von uns über das Verhalten der Bogen- und Funkenlinien, so erkennt man sofort, daß man nach Analogie die roten Ar-Linien auch Bogen-, die blauen Ar-Linien als Funkenlinien bezeichnen könnte. Zu den

[1]) J. Trowbridge u. Th. W. Richards, Phil. Mag. 43, 135, 1897.
[2]) J. Stark, Phys. Zeitschr. 14, 102, 1913.

Funkenlinien des Argons wären dann sowohl seine zwei- wie dreiwertigen Linien zu rechnen.

Wer bis zu diesem Punkte den vorstehenden Ausführungen gefolgt ist, der wird nun die Frage aufwerfen, ob denn die zwei- und dreiwertigen Ar-Linien, wie sie vor den einwertigen durch die hohe Temperatur in der positiven Lichtsäule bevorzugt werden, auch voneinander wieder sich unterscheiden, ob nämlich bei großer Steigerung der Temperatur über ihren Wert für den Beginn des Erscheinens des blauen Spektrums die dreiwertigen Ar-Linien vor den zweiwertigen hinsichtlich ihrer Intensität und ihres Aussehens sich auszeichnen. Eine Antwort auf diese Frage kann man durch einen Vergleich des blauen und des weißen Spektrums gewinnen, oder noch besser durch Vergleich des weißen Spektrums mit dem Mischspektrum, in welchem neben den roten Ar-Linien bereits die blauen erscheinen. Wir können uns hierbei auf die ausführlichen Angaben von Eder und Valenta beziehen, mit denen in dieser Hinsicht unsere eigenen Beobachtungen in der Hauptsache übereinstimmen. In Tabelle III und IV ist ein Teil der hier in Betracht kommenden Angaben von Eder und Valenta für den von uns genauer untersuchten Spektralbezirk zusammengestellt.

Gemäß den zwei vorstehenden Tabellen werden sowohl die zwei- wie die dreiwertigen Linien beim Übergang vom Mischspektrum zum „weißen" Spektrum intensiver; indes läßt sich auf Grund der rohen Intensitätsangaben ohne Berücksichtigung der Linienbreite nicht entscheiden, ob die einen Linien die anderen an Zunahme der Intensität hierbei übertreffen. Ein anderer Unterschied stellt sich dagegen unzweifelhaft im Aussehen der zwei Linienarten her. Mit Ausnahme der zwei intensiven Linien λ 4277,65 und 4131,95 Å bleiben die zweiwertigen Linien beim Übergang zum weißen Spektrum ziemlich scharf, alle dreiwertigen Linien dagegen werden stark verbreitert, ein Verhältnis, das auch bei den zwei- und den dreiwertigen Linien des Aluminiums beobachtet[1]) wurde.

---

[1]) J. Stark, R. Künzer und G. Wendt, a. a. O.

Tabelle III.
Zweiwertige Linien.

Wellenlänge Å	Intensität und Aussehen	
	Misch-spektrum	weißes Spektrum
4283,02	3	4, scharf
4309,31	0	3, ziemlich scharf
4300,82	0	3, ziemlich scharf
4277,65	2	5, sehr stark verbreitert, λ 4278,02
4202,11	1	3, ziemlich scharf
4131,95	4	4, stark und Rot verbreitert, λ 4132,81
4082,59	2	2, ziemlich scharf
4043,04	3	fehlt in Tabelle, nach Tafel: 5, ziemlich scharf[1])
4013,97		8, ziemlich scharf

Wenn der oben aufgestellte Satz richtig ist, daß langsame Kathodenstrahlen überwiegend einwertige, schnelle Kathodenstrahlen dagegen überwiegend zwei- und dreiwertige Ar-Linien durch ihren Stoß zur Emission bringen, dann müssen in der negativen Glimmschicht, dem Orte, schneller und langsamer Kathodenstrahlen, gleichzeitig neben den roten Ar-Linien intensiv auch die blauen erscheinen, wenn bei kleiner Stromdichte in der positiven Säule die roten Linien vorherrschen; es sind dann die Ar-Spektra in der negativen Glimmschicht vor der Kathode und in der positiven Säule vor der Anode, die Polspektra, voneinander verschieden. Die über diesen Punkt in der Literatur vorliegenden Angaben sind nun widersprechend; wir beschränken uns auf diejenigen von Eder und Valenta und ergänzen sie durch unsere eigenen Beobachtungen.

Diese Autoren haben ihre Ar-Röhren mit einem Induktorium betrieben. Sie finden weder für das blaue noch für das rote Ar-Spektrum in der positiven Säule einen Unterschied zwischen den zwei Polspektren. Dies ist indes leicht aufzuklären. Beim Auftreten des blauen Spektrums in der positiven Säule

[1]) Auch nach unseren Beobachtungen.

Tabelle IV.
Dreiwertige Linien.

Wellenlänge Å	Intensität und Aussehen	
	Mischspektrum	weißes Spektrum
4434,10	1	2, sehr stark verbreitert, λ 4434,62
4222,76	2	3, sehr stark verbreitert, λ 4223,83
4218,79	2	3, sehr stark verbreitert, λ 4219,84
4156,30	1	3, sehr stark verbreitert, λ 4157,30
4104,10	4	6, sehr stark verbreitert, λ 4104,93
4076,85	2	3, sehr stark verbreitert, λ 4077,70

liegt, wie es bei unseren Beobachtungen der Fall war, nicht der Glimmstrom, sondern zumeist die oszillatorische Lichtbogenentladung vor; in dieser ist aber der Unterschied der Strömung vor der Anode und vor der Kathode verschwunden, insofern vor beiden die positive Säule liegt. Und wenn Eder und Valenta beim Auftreten des roten Spektrums in der positiven Säule — in diesem Falle lag zweifellos der Glimmstrom vor — keinen Unterschied der Polspektra beobachteten, so hat dies sehr wahrscheinlich seinen Grund darin, daß sie mit dem Induktorium arbeiteten; bei dem niedrigen Druck (2 mm) in Geißlerröhren geht nämlich sowohl der Schließungs- wie der Öffnungsstrom durch diese, wenn jener auch etwas schwächer als dieser ist. Bei Betrieb unserer Röhren mit Gleichstrom konnten wir jedenfalls feststellen, daß die negative Glimmschicht vor der Kathode weißlichblau, die positive Säule vor der Anode rötlich leuchtete, wenn ein schwacher Glimmstrom durch die Röhren ging. Die negative Glimmschicht liefert nach unseren Beobachtungen das blaue Spektrum überwiegend neben den roten. Eder und Valenta haben dies übrigens, ohne die Umstände scharf zu charakterisieren, selbst gefunden. Sie schreiben nämlich: „Das Glimmlicht[1]) des ersten Argonsspek-

[1]) Gemeint ist die negative Glimmschicht des Glimmstroms, der in der positiven Säule das rote Ar-Spektrum zur Emission bringt. Stark.

trums bei 2 mm Druck enthält alle Hauptlinien und alle Mittellinien des Spektrums der blau leuchtenden Kapillare (des zweiten Argonspektrums). Während im Glimmlichte charakteristische Linien des ersten Argonspektrums (in der Kapillare) völlig fehlen, wie zum Beispiel die Linien $\lambda = 4702$, 4596, 4522, oder stark geschwächt erscheinen, wie 4251, 3834, bleiben andere Linien des ersten Argonspektrums im Glimmlichte gleichzeitig hell und deutlich vorhanden, zum Beispiel 4335, 4332, 4272, 4266, 4259, 4251, 4200, 4198, 4190, 4182, 4164, 4158, 4044, 3949, 3947 (diese kommen im Glimmlicht, sowie roten Kapillarlicht des ersten Argonspektrums vor)[1]. Weil aber dazu mit unerwarteter Helligkeit manche Linien des blauen Argonkapillarlichtes kommen, wie zum Beispiel 4545, 4277, 4131, 4104, 3946, 3944, 3850, 3561, 3559, 3545, so ändert sich das Aussehen mancher Liniengruppen des genannten Glimmlichtspektrums sehr, so daß es ganz merklich von jenem der rotleuchtenden Kapillare verschieden ist und sich mehr dem Spektrum der blauleuchtenden Kapillare nähert."

Nachdem so festgestellt ist, daß die schnellen Kathodenstrahlen der negativen Glimmschicht das blaue Ar-Spektrum zur Emission bringen, ist ohne weiteres verständlich, daß ein schwacher Glimmstrom in der Kapillare einer Geißlerröhre bei niedrigem Druck nicht mehr das rote Spektrum, sondern mehr und mehr das blaue Spektrum hervorbringt. Infolge des Einflusses der Rohrwände steigt nämlich in der positiven Säule des Glimmstroms bei niedrigem Druck das Spannungsgefälle, wie bekannt ist, beträchtlich an und bringt hier rasche Kathodenstrahlen hervor.

Endlich sei noch erwähnt, daß die Gesamtfarbe des Lichtes der Kanalstrahlen im Argon ein rötliches Blau ist. Ar-Strahlen in Ar bringen eben, wie oben spektralanalytisch festgestellt wurde, gleichzeitig das rote und blaue Spektrum intensiv zur Emission.

---

[1]) Kurz gesagt: Zurücktreten des roten Spektrums in der negativen Glimmschicht. Stark.

Resultate.

1. Die Linien des roten Ar-Spektrums haben positiv einwertige Ar-Atomionen als Träger. Die Linien des blauen Ar-Spektrums im Sichtbaren haben zum größeren Teil positiv zweiwertige, zum kleineren Teil positiv dreiwertige Ar-Atomionen als Träger.

2. Bei der Emission von bewegter Intensität stellt sich in den Ar-Kanalstrahlen, sowohl wenn sie in Ar als auch wenn sie in He verlaufen, ein bewegliches Gleichgewicht zwischen den drei Ionenarten des Argons her.

3. Langsame Kathodenstrahlen bringen durch ihren Stoß überwiegend einwertige, schnelle Kathodenstrahlen zwei- und dreiwertige Ar-Linien zur Emission.

Aachen, Phys. Instit. d. Techn. Hochschule, 20. April 1913.

Erläuterungen zur nebenstehenden Tafel.

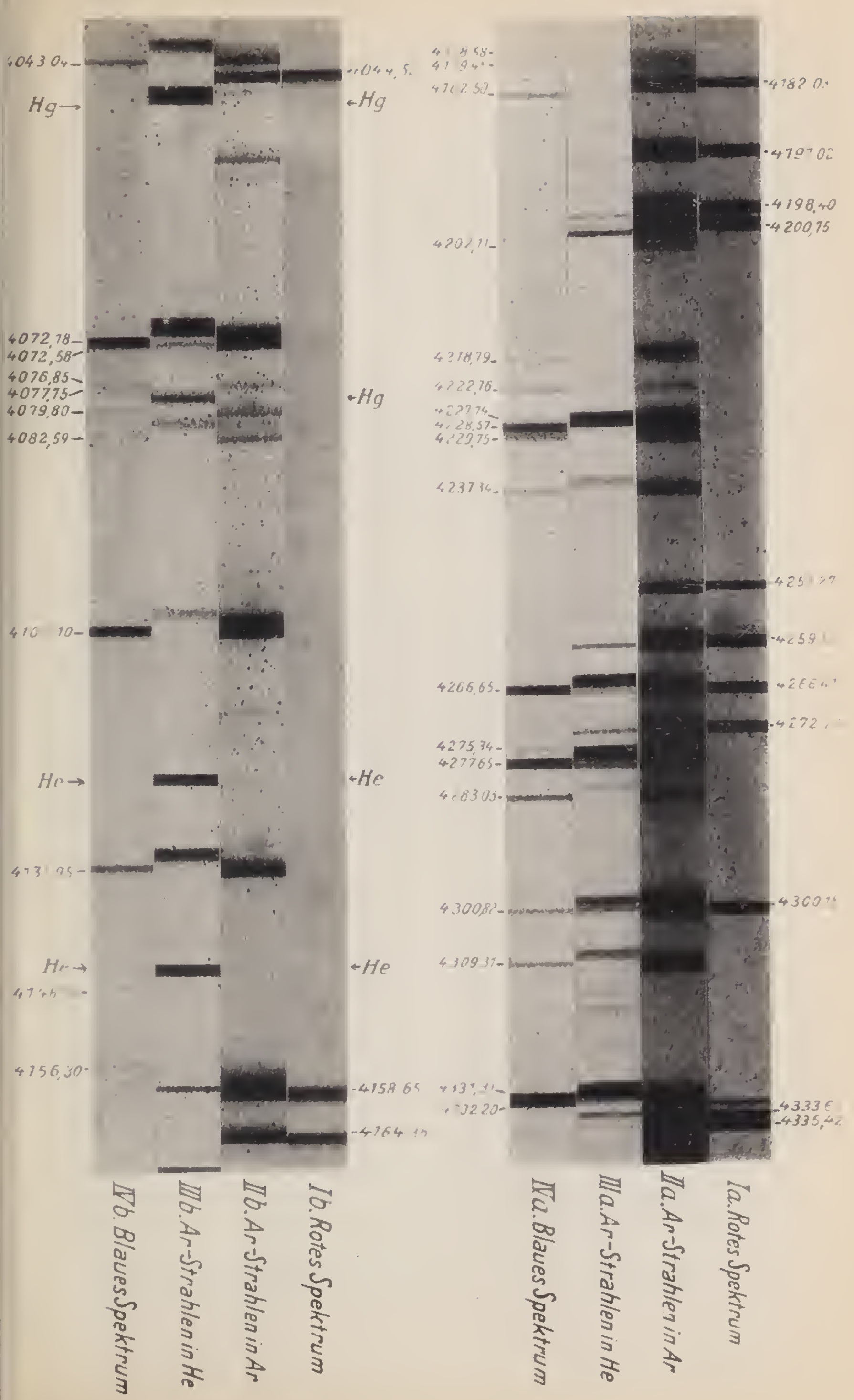
1. Ein Vergleich des roten Ar-Spektrums (Ia und Ib) mit dem blauen Spektrum (IVa und IVb) läßt erkennen, wie die Linien der einen Art im anderen Spektrum ganz fehlen oder nur sehr schwach sind.

2. Der Vergleich der Spektrogramme IVa und IVb (blaues Spektrum) mit den Spektrogrammen IIIa und IIIb (Ar-Strahlen in He) läßt insbesondere bei den Linien λ 4309,31 — 4277,65 — 4266,65 — 4228,57 — 4131,95 — 4072,18 — 4043,04 Å erkennen, daß den ruhenden Linien in der positiven Säule (IVa und IVb) sehr schwache ruhende Linien in den Kanalstrahlen entsprechen, und daß links neben diesen durch ein Intensitätsminimum von ihnen getrennt der breite intensive Streifen liegt, welcher die bewegte Intensität darstellt. Die angeführten Linien sind sämtlich zweiwertig.

3. Der Vergleich des Aussehens dieser Linien im Spektrogramm III mit demjenigen im Spektrogramm II (Ar-Strahlen in Ar) läßt den geschilderten Einfluß der Zerstreuung erkennen.

4. Der Vergleich des Bildes der dreiwertigen Linie λ 4104,10 Å in IVb mit demjenigen in IIIb gibt im Zusammenhalt mit der zweiwertigen Linie λ 4131,95 Å eine Anschauung von dem charakterisierten Unterschied zwischen den zwei- und dreiwertigen Linien. Die dreiwertigen Linien sind in der Tafel durch einen Strich unter ihrer Wellenlänge gekennzeichnet.

5. Der Vergleich der einwertigen Linien λ 4272,29 — 4259,50 — 4200,75 — 4198,40 — 4191,02 — 4158,65 — 4044,52 Å im Spektrogramm der positiven Säule (Ia und Ib) mit ihren Bildern in dem Spektrogramm der Ar-Strahlen in He (IIIa und IIIb) im Zusammenhalt denjenigen zwei- und dreiwertiger Linien macht ihren großen Unterschied von diesen klar. Der Vergleich mit ihren Bildern in IIa und IIb (Ar-Strahlen in Ar) läßt ersehen, daß sie durch die Wirkung der Zerstreuung der Kanalstrahlen eine beträchtliche bewegte Intensität gewinnen.


4043,04
Hg
4072,18
4072,58
4076,85
4077,75
4079,80
4082,59
He
He
4156,30
4158,65
Hg
Hg
He
He
4218,79
4266,65
4275,34
4309,31
4198,40
4200,75
4335,42
IVb. Blaues Spektrum
IIIb. Ar-Strahlen in He
IIb. Ar-Strahlen in Ar
Ib. Rotes Spektrum
IVa. Blaues Spektrum
IIIa. Ar-Strahlen in He
IIa. Ar-Strahlen in Ar
Ia. Rotes Spektrum

Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 3. Mai 1913.

Herr Nörlund hat in seiner Arbeit „Fractions continues et différences réciproques"[1]) unter anderem die Frage behandelt, wie sich die ν^{te} Ableitung $f^{(\nu)}(x)$ bei konstantem x für $\lim \nu = \infty$ verhält, wenn die Funktion $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt; dabei werden die Koeffizienten der Differentialgleichung als rationale Funktionen von x vorausgesetzt und die singulären Punkte sollen, außer allenfalls $x = \infty$, lauter sogenannte Stellen der Bestimmtheit sein. Herrn Nörlunds Methode besteht darin, daß er für $\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ eine lineare Differenzengleichung aufstellt, auf welche sich dann, da ihre Koeffizienten rationale Funktionen von ν sind, die sogenannte Laplacesche Transformation anwenden läßt. Da aber bei der Laplaceschen Transformation immer eine Reihe von Ausnahmsfällen bleibt, die eine gesonderte Überlegung erfordern, so hat diese Methode den Nachteil, daß sie zur Unterscheidung zahlreicher Spezialfälle zwingt, wobei die Gefahr sehr groß ist, doch den einen oder anderen entschlüpfen zu lassen. Obwohl Herrn Nörlunds Arbeit in der Erledigung dieser Spezialfälle

[1]) Acta Mathematica 34 (1910).

sehr sorgfältig ist, scheint es mir doch nicht überflüssig, wenn ich im folgenden das Problem nach einer, wie ich glaube, naturgemäßeren und jedenfalls einheitlicheren Methode behandle.

Dabei gelange ich zu einer wesentlich präziseren Formulierung des Resultats und kann außerdem in zwei Punkten über die Nörlundschen Untersuchungen hinausgehen. Erstens hat nämlich Herr Nörlund nur den Fall durchgeführt, daß in dem Integral $f(x)$ an einer singulären Stelle a höchstens die erste Potenz von $\log(x-a)$ auftritt, während ich alle Fälle behandle. Zweitens aber brauchen bei mir die Koeffizienten der Differentialgleichung keine rationalen Funktionen von x zu sein. Es gelten dann die gleichen Resultate, während man für $\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ keine lineare Differenzengleichung mit in ν rationalen Koeffizienten angeben kann, so daß die Verwendung der Nörlundschen Methode überhaupt nicht möglich wäre.

Zum Schluß setze ich noch einige Anwendungen der erzielten Resultate auseinander. Insbesondere möchte ich auf § 3 hinweisen; die dort gegebene Herleitung der Übergangssubstitutionen für die Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung scheint mir wesentlich einfacher wie die seither bekannt gewordenen Methoden.

§ 1.

Hilfssätze.

Wir setzen, unter ϱ eine komplexe Variable verstehend,

$$\frac{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots \nu} = f_\nu(\varrho) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Dann ist offenbar für $\nu > 1$

$$\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = \varrho \prod_{s=1}^{\nu-1} \frac{(\varrho+s)\, s^{\varrho-1}}{(s+1)^\varrho}; \tag{2}$$

also auch[1])

[1]) S. etwa N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion. Leipzig 1906, S. 13.

(3) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = Fc(\varrho),$$

wo wir nach dem Vorgang von Weierstraß mit $Fc(\varrho)$ die reziproke Gammafunktion bezeichnet haben. Dabei ist unter $\nu^{\varrho-1}$ der eindeutig bestimmte Wert

$$\nu^{\varrho-1} = e^{(\varrho-1)\log\nu}$$

zu verstehen mit reellem Logarithmus.

Wir wollen jetzt die Annäherung an den Grenzwert $Fc(\varrho)$ noch etwas genauer untersuchen und beschränken dabei ϱ auf ein Gebiet $|\varrho| < P$, wo übrigens P beliebig groß sein kann. Wenn wir zunächst noch die Werte $\varrho = 0, -1, -2, \ldots$ ausschließen, so folgt aus (2) und (3):

$$Fc(\varrho)\frac{\nu^{\varrho-1}}{f_\nu(\varrho)} = \prod_{s=\nu}^{\infty} \frac{(\varrho+s)s^{\varrho-1}}{(s+1)^\varrho} = \prod_{s=\nu}^{\infty} \frac{1+\frac{\varrho}{s}}{\left(1+\frac{1}{s}\right)^\varrho}.$$

Daher auch:

$$\log Fc(\varrho) - \log\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = \sum_{s=\nu}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{\varrho}{s}\right) - \varrho\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right].$$

Nun folgt aus der logarithmischen Reihe mit Leichtigkeit für $s > P$

$$\left|\log\left(1+\frac{\varrho}{s}\right) - \varrho\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right| < \frac{P^2+P}{2s^2} + \frac{P^3+P}{3s^3} + \cdots < \frac{C}{s^2} < \frac{C}{s(s-1)},$$

wo C von s und ϱ nicht abhängt. Daher für $\nu > P$:

$$\left|\log Fc(\varrho) - \log\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right| < \sum_{s=\nu}^{\infty}\frac{C}{s(s-1)} = \frac{C}{\nu-1}.$$

Setzt man also

$$\log\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} - \log Fc(\varrho) = \frac{\vartheta C}{\nu-1},$$

so ist $|\vartheta| < 1$, und man erhält:

$$\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} = Fc(\varrho)\, e^{\frac{\vartheta c}{\nu-1}}.$$

Folglich auch

$$\left|\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} - Fc(\varrho)\right| = Fc(\varrho)\left(e^{\frac{\vartheta c}{\nu-1}} - 1\right) < M\left(e^{\frac{c}{\nu-1}} - 1\right) < \frac{C'}{\nu},$$

wo M das Maximum von $|Fc(\varrho)|$ für $|\varrho| < P$ bedeutet, und wo C' von ν und ϱ nicht abhängt. Diese Ungleichung gilt aber offenbar auch für die bisher ausgeschlossenen Werte $\varrho = 0, -1, -2, \ldots -(\nu-1)$, weil dann die linke Seite verschwindet.

Da die Funktion

$$\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}} - Fc(\varrho)$$

für $|\varrho| < P$ regulär ist, so läßt sich ihre μ^{te} Ableitung für $|\varrho| < P$ nach einem bekannten Satz folgendermaßen darstellen:

$$\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right) - Fc^{(\mu)}(\varrho) = \frac{\mu!}{2\pi i}\int\left(\frac{f_\nu(z)}{\nu^{z-1}} - Fc(z)\right)\frac{dz}{(z-\varrho)^{\mu+1}},$$

das Integral in positiver Richtung über die Kreislinie $|z| = P$ erstreckt. Wenn wir nun ϱ sogar auf das Gebiet $|\varrho| < P-1$ beschränken, so ist auf dem ganzen Integrationsweg $|z-\varrho| > 1$; ferner nach dem soeben Bewiesenen

$$\left|\frac{f_\nu(z)}{\nu^{z-1}} - Fc(z)\right| < \frac{C'}{\nu}.$$

Daher folgt:

$$\left|\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right) - Fc^{(\mu)}(\varrho)\right| < \frac{\mu!}{2\pi}\int\frac{C'}{\nu}\,|dz| = \frac{\mu!\,C'P}{\nu}.$$

Nun ist identisch

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{d^k}{d\varrho^k}\left(\nu^{\varrho-1}\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right) = \sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}\frac{d^{k-\mu}}{d\varrho^{k-\mu}}(\nu^{\varrho-1})\cdot\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}\nu^{\varrho-1}(\log\nu)^{k-\mu}\cdot\frac{d^\mu}{d\varrho^\mu}\left(\frac{f_\nu(\varrho)}{\nu^{\varrho-1}}\right).$$

Also, indem man auf die Terme unter dem Summenzeichen die letzte Ungleichung anwendet:

$$\left| f_\nu^{(k)}(\varrho) - \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} \nu^{\varrho-1} (\log \nu)^{k-\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho) \right| < |\nu^{\varrho-1}| (\log \nu)^k \frac{C''}{\nu},$$

wo auch C'' von ν nicht abhängt.

Indem wir eine bekannte, von Herrn Landau eingeführte Schreibweise[1]) benutzen, können wir die bisher gewonnenen Resultate formulieren in

Hilfssatz 1. Setzt man, unter ϱ eine komplexe Variable verstehend,

$$f_\nu(\varrho) = \frac{\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu-1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist

$$f_\nu(\varrho) = Fc(\varrho)\nu^{\varrho-1} + O(|\nu^{\varrho-2}|)$$

und allgemeiner für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \nu^{\varrho-1} \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho)(\log \nu)^{k-\mu} + O(|\nu^{\varrho-2}|(\log \nu)^k).$$

Sei jetzt z eine komplexe Variable. Ist η eine positive Zahl kleiner als 1, so legen wir in der z-Ebene vom Punkt $1+\eta$ aus eine Schleife um den Punkt 1 herum, die nach $1+\eta$ zurückläuft und ganz im Kreis $|z-1| \leqq \eta$ bleibt, so daß der Nullpunkt außerhalb ist. Diese Schleife, in negativer Richtung durchlaufen, nennen wir S (Fig. 1). Dann beweisen wir den

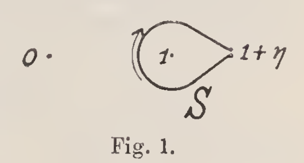


Fig. 1.

Hilfssatz 2. Ist $\Phi(z)$ eine für $|z-1| < \eta$ reguläre analytische Funktion, so gilt die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\Phi(z)(1-z)^{-\varrho}}{z^{\nu+1}} dz = \Phi(1) Fc(\varrho)\nu^{\varrho-1} + O(|\nu^{\varrho-2}|),$$

---

[1]) Siehe z. B. dessen Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, S. 31.

und allgemeiner für $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_S \frac{\Phi(z)(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz$$

$$= \Phi(1)\,\nu^{\varrho-1}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho)(\log\nu)^{k-\mu} + O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k).$$

Dabei bedeutet $\log(1-z)$ denjenigen Zweig des Logarithmus, welcher im Schnittpunkt der Schleife S mit der Strecke 01 reell ist[1]), und $(1-z)^{-\varrho}$ bedeutet $e^{-\varrho\log(1-z)}$.

Zum Beweis gehen wir aus von der Binomialformel

$$(4)\qquad (1-z)^{-\varrho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\varrho) z^\nu \qquad |z| < 1,$$

wo $f_\nu(\varrho)$ für $\nu \geq 1$ die in Hilfssatz 1 auftretende Funktion ist, und $f_0(\varrho) = 1$. Da die Reihe (4) bei konstantem z gleichmäßig im Bereich $|\varrho| \leq P$ konvergiert, und ihre Glieder reguläre Funktionen von ϱ sind, darf man beliebig oft gliedweise nach ϱ differenzieren, und erhält:

$$(5)\quad (-1)^k(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(k)}(\varrho) z^\nu \qquad |z| < 1.$$

Von jetzt an sei ϱ konstant. Aus (5) ergibt sich für $f_\nu^{(k)}(\varrho)$ die Bedeutung:

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{(-1)^k}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k\}_{z=0},$$

und folglich ist auch

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz,$$

wo der Integrationsweg irgend eine den Nullpunkt in positiver Richtung umlaufende geschlossene Linie ist, die den Punkt 1 außerhalb läßt. Beispielsweise kann man den in Fig. 2 ge-

---

[1]) Beim Durchlaufen der Schleife durchläuft der imaginäre Teil von $\log(1-z)$ die Werte $(+\pi i \ldots 0 \ldots -\pi i)$.

zeichneten Weg wählen, der sich zusammensetzt aus der schon beschriebenen Schleife S und dem Kreis K, dessen Radius $1+\eta$ und dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Auf dem Kreis K ist $|z| = 1 + \eta$; ferner bleibt $(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k$ absolut unter einer Schranke M, und man erhält:

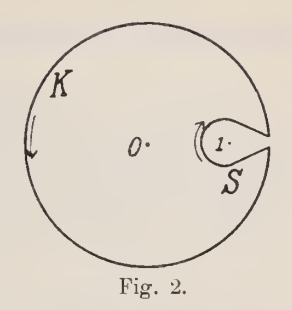


Fig. 2.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz\right| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_K \frac{M}{(1+\eta)^{\nu+1}}|dz| = \frac{M}{(1+\eta)^{\nu}}.$$

Daher wird

$$f_\nu^{(k)}(\varrho) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz + \frac{\vartheta M}{(1+\eta)^{\nu}},$$

wo $|\vartheta| < 1$ ist. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 1 folgt hieraus:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \\ &= \nu^{\varrho-1}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho)(\log\nu)^{k-\mu} + O(|\nu^{\varrho-2}|(\log\nu)^k). \end{aligned}\right.$$

Damit ist der Hilfssatz 2 bereits für die spezielle Funktion $\Phi(z) = 1$ bewiesen. Um ihn allgemein zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$\nu^{\varrho-1}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu} Fc^{(\mu)}(\varrho)(\log\nu)^{k-\mu} = \Omega_\nu$$

und gehen dann aus von der Identität

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\Phi(z)(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz - \Phi(1)\,\Omega_\nu \\ &= \Phi(1)\left\{\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{(1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz - \Omega_\nu\right\} \\ &+ \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_S \frac{[\Phi(z)-\Phi(1)](1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz. \end{aligned}$$

Nach Formel (6) ist die geschweifte Klammer gleich

$$O(|\nu^{\varrho-2}|(\log \nu)^k).$$

Der Hilfssatz 2 wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß auch

$$\int\limits_S \frac{[\Phi(z)-\Phi(1)](1-z)^{-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz = O(|\nu^{\varrho-2}|(\log \nu)^k)$$

ist; oder einfacher, indem wir

$$\frac{\Phi(z)-\Phi(1)}{z-1} = \Psi(z)$$

setzen,

$$\int\limits_S \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz = O(|\nu^{\varrho-2}|(\log \nu)^k). \tag{8}$$

Zum Nachweis dieser Formel bemerken wir zunächst, daß die Funktion $\Psi(z)$ im Kreis $|1-z| \leqq \eta$ regulär ist und daher absolut unter einer Schranke G bleibt. Wir wollen dann bei dem Integral (8) den Integrationsweg in erlaubter Weise abändern, indem wir zuerst vom Punkt $1+\eta$ geradlinig nach $1+\frac{1}{\nu}$ gehen $\left(\frac{1}{\nu}<\eta\right)$, dann auf einem Kreis K_ν vom Radius $\frac{1}{\nu}$ um den Punkt 1 als Mittelpunkt in negativer Richtung herum und schließlich von $1+\frac{1}{\nu}$ geradlinig nach $1+\eta$ zurück. Wir erhalten dadurch:

$$\tag{9} \left\{ \begin{aligned} \int\limits_S \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz &= \int\limits_{K_\nu} \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \\ &+ \int\limits_{1+\eta}^{1+\frac{1}{\nu}} \frac{\Psi(z)e^{\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}[\log(z-1)+\pi i]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \\ &+ \int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{\Psi(z)e^{-\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}[\log(z-1)-\pi i]^k}{z^{\nu+1}}\,dz, \end{aligned} \right.$$

wobei in den geradlinigen Integralen $\log(z-1)$ den reellen Logarithmus bedeutet, und

$$(z-1)^{1-\varrho} = e^{(1-\varrho)\log(z-1)}$$

ist. Da der neue Integrationsweg ganz im Kreis $|1-z| \leq \eta$ verläuft, ist auf ihm durchweg $|\Psi(z)| < G$. Auf dem Kreis K_ν ist außerdem $1 - z = \frac{1}{\nu} e^{-i\varphi}$, wo φ von $-\pi$ bis $+\pi$ läuft; daher

$$|(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k| = \left| \nu^{\varrho-1} e^{i\varphi(\varrho-1)} \left(\log\frac{1}{\nu} - i\varphi\right)^k \right|,$$
$$< C\,|\nu^{\varrho-1}|\,(\log\nu)^k,$$

wo C von ν und von der Stelle z auf K_ν nicht abhängt. Ferner ist auf K_ν

$$|z^{\nu+1}| = \left|1 - \frac{1}{\nu} e^{-i\varphi}\right|^{\nu+1} > \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} > \frac{1}{3} \qquad \text{(für große } \nu\text{)},$$

so daß man erhält:

$$\left| \int_{K_\nu} \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \right| < \int_{K_\nu} 3\,G\,C\,|\nu^{\varrho-1}|\,(\log\nu)^k\,|dz|$$
$$= 3\,G\,C\,|\nu^{\varrho-1}|\,(\log\nu)^k\,\frac{2\pi}{\nu}.$$

Die beiden geradlinigen Integrale auf der rechten Seite von (9) können wir gemeinsam behandeln. Es ist

$$\left| \mp \int_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{\Psi(z)\,e^{\pm\pi i(1-\varrho)}\,(z-1)^{1-\varrho}\,[\log(z-1) \pm \pi i]^k}{z^{\nu+1}}\,dz \right|$$
$$< \int_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{G\,|e^{\pm\pi i(1-\varrho)}(z-1)^{1-\varrho}|\,(\log\nu + \pi)^k}{z^{\nu+1}}\,dz$$
$$< C_1(\log\nu)^k \int_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{|(z-1)^{1-\varrho}|}{z^{\nu+1}}\,dz,$$

wo C_1 von ν nicht abhängt (ebenso wie nachher C_2, C_3). Nun überzeugt man sich leicht, daß für $1 < z < 2$ stets $z > e^{\frac{z-1}{2}}$ ist, also auch

$$z^{\nu+1} > e^{(\nu+1)\frac{z-1}{2}} > e^{\nu\frac{z-1}{2}}.$$

Daher

$$\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{|(z-1)^{1-\varrho}|}{z^{\nu+1}}\, dz < \int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} |(z-1)^{1-\varrho}|\, e^{-\nu\frac{z-1}{2}}\, dz.$$

Oder, indem man rechts die Substitution $z = 1 + \frac{x}{\nu}$ macht:

$$\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}}^{1+\eta} \frac{|(z-1)^{1-\varrho}|}{z^{\nu+1}}\, dz < \int\limits_{1}^{\nu\eta} \frac{|x^{1-\varrho}|\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx}{|\nu^{2-\varrho}|} < |\nu^{\varrho-2}| \int\limits_{1}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, |x^{1-\varrho}|\, dx$$
$$= C_2\, |\nu^{\varrho-2}|.$$

Trägt man jetzt die gefundenen Abschätzungen in (9) ein, so kommt:

$$\left| \int\limits_{S} \frac{\Psi(z)(1-z)^{1-\varrho}[\log(1-z)]^k}{z^{\nu+1}}\, dz \right| < 3\, G\, C\, |\nu^{\varrho-1}|\, (\log\nu)^k\, \frac{2\pi}{\nu}$$
$$+ 2\, C_1 (\log\nu)^k\, C_2\, |\nu^{\varrho-2}| = C_3\, |\nu^{\varrho-2}|\, (\log\nu)^k.$$

Daraus ergibt sich nun sofort die zu beweisende Formel (8) womit auch Hilfssatz 2 bewiesen ist.

§ 2.

Der Hauptsatz.

Sei $y = f(x)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(10)\qquad y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n(x)\, y = 0,$$

deren Koeffizienten in der ganzen x-Ebene eindeutig sein mögen. $f(x)$ sei an einer gewissen Stelle x_0 regulär, und die der Stelle x_0 nächstgelegenen singulären Punkte von $f(x)$ seien in endlicher Anzahl r vorhanden:

$$(11)\qquad a_1, a_2, \ldots, a_r.$$

Wir setzen dann:

(12) $$|a_\lambda - x_0| = R \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r).$$

Im allgemeinen ist $r = 1$; nur bei spezieller Wahl von x_0 kann $r > 1$ sein. Wir setzen weiter voraus, daß sich $f(x)$ an den Stellen (11) bestimmt verhält.

Es sei jedoch bemerkt, daß die Differentialgleichung (10) sehr wohl noch andere singuläre Stellen im Kreis $|x - x_0| < R$ haben darf; sogar x_0 selbst darf eine solche sein. Auch brauchen die Stellen (11) keine Stellen der Bestimmtheit zu sein in dem Sinn, daß jedes Integral sich bestimmt verhält. Nur das ins Auge gefaßte partikuläre Integral $f(x)$ muß die angegebenen Eigenschaften haben; auf die anderen Integrale kommt es uns nicht an.

Nach unseren Voraussetzungen hat auf Grund der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen die Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle a_λ die Gestalt

(13) $$f(x) = \sum_{\varkappa, l} (x - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log (x - a_\lambda)]^l \, \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(x - a_\lambda),$$

wo die Exponenten $r_{\varkappa,\lambda}$ im allgemeinen komplex sind, während für l meistens nur der Wert 0, ausnahmsweise aber auch die Werte $1, 2, \ldots, n$ möglich sind; die $\mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}$ sind Potenzreihen[1]).

Nun ist

(14) $$\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x)\, dx}{(x - x_0)^{\nu+1}},$$

wo der Integrationsweg eine den Punkt x_0 in positiver Richtung umlaufende geschlossene Linie ist, welche die singulären Punkte von $f(x)$ außerhalb läßt. Wir beschreiben um x_0 als Mittelpunkt einen Kreis K vom Radius $(1 + \eta) R$, wo η zwischen 0 und 1 liege und so klein sei, daß $f(x)$ im Innern und

---

[1]) Es kommt im folgenden nur darauf an, daß $f(x)$ in der Umgebung von a_λ die Form (13) hat; die Differentialgleichung selbst spielt weiter keine Rolle. Auch ist nicht ausgeschlossen, daß der Punkt a_λ in Wahrheit gar nicht singulär ist, indem nur $l = 0$, $r_{\varkappa,\lambda} = 0, 1, 2, \ldots$ vorkommt.



Fig. 3.

auf der Grenze von K keine anderen singulären Punkte hat als $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Alsdann wählen wir in Formel (14) als Integrationsweg die aus Fig. 3 ersichtliche Linie, wobei die Schleifen um die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ herumführen, während die Kreisbogen dem eben eingeführten Kreis K angehören. Es ist also

$$(15)\quad \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}} + \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i}\int_{T_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}},$$

wo S_λ die Schleife um a_λ bedeutet, während mit T_λ die Bogen des Kreises K bezeichnet sind.

Auf dem Kreis K ist nun $f(x)$ regulär, bleibt also absolut unter einer Schranke G; ferner ist $|x - x_0| = (1+\eta)R$, so daß man erhält:

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i}\int_{T_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}}\right| < \frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=1}^{r}\int_{T_\lambda} \frac{G\,|dx|}{(1+\eta)^{\nu+1}R^{\nu+1}} = \frac{G}{(1+\eta)^{\nu}R^{\nu}}.$$

Also nach Einsetzen in (15):

$$(16)\quad \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}} + O((1+\eta)^{-\nu}R^{-\nu}).$$

Auf der Schleife S_λ hat $f(x)$ die Form (13), so daß sich zunächst ergibt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{\nu+1}}$$

$$= \sum_{\varkappa,\,l} \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\lambda} \frac{(x-a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}[\log(x-a_\lambda)]^l\,\mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(x-a_\lambda)}{(x-x_0)^{\nu+1}}\,dx.$$

Auf die Integrale der rechten Seite wenden wir die lineare Transformation

$$\frac{x - x_0}{a_\lambda - x_0} = z$$

an; dadurch geht die Schleife S_λ über in eine den Punkt $z = 1$ umlaufende Schleife S, wie sie in Hilfssatz 2 vorkommt, und man erhält:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} \frac{1}{2\pi i}$$

$$\times \int\limits_S \frac{(1-z)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log(1-z) + \log(x_0 - a_\lambda)]^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}((x_0 - a_\lambda)(1-z))}{z^{\nu+1}}\, dz.$$

Oder, indem man $[\log(1 - z) + \log(x_0 - a_\lambda)]^l$ nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} [\log(x_0 - a_\lambda)]^{l-k}\, \Theta_{\nu,k},$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{(1 - z)^{r_{\varkappa,\lambda}} [\log(1 - z)]^k \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}((x_0 - a_\lambda)(1 - z))}{z^{\nu+1}}\, dz = \Theta_{\nu,k}$$

gesetzt wurde. Nach Hilfssatz 2 ist aber

$$\Theta_{\nu,k} = (-1)^k \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(0)\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1} \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} F c^{(\mu)}(-r_{\varkappa,\lambda}) (\log \nu)^{k-\mu}$$
$$+ O(\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2} | (\log \nu)^k).$$

Setzt man dies oben ein und vertauscht dann die Reihenfolge der Summationen nach μ und k, so erweist sich die Summe nach k als eine binomische Entwicklung, und man erhält durch Zusammenfassen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\lambda} \frac{f(x)\,dx}{(x - x_0)^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} (-1)^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(0)\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1}$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{l} \binom{l}{\mu} F c^{(\mu)}(-r_{\varkappa,\lambda}) [\log \nu - \log(x_0 - a_\lambda)]^{l-\mu}$$

$$+ \sum_{\varkappa, l} O(|a_\lambda - x_0|^{-\nu}\ \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2} | (\log \nu)^l).$$

Statt des letzten Gliedes kann man, weil $|a_\lambda - x_0| = R$ ist, schreiben:

$$\sum_{\varkappa, l} O(R^{-\nu} |\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2}| (\log \nu)^l).$$

Natürlich läßt sich diese Summe auch durch ein einziges O ersetzen, indem man offenbar nur ein Glied höchster Größenordnung beizubehalten braucht, also ein Glied, bei dem der reelle Teil von $r_{\varkappa,\lambda}$ am kleinsten ist, und das zugehörige l am größten. Doch ist es bequemer, die obige Summenform stehen zu lassen.

Indem man endlich die letzte Gleichung nach λ summiert, ergibt sich mit Rücksicht auf (16) die in dem nachstehenden Satz enthaltene Formel:

Satz. Die Funktion $f(x)$ sei im Innern eines Kreises mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius R regulär, während auf der Peripherie eine endliche Anzahl singulärer Punkte liegen soll: $a_1, a_2, \ldots, a_r$. In der Umgebung von a_λ habe $f(x)$ die Form

$$f(x) = \sum_{\varkappa, l} (x - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} \log [(x - a_\lambda)]^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(x - a_\lambda),$$

wo die $\mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}$ Potenzreihen sind.

Dann gilt für den Mittelpunkt x_0 des Kreises die Formel

$$\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\varkappa, l} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^\nu} (-1)^l \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda,l}(0)\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1}$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{l} \binom{l}{\mu} Fc^{(\mu)}(-r_{\varkappa,\lambda}) [\log \nu - \log (x_0 - a_\lambda)]^{l-\mu}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\varkappa, l} O(R^{-\nu} |\nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-2}| (\log \nu)^l).$$

In diesem Satze sind speziell auch die erwähnten Nörlundschen Resultate enthalten. Wir wollen den Fall, daß keine Logarithmen vorkommen, noch besonders hervorheben,

da dies doch der gewöhnliche Fall ist[1]). Dann hat $f(x)$ in der Umgebung von a_λ die Form

$$f(x) = \sum_{\varkappa} (x - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}} \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda}(x - a_\lambda),$$

und es ist

$$\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{\varkappa} \frac{(x_0 - a_\lambda)^{r_{\varkappa,\lambda}}}{(a_\lambda - x_0)^{\nu}} \mathfrak{P}_{\varkappa,\lambda}(0)\, Fc(-r_{\varkappa,\lambda})\, \nu^{-r_{\varkappa,\lambda}-1} + O(R^{-\nu}\nu^{-s-2}),$$

wo mit s der kleinste reelle Teil der Exponenten $r_{\varkappa,\lambda}$ bezeichnet ist. Übrigens wird die Summe im allgemeinen auch Glieder aufweisen, die von geringerer oder gleicher Größenordnung sind wie $R^{-\nu}\nu^{-s-2}$, nämlich alle diejenigen, bei welchen der reelle Teil von $r_{\varkappa,\lambda}$ nicht kleiner ist wie $s+1$. Diese können natürlich weggelassen werden und sind ohne jede Bedeutung. Entsprechendes gilt auch im allgemeinen Fall, wenn Logarithmen auftreten.

§ 3.

Erste Anwendung: Übergangssubstitutionen.

Unser Satz ist nützlich zur Berechnung der sogenannten Übergangssubstitutionen, wie wir am Beispiel der hypergeometrischen Differentialgleichung

(17) $$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

zeigen wollen. Zur Vermeidung von Komplikationen setzen wir voraus, daß γ und $\alpha+\beta-\gamma$ keine ganzen Zahlen sind. Dann hat die Differentialgleichung die folgenden vier Integrale:

(18) $$\begin{cases} y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \end{cases}$$

(19) $$\begin{cases} y_3 = F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x) \\ y_4 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x), \end{cases}$$

[1]) Diesen hat auf andere Art auch Herr Darboux behandelt, der im wesentlichen unser Resultat fand (Journal de mathématiques pures et appliquées, sér. 3, tome 4 (1878), p. 1 ff., namentlich p. 19–20).

wobei

$$(20)\quad F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

ist. Wir benötigen weiter nur noch die bekannte Formel

$$(21)\quad (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x).$$

Da nur zwei Integrale linear unabhängig sind, so existieren in dem gemeinsamen Konvergenzgebiet, also in dem den beiden Kreisen $|x|<1$, $|1-x|<1$ gemeinsamen Bereich Relationen der Form

$$(22)\qquad y_1=Ay_3+By_4$$

$$(23)\qquad y_2=Cy_3+Dy_4$$

mit konstanten Koeffizienten A, B, C, D, die wir berechnen wollen. y_1 ist an der Stelle $x=0$ regulär; der nächstgelegene singuläre Punkt ist $x=1$ [1]; in der Umgebung von $x=1$ hat y_1 die Gestalt (22), wo rechts die Werte (19) einzusetzen sind. Daraus folgt nach unserem Satz:

$$\left(\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}\right)_{x=0}=BFc(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}+O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Anderseits ist hier die linkeSeite der Koeffizient von x^ν in der Reihe $y_1=F(\alpha,\beta,\gamma;x)$; also mit Rücksicht auf Hilfssatz 1:

$$\left(\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}\right)_{x=0}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots\nu\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\nu-1)}=\frac{f_\nu(\alpha)f_\nu(\beta)}{f_\nu(\gamma)}$$
$$=\frac{Fc(\alpha)Fc(\beta)}{Fc(\gamma)}\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}+O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Durch Vergleich der beiden Resultate kommt:

$$(24)\qquad BFc(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{Fc(\alpha)Fc(\beta)}{Fc(\gamma)}.$$

---

[1]) Nur wenn α oder β einen der Werte $0, -1, -2, \ldots$ hat, ist y_1 ein Polynom, also 1 kein singulärer Punkt. Aber das ändert nichts an unseren Überlegungen; vgl. die Fußnote S. 365.

Um ebenso A zu finden, multiplizieren wir die Gleichung (22) mit $(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$. Dann ergibt sich mit Rücksicht auf (21):

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x) = A(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x)$$
$$+ BF(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x).$$

Die linke Seite ist hier für $x=0$ wieder regulär, und der nächstgelegene singuläre Punkt ist $x=1$. Also folgt aus unserem Satz:

$$\frac{F^{(\nu)}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; 0)}{\nu!}$$
$$= AFc(\gamma-\alpha-\beta)\nu^{\gamma-\alpha-\beta-1} + O(\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}).$$

Anderseits ist nach Hilfssatz 1

$$\frac{F^{(\nu)}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; 0)}{\nu!} = \frac{f_\nu(\gamma-\alpha) f_\nu(\gamma-\beta)}{f_\nu(\gamma)}$$
$$= \frac{Fc(\gamma-\alpha)Fc(\gamma-\beta)}{Fc(\gamma)}\nu^{\gamma-\alpha-\beta-1} + O(\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}).$$

Durch Vergleich der beiden Resultate kommt:

$$(25) \qquad AFc(\gamma-\alpha-\beta) = \frac{Fc(\gamma-\alpha)Fc(\gamma-\beta)}{Fc(\gamma)}.$$

Zur Berechnung von C und D multiplizieren wir (23) mit $x^{\gamma-1}$; es entsteht:

$$(26)\begin{cases} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \\ = C(1-(1-x))^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x) \\ + D(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-(1-x))^{\gamma-1} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x). \end{cases}$$

Daher nach unserem Satz:

$$\frac{F^{(\nu)}(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; 0)}{\nu!}$$
$$= DFc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}).$$

Anderseits nach Hilfssatz 1:

$$\frac{F^{(\nu)}(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; 0)}{\nu!} = \frac{f_\nu(\alpha+1-\gamma) f_\nu(\beta+1-\gamma)}{f_\nu(2-\gamma)}$$
$$= \frac{Fc(\alpha+1-\gamma)\, Fc(\beta+1-\gamma)}{Fc(2-\gamma)} \nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

Durch Vergleich der beiden Resultate:

$$(27)\quad D\, Fc(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{Fc(\alpha+1-\gamma)\, Fc(\beta+1-\gamma)}{Fc(2-\gamma)}.$$

Endlich multiplizieren wir (26) noch mit $(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$, wodurch die linke Seite übergeht in $F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma; x)$: das ergibt sich einfach aus (21), indem man α, β, γ bzw. ersetzt durch

$$\alpha+1-\gamma, \quad \beta+1-\gamma, \quad 2-\gamma.$$

Aus der so veränderten Gleichung (26) folgt dann mit Hilfe unseres Satzes:

$$\frac{F^{(\nu)}(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma; 0)}{\nu!}$$
$$= C\, Fc(\gamma-\alpha-\beta)\, \nu^{\gamma-\alpha-\beta-1} + O(|\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}|).$$

Anderseits lehrt Hilfssatz 1:

$$\frac{F^{(\nu)}(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma; 0)}{\nu!} = \frac{f_\nu(1-\alpha) f_\nu(1-\beta)}{f_\nu(2-\gamma)}$$
$$= \frac{Fc(1-\alpha)\, Fc(1-\beta)}{Fc(2-\gamma)} \nu^{\gamma-\alpha-\beta-1} + O(|\nu^{\gamma-\alpha-\beta-2}|);$$

also durch Vergleich:

$$(28)\qquad C\, Fc(\gamma-\alpha-\beta) = \frac{Fc(1-\alpha)\, Fc(1-\beta)}{Fc(2-\gamma)}.$$

Damit sind die Konstanten A, B, C, D berechnet, und man erhält die bekannten Gauß-Kummerschen Formeln:

$$(29)\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{Fc(\gamma-\alpha)\, Fc(\gamma-\beta)}{Fc(\gamma)\, Fc(\gamma-\alpha-\beta)} y_3 + \dfrac{Fc(\alpha)\, Fc(\beta)}{Fc(\gamma)\, Fc(\alpha+\beta-\gamma)} y_4 \\[2ex] y_2 = \dfrac{Fc(1-\alpha)\, Fc(1-\beta)}{Fc(2-\gamma)\, Fc(\gamma-\alpha-\beta)} y_3 + \dfrac{Fc(\alpha+1-\gamma)\, Fc(\beta+1-\gamma)}{Fc(2-\gamma)\, Fc(\alpha+\beta-\gamma)} y_4. \end{cases}$$

Um umgekehrt y_3, y_4 durch y_1, y_2 auszudrücken, kann man analog verfahren, wobei die singulären Punkte 0 und 1 ihre Rolle vertauschen; oder man kann (29) auflösen. Die entstehenden Formeln sind aber nichts Neues und lassen sich bequemer aus (29) durch bloße Änderung der Bezeichnung gewinnen, indem man nämlich γ durch $1 + \alpha + \beta - \gamma$ und x durch $1 - x$ ersetzt. Man erhält so:

0)
$$\left\{\begin{aligned} y_3 &= \frac{Fc(1+\beta-\gamma)\,Fc(1+\alpha-\gamma)}{Fc(1+\alpha+\beta-\gamma)\,Fc(1-\gamma)}\,y_1 + \frac{Fc(\alpha)\,Fc(\beta)}{Fc(1+\alpha+\beta-\gamma)\,Fc(\gamma-1)}\,y_2 \\ y_4 &= \frac{Fc(1-\alpha)\,Fc(1-\beta)}{Fc(1-\alpha-\beta+\gamma)\,Fc(1-\gamma)}\,y_1 + \frac{Fc(\gamma-\beta)\,Fc(\gamma-\alpha)}{Fc(1-\alpha-\beta+\gamma)\,Fc(\gamma-1)}\,y_2. \end{aligned}\right.$$

§ 4.

Zweite Anwendung: Kettenbrüche.

Wir stützen uns hier auf folgenden Lehrsatz[1]): „Irgendwelche Größen a_ν, b_ν, X_ν, Y_ν seien durch die Formeln miteinander verbunden:

$$X_\nu = b_\nu X_{\nu+1} + a_{\nu+1} X_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$Y_\nu = b_\nu Y_{\nu+1} + a_{\nu+1} Y_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0.$$

Dabei sollen alle a_ν und wenigstens ein X_ν von Null verschieden sein. Dann ist, falls $X_1 \neq 0$, der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

konvergent und hat den Wert $\frac{X_0}{X_1}$. Ist aber $X_1 = 0$, so ist der Kettenbruch unwesentlich divergent.“

I. Nun wenden wir uns zuerst zu der Differentialgleichung

(31) $$y = bxy' + ax^2y'' \qquad (a \neq 0).$$

1) Vgl. des Verfassers Lehrbuch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 291, Satz 46, Ziff. C.

Sind ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(32) $$a\varrho(\varrho-1)+b\varrho-1=0,$$

woraus insbesondere

(33) $$b=a(1-\varrho_1-\varrho_2)$$

folgt, so hat (31) die beiden Integrale

$$y_1=x^{\varrho_1}$$

$$y_2=\begin{cases} x^{\varrho_2} & \text{falls } \varrho_2 \neq \varrho_1 \\ x^{\varrho_1}\log x & \text{falls } \varrho_2=\varrho_1. \end{cases}$$

Wir setzen voraus, daß ϱ_1 und ϱ_2 von 0, 1, 2, ... verschieden sind, so daß der Nullpunkt für beide Integrale singulär ist. Jeder andere Punkt x_0 ist regulär, und aus unserem Satz folgt dann, wenn wir x für x_0 schreiben:

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}=\frac{x^{\varrho_1}}{(-x)^\nu}Fc(-\varrho_1)\nu^{-\varrho_1-1}+O(|x|^{-\nu}|\nu^{-\varrho_1-2}|),$$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!}=\begin{cases} \frac{x^{\varrho_2}}{(-x)^\nu}Fc(-\varrho_2)\nu^{-\varrho_2-1}+O(|x|^{-\nu}|\nu^{-\varrho_2-2}|) & \text{falls } \varrho_2 \neq \varrho_1 \\ -\frac{x^{\varrho_1}}{(-x)^\nu}\nu^{-\varrho_1-1}[Fc(-\varrho_1)(\log\nu-\log x)+Fc'(-\varrho_1)] & \\ \qquad +O(|x|^{-\nu}|\nu^{-\varrho_1-2}|\log\nu) & \text{falls } \varrho_2=\varrho_1. \end{cases}$$

Setzt man daher

(34) $$(-x)^\nu y_1^{(\nu)}=X_\nu,\quad (-x)^\nu y_2^{(\nu)}=Y_\nu,$$

so wird

(35) $$\lim_{\nu=\infty}\frac{X_\nu}{Y_\nu}=0 \qquad \text{falls } \varrho_1=\varrho_2 \text{ oder } \Re(\varrho_1)>\Re(\varrho_2),$$

wo mit $\Re$ der reelle Teil bezeichnet ist. Dagegen existiert der Grenzwert nicht, wenn $\Re(\varrho_1)=\Re(\varrho_2)$, aber $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist.

Durch ν-malige Differentiation von (31) folgt nun:

$$[a\nu(\nu-1)+b\nu-1]y^{(\nu)}=-(b+2a\nu)xy^{(\nu+1)}-ax^2y^{(\nu+2)}.$$

Oder, indem man mit $(-x)^\nu$ multipliziert, sodann durch

$$a\nu(\nu-1)+b\nu-1=a(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)$$

dividiert und endlich für b den Wert (33) einsetzt:

$$(-x)^\nu y^{(\nu)} = \frac{1+2\nu-\varrho_1-\varrho_2}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)}(-x)^{\nu+1}y^{(\nu+1)} - \frac{1}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)}(-x)^{\nu+2}y^{(\nu+2)}.$$

Da dies für $y = y_1$ und $y = y_2$ gilt, so erhält man unter Anwendung der Bezeichnung (34):

$$(36) \begin{cases} X_\nu = \dfrac{1+2\nu-\varrho_1-\varrho_2}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} X_{\nu+1} - \dfrac{1}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} X_{\nu+2} \\ Y_\nu = \dfrac{1+2\nu-\varrho_1-\varrho_2}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} Y_{\nu+1} - \dfrac{1}{(\nu-\varrho_1)(\nu-\varrho_2)} Y_{\nu+2}. \end{cases}$$

Aus (35) und (36) folgt nun dem obigen Lehrsatz zufolge:

$$\frac{X_0}{X_1} = \frac{1-\varrho_1-\varrho_2}{(-\varrho_1)(-\varrho_2)} - \frac{\frac{1}{(-\varrho_1)(-\varrho_2)}\Big|}{\Big|\frac{3-\varrho_1-\varrho_2}{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)}} - \frac{\frac{1}{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)}\Big|}{\Big|\frac{5-\varrho_1-\varrho_2}{(2-\varrho_1)(2-\varrho_2)}} - \cdots,$$

oder, indem man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, sodann mit $\varrho_1\varrho_2$ multipliziert, und endlich für X_0, X_1 ihre Werte

$$X_0 = y_1 = x^{\varrho_1}, \quad X_1 = -xy_1' = -\varrho_1 x^{\varrho_1}$$

einsetzt:

$$(37) \begin{cases} 1-\varrho_1-\varrho_2 - \dfrac{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)\Big|}{\Big|3-\varrho_1-\varrho_2} - \dfrac{(2-\varrho_1)(2-\varrho_2)\Big|}{\Big|5-\varrho_1-\varrho_2} \\ \qquad - \dfrac{(3-\varrho_1)(3-\varrho_2)\Big|}{\Big|7-\varrho_1-\varrho_2} - \cdots = -\varrho_2 \\ \text{für } \varrho_1 = \varrho_2 \quad \text{oder } \Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2); \quad \varrho_1, \varrho_2 \neq 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Das Resultat ist übrigens nicht neu. Es ist ein spezieller Fall des in meinem genannten Lehrbuch auf ganz andere Weise bewiesenen Satz 10, S. 215. Setzt man dort speziell

$$\alpha = \frac{1-\varrho_1}{2}, \quad \beta = -\frac{\varrho_1}{2}, \quad z = \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2},$$

so geht genau die Formel (37) hervor.

II. Herr Nörlund hat a. a. O. in ähnlicher Weise die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(38)\quad (x - x^2)\,y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]\,y' - \alpha\beta y = 0$$

behandelt, was wir hier in etwas modifizierter Form auch noch tun wollen. Die Fälle, in denen Logarithmen auftreten, schließen wir dabei nicht aus; nur sollen α, β, γ von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden sein, damit die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ gebildet werden kann und nicht abbricht. Wir haben dann die folgenden linear unabhängigen Intergrale:

$$39)\qquad y_1 = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

$$(40)\qquad y_2 = \begin{cases} x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \\ \qquad \text{falls } \gamma \neq 1, 2, 3, \ldots \\ y_1 \log x + x^{1-\gamma}(a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \cdots) \\ \qquad \text{falls } \gamma = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

wobei $a_0 \neq 0$ ist; übrigens bezeichnen wir im folgenden mit y_1, y_2 auch das, was aus diesen Reihen durch analytische Fortsetzung ohne Überschreiten der Linie $1\,\infty$ hervorgeht.

Durch ν-malige Differentiation von (38) folgt:

$$(\alpha + \nu)(\beta + \nu)\,y^{(\nu)}$$
$$= [\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x]\,y^{(\nu+1)} + (x - x^2)\,y^{(\nu+2)}.$$

Also, indem man

$$(41)\qquad y_1^{(\nu)} = X_\nu,\ y_2^{(\nu)} = Y_\nu$$

setzt,

$$(42)\qquad \begin{cases} X_\nu = \dfrac{\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} X_{\nu+1} \\ \qquad + \dfrac{x - x^2}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} X_{\nu+2} \\ Y_\nu = \dfrac{\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} Y_{\nu+1} \\ \qquad + \dfrac{x - x^2}{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)} Y_{\nu+2}. \end{cases}$$

Sei nun x ein von Null verschiedener Wert, dessen reeller Teil $\Re(x)$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, so daß $|x| < |1-x|$ ist. Für y_2 ist dann der Nullpunkt der nächstgelegene singuläre Punkt. In seiner Umgebung hat y_2 die Gestalt (40); also ergibt sich aus unserem Satz:

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2} + O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) \\ \qquad \text{für } \gamma \neq 1, 2, 3, \ldots \\ \dfrac{-1}{(-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1} + \dfrac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} a_0 Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2} \\ \quad + O(|x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\nu^{\gamma-3}) \\ \qquad \text{für } \gamma = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

In jedem Fall existiert also der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(-x)^\nu}{\nu^{\gamma-2}}$$

und ist von Null verschieden.

Für y_1 dagegen ist der Nullpunkt regulär; der nächste singuläre Punkt ist 1, so daß das infinitäre Verhalten von $\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}$ bestimmt wird durch Glieder der Form

$$\frac{1}{(1-x)^\nu} C\nu^\varrho (\log\nu)^l.$$

Wegen $|x| < |1-x|$ hat also sicher $\frac{y_1^{(\nu)}}{y_2^{(\nu)}}$ für $\nu = \infty$ den Grenzwert Null; daher

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0. \tag{43}$$

Aus (42) und (43) folgt dann nach dem obigen Lehrsatz:

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0}{X_1} = \dfrac{\gamma - (1+\alpha+\beta)x}{\alpha\beta} + \dfrac{\dfrac{x-x^2}{\alpha\beta}\Big|}{\Big|\dfrac{\gamma+1-(3+\alpha+\beta)x}{(\alpha+1)(\beta+1)}} \\ \quad + \dfrac{\dfrac{x-x^2}{(\alpha+1)(\beta+1)}\Big|}{\Big|\dfrac{\gamma+2-(5+\alpha+\beta)x}{(\alpha+2)(\beta+2)}} + \cdots . \end{cases}$$

Oder indem man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, mit $\alpha\beta$ multipliziert, und für X_0, X_1 ihre Werte einsetzt:

$$(45)\quad \begin{cases} \gamma - (1+\alpha+\beta)x + \dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)(x-x^2)|}{|\gamma+1-(3+\alpha+\beta)x} \\ + \dfrac{(\alpha+2)(\beta+2)(x-x^2)|}{|\gamma+2-(5+\alpha+\beta)x} + \cdots = \alpha\beta\dfrac{y_1}{y_1'} \\ \text{für } \alpha, \beta, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots;\ x \neq 0;\ \Re(x) < \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Diese Formel ist identisch mit Gleichung (10) auf S. 484 meines genannten Lehrbuches, woselbst sie zwar auch mit Hilfe der hypergeometrischen Differentialgleichung, aber auf andere Art wie hier, gewonnen wurde (auch die Fälle $\alpha, \beta, \gamma = 0, -1, -2, \ldots$ sind dort behandelt). Ich benutze diese Gelegenheit zu der Bemerkung, daß dort die Literaturangabe versehentlich weggefallen ist; die Formel findet sich bei Nörlund a. a. O.

Was den Wert des Kettenbruches (45) für $\Re(x) > \frac{1}{2}$ angeht, so kann man ihn auf gleiche Weise finden, indem man von den Integralen

$$(46)\qquad y_3 = F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-x)$$

$$(47)\quad y_4 = \begin{cases} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma;\ 1-x) \\ \qquad \text{falls } \alpha+\beta-\gamma \neq 0, 1, 2, \ldots \\ y_3 \log(x-1) + (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(b_0 + b_1(1-x) + \cdots) \\ \qquad \text{falls } \alpha+\beta-\gamma = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

wo $b_0 \neq 0$ ist, ausgeht; dabei ist dann vorauszusetzen, daß $\alpha + \beta - \gamma \neq -1, -2, -3, \ldots$ ist. Es kommt aber nichts Neues heraus, sondern die betreffende Formel ist wesentlich mit (45) identisch, indem sie aus ihr durch bloße Änderung der Bezeichnung entsteht; man hat wieder γ durch $1 + \alpha + \beta - \gamma$ und x durch $1 - x$ zu ersetzen.

Anders ist die Sache für $\Re(x) = \frac{1}{2}$. Dann sind die singulären Punkte 0 und 1 gleich nahe; wir müssen also, um das infinitäre Verhalten von $\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!}, \frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!}$ beurteilen zu können, die Integrale y_1, y_2 auch in der Umgebung der Stelle 1 kennen. Dazu dienen die Formeln

$$(48) \qquad \begin{cases} y_1 = A y_3 + B y_4 \\ y_2 = C y_3 + D y_4, \end{cases}$$

wobei wir die Konstanten A, B, C, D übrigens gar nicht zu kennen brauchen.

Da y_1 nur an der Stelle 1 singulär ist, am Nullpunkt aber regulär, so lehrt unser Satz:

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = B \frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc(\alpha + \beta - \gamma)\, \nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} + O(|1-x|^{-\nu}\, \nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}),$$

falls $\alpha + \beta - \gamma \neq 0, 1, 2, \ldots$ ist; dagegen

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = B \frac{-1}{(1-x)^{\nu}} Fc'(0)\, \nu^{-1}$$

$$+ B \frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} b_0 Fc(\alpha + \beta - \gamma)\, \nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

$$+ O(|1-x|^{-\nu} \nu^{-2} \log \nu) + O(|1-x|^{-\nu} |\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|),$$

falls $\alpha + \beta - \gamma = 0, 1, 2, \ldots$ ist. In jedem Fall kommt also:

$$(49) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(1-x)^{\nu}}{\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}} = \text{endlich}.$$

y_2 ist auch am Nullpunkt singulär, und es ergeben sich vier verschiedene Fälle:

I. $\gamma \neq 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha+\beta-\gamma \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2}$$
$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) + O(|1-x|^{-\nu}|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

II. $\gamma = 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha+\beta-\gamma \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{-1}{(-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1} + \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} a_0 Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2}$$
$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\nu^{\gamma-3}) + O(|1-x|^{-\nu}|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

III. $\gamma \neq 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha+\beta-\gamma = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2} + D\frac{-1}{(1-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1}$$
$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} b_0 Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) + O(|1-x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu)$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}|\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}|).$$

IV. $\gamma = 1, 2, 3, \ldots; \quad \alpha+\beta-\gamma = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{-1}{(-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1} + \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^\nu} a_0 Fc(\gamma-1)\nu^{\gamma-2}$$
$$+ D\frac{-1}{(1-x)^\nu} Fc'(0)\nu^{-1}$$
$$+ D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^\nu} b_0 Fc(\alpha+\beta-\gamma)\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\nu^{\gamma-3})$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}).$$

Setzt man daher

(50) $\Re(\gamma) > \Re\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)$, also $\Re(\gamma-2) > \Re(\alpha+\beta-\gamma-1)$

voraus, so kommt in allen vier Fällen, weil jetzt $|x| = |1 - x|$ ist,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(-x)^\nu}{\nu^{\gamma-2}} = \text{endlich} \neq 0. \tag{51}$$

Aus (49), (50), (51) folgt nun:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{y_1^{(\nu)}}{y_2^{(\nu)}} = 0; \quad \text{also} \lim_{\nu=\infty} \frac{X_\nu}{Y_\nu} = 0.$$

Daher gilt nach unserem Lehrsatz wieder die Formel (44), also auch (45). Man kann daher den Geltungsbereich von (45) ausdehnen auf

$$\Re(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\gamma) > \Re\left(\frac{1 + \alpha + \beta}{2}\right), \tag{52}$$

wie ebenfalls Herr Nörlund a. a. O. bereits gefunden hat, allerdings ohne Berücksichtigung der Fälle, in denen Logarithmen auftreten. Um den Wert des Kettenbruches (45) auch für

$$\Re(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\gamma) < \Re\left(\frac{1 + \alpha + \beta}{2}\right)$$

zu erhalten, hat man wieder nur nötig, γ durch $1 + \alpha + \beta - \gamma$ und x durch $1 - x$ zu ersetzen.

Beim Nachweis des Geltungsbereiches (52) haben wir übrigens bisher angenommen, daß $\alpha + \beta - \gamma$ keine negative ganze Zahl ist; denn die in (46), (47) gegebene Form der Integrale y_3, y_4 war an diese Voraussetzung gebunden. Indes bleibt unser Resultat auch ohne sie richtig; um das einzusehen, sei also

$$\alpha + \beta - \gamma = -1, -2, -3, \ldots.$$

Dann modifizieren sich die Formeln (46), (47) in folgender Weise:

$$y_3 = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 - \alpha - \beta + \gamma; 1 - x)$$
$$(= \text{regulär für } x = 1)$$
$$y_4 = y_3 \log(x - 1) + c_0 + c_1(1 - x) + c_2(1 - x)^2 + \cdots.$$

Führt man das in (48) ein, so liefert jetzt unser Satz:

$$\frac{y_1^{(\nu)}}{\nu!} = -B\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc'(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\log\nu).$$

Ferner für $\gamma \neq 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^{\nu}} Fc(\gamma-1)\,\nu^{\gamma-2}$$
$$- D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc'(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}|\nu^{\gamma-3}|) + O(|1-x|^{-\nu}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\log\nu);$$

dagegen für $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{y_2^{(\nu)}}{\nu!} = \frac{-1}{(-x)^{\nu}} Fc'(0)\,\nu^{-1} + \frac{x^{1-\gamma}}{(-x)^{\nu}} a_0\, Fc(\gamma-1)\,\nu^{\gamma-2}$$
$$- D\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{(1-x)^{\nu}} Fc'(\alpha+\beta-\gamma)\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$
$$+ O(|x|^{-\nu}\,\nu^{-2}\log\nu) + O(|x|^{-\nu}\,\nu^{\gamma-3})$$
$$+ O(|1-x|^{-\nu}\,\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\log\nu).$$

Daraus folgt bei unseren Voraussetzungen wie vorhin:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{X_\nu}{Y_\nu} = \lim_{\nu=\infty}\frac{y_1^{(\nu)}}{y_2^{(\nu)}} = 0;$$

daher gilt wieder die Formel (44), also auch (45). W. z. b. w.

Zur Theorie der Gammafunktion, besonders über ihre analytische Darstellung für grosse positive Werte des Arguments.

Von **H. Burkhardt.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Mai 1913.

I.

Will man die Hauptsätze der Theorie der Gammafunktion möglichst elementar ableiten, so empfiehlt es sich von der Darstellungsformel

$$(1) \qquad \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

auszugehen. Denn da die hier auftretende Reihe absolut und in jedem endlichen Gebiet, in dem alle Nenner von Null verschieden sind, gleichmäßig konvergiert, so kann man mit ihr alle erforderlichen Umformungen mit Leichtigkeit vornehmen, ohne diffizile Zulässigkeitsuntersuchungen ausführen zu müssen, wie solche z. B. erforderlich sind, wenn man in einem über einen unendlichen Bereich erstreckten Doppelintegral eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge vornehmen will.

Nimmt man diesen Ausgangspunkt, so hat man zunächst zu fragen, wie die beim Rückgang von der zweiten Ableitung zu der Funktion selbst auftretenden Integrationskonstanten zu wählen sind, wenn die Funktion der fundamentalen Differenzengleichung der Gammafunktion genügen soll. Dabei wird man freilich zu Reihen geführt, die den ebengenannten Vorteil der

Reihe (1) nicht mehr haben, sondern deren Glieder aus Bestandteilen sich zusammensetzen, die nicht ohne genauere Untersuchung auseinandergerissen werden dürfen und die doch zur Ableitung der gewünschten Sätze auseinandergerissen werden müssen. Man kann das dadurch umgehen, daß man sogleich neben die Gleichung (1) die folgende stellt:

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{d x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}, \tag{2}$$

die aus ihr durch Einführung eines neuen Summationsbuchstabens hervorgeht. Die Vergleichung von (1) mit (2) liefert dann zunächst die Differenzengleichung

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{d x^2} - \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} = -\frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

Ferner gibt Integration von (1) und (2) die beiden weiteren Gleichungen:

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{d x} = c_1 - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right], \tag{4}$$

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{d x} = c_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right]. \tag{5}$$

Setzt man zur Bestimmung der Integrationskonstanten in (4) $x=1$ und in (5) $x=0$, so erhält man:

$$\left(\frac{d \log \Gamma(x)}{d x}\right)_{x=1} = c_1,$$

$$\left(\frac{d \log \Gamma(x+1)}{d x}\right)_{x=0} = c_2;$$

es muß also $c_1 = c_2$ sein und die Differenzengleichung

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{d x} - \frac{d \log \Gamma(x)}{d x} = \frac{1}{x} \tag{6}$$

ist auf jeden Fall erfüllt.

Bezeichnet man ferner den gemeinsamen Wert von c_1 und c_2 mit $-\gamma$, so führt eine zweite Integration von (4) zu

$$(7) \quad \log \Gamma(x) = -\gamma x - \log x + c_3 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x}{\nu} - \log\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)\right]$$

und von (5) zu

$$(8) \quad \log \Gamma(x+1) = -\gamma x + c_4 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x}{\nu} - \log\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)\right].$$

Wird in (7) $x = 1$ und in (8) $x = 0$ substituiert, so wird erhalten:

$$\log \Gamma(1) = -\gamma + c_3 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu} - \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right] = c_4.$$

Soll andererseits die Differenzengleichung

$$(9) \qquad \log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log x$$

bestehen, so muß $c_3 = c_4$ werden, und es muß also, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll, die Konstante γ durch

$$(10) \qquad \gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu} - \log\frac{\nu+1}{\nu}\right]$$

festgelegt werden. Soll endlich noch

$$\log \Gamma(1) = 0$$

sein, so muß $c_3 = c_4 = 0$ genommen werden.

Eine dritte Integration führt dann von (7) zu

$$(11) \qquad \begin{aligned} \int_0^x \log \Gamma(x)\, dx &= -\gamma \frac{x^2}{2} - x \log x + x \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x^2}{2\nu} - (x+\nu)\log\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) + x\right] \end{aligned}$$

und von (8) zu:

$$(12) \quad \int_0^{x+1} \log \Gamma(x)\, dx = \int_{-1}^{x} \log \Gamma(x+1)\, dx = -\gamma \frac{x^2-1}{2}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x^2-1}{2\nu} - (x+\nu)\log\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) + (-1+\nu)\log\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right.$$

$$\left. + x + 1\right];$$

dabei ist in der letzten Summe für $\nu = 1$ das Glied

$$(-1+\nu)\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$$

durch Null zu ersetzen. Subtraktion liefert

$$(13) \qquad \int_x^{x+1} \log \Gamma(x)\, dx = \frac{\gamma}{2} + x \log x - x + s_1,$$

wenn nämlich mit s_1 die numerische Reihe

$$(14) \qquad s_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(\nu-1)\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)+1-\frac{1}{2\nu}\right]$$

bezeichnet wird. Diese Reihe ist mit der ähnlichen ebenfalls konvergenten Reihe

$$(15) \qquad s_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(-\nu-1)\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+1+\frac{1}{2\nu}\right]$$

durch zwei einfache Relationen verbunden, die zusammen die Summe beider Reihen zu bestimmen erlauben. Einmal nämlich kann s_1 vermöge einer Änderung des Summationsbuchstabens auch geschrieben werden:

$$s_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\nu\log\frac{\nu}{\nu+1}+1-\frac{1}{2\nu+2}\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[-\nu\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+1-\frac{1}{2\nu+2}\right];$$

also ergibt sich durch Subtraktion:

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu+2}\right]$$

und wenn noch

$$\frac{1}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu+2}\right]$$

auf beiden Seiten subtrahiert und die Gleichung (10) berücksichtigt wird:

$$(16) \qquad s_1 - s_2 = 1 - \gamma.$$

Andererseits erhält man, wenn man von der Produktdarstellung des Sinus den Logarithmus nimmt und dann gliedweise integriert:

$$(17) \qquad \int_0^1 \log \sin \pi x \, dx = \log \pi - 1 - s_1 - s_2;$$

und von dem links stehenden Integrale kann bekanntlich[1]) elementar gezeigt werden, daß sein Wert $-\log 2$ ist. Also ist:

$$(18) \quad s_1 = -\frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{2\pi}, \qquad s_2 = -1 + \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{2\pi}$$

und damit geht (13) in die Gleichung von Raabe:

$$(19) \qquad \int_x^{x+1} \log \Gamma(x) \, dx = x \log x - x + \log \sqrt{2\pi}$$

über.

II.

Soll ferner aus der Entwicklung (1) auf das Verhalten der Gammafunktion für unendlich große positive Werte des Arguments geschlossen werden, so kann dazu ein Satz dienen, den Th. Stieltjes in einem seiner letzten Briefe an Hermite[2]) ausgesprochen hat, nämlich: wenn $\varphi(x)$ eine rationale ganze Funktion vom Grade $m > 1$ ist, so wird die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(x+\nu)}$$

im Unendlichen nicht von der m^{ten}, sondern nur von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich klein. Dabei darf man natürlich nicht so ins Unendliche gehen, daß man immer wieder einer Nullstelle eines der Nenner unendlich nahe kommt; Stieltjes sagt das wohl nur deshalb nicht ausdrücklich, weil er es für selbstverständlich hält. Den Beweis scheint er sich

---

[1]) Vgl. etwa J. Thomae, Bestimmte Integrale, p. 40.

[2]) Corresp. 2, p. 401.

mit den Mitteln der Integralrechnung geführt zu haben. Der Satz gilt übrigens für jede Funktion $\varphi(x)$, die im Unendlichen von einer bestimmten (nicht notwendig ganzzahligen) Ordnung $m > 1$ unendlich wird; er kann mit denselben Mitteln bewiesen werden, durch die man die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-m}$ für $m > 1$ dartut. Um das für den vorliegenden Fall $\varphi(x) = x^2$ zu zeigen, sei zunächst

$$x = 2^p$$

genommen, wobei p eine nicht negative ganze Zahl bedeuten soll; dann lassen sich die Glieder der Reihe (1) folgendermaßen in Gruppen zusammenfassen:

$$\frac{1}{(2^p)^2} + \frac{1}{(2^p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^2} < \frac{1}{2^p},$$

$$\frac{1}{(2^{p+1})^2} + \cdots \qquad\qquad + \frac{1}{(2^{p+2}-1)^2} < \frac{1}{2^{p+1}},$$

$$\frac{1}{(2^{p+2})^2} + \cdots \qquad\qquad + \frac{1}{(2^{p+3}-1)^2} < \frac{1}{2^{p+2}}$$

usw. Die Summe der Reihe ist also für einen solchen Wert von x

$$< \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} + \cdots, \qquad \text{d. i.} < \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Analog kann gezeigt werden, daß sie $> \frac{1}{2^{p+1}}$ ist.

Um diese Resultate auch auf andere Werte von x zu übertragen, gehen wir davon aus, daß für positive x jedes Glied der Reihe (1) und also auch ihre Summe mit wachsendem x abnimmt; es ist also auch für $2^p < x < 2^{p+1}$:

$$\frac{1}{2^{p+2}} < \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} < \frac{1}{2^{p-1}}$$

und um so mehr:

$$\frac{1}{4x} < \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} < \frac{4}{x}. \tag{20}$$

Die letzte Ungleichung, in der p nicht mehr vorkommt, gilt also für jedes $x > 1$.

Unsere Funktion wird also im positiv Unendlichen, wenn sie überhaupt von einer bestimmten Ordnung Null wird, gerade von der ersten Ordnung Null. Andererseits folgt aus der Gleichung (3): wenn es einen Koeffizienten a von der Art geben soll, daß $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} - \frac{a}{x}$ dort von höherer als der ersten Ordnung Null wird, so kann dieser Koeffizient nur gleich $+1$ sein. Das veranlaßt uns, die Funktion $\frac{1}{x}$ von $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2}$ zu subtrahieren; um das bequem ausführen zu können, müssen wir nach einer zu (1) möglichst analog gebauten Entwicklung dieser Funktion suchen. Eine solche ist die bekannte:

$$(21) \qquad \frac{1}{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)}.$$

Setzen wir:

$$(22) \qquad \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} - \frac{1}{x} = r_1(x),$$

so erhalten wir, indem wir entsprechende Glieder der beiden Reihen voneinander subtrahieren:

$$(23) \qquad r_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2 (x+\nu+1)}.$$

Erneute Benutzung des Stieltjesschen Satzes und der Gleichung (3) zeigt, daß dieser Rest wie $\frac{1}{2x^2}$ Null wird. Es würde also am nächsten liegen, nunmehr $\frac{1}{2x^2}$ zu subtrahieren; doch besitzt diese Funktion keine so einfache Entwicklung der gewünschten Form[1]). Dagegen kommt man auch bei diesem

[1]) Setzt man neben die Gleichung (1) die mit ihr gleichbedeutende

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu+1)^2}$$

zweiten Schritte zu einem einfachen Resultate, wenn man die zu (2) analoge, übrigens ebenfalls bekannte Entwicklung

$$(24)\qquad \frac{1}{x\,(x+1)} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)(x+\nu+2)}$$

benutzt; setzt man:

$$(25)\qquad r_1(x) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x\,(x+1)} = r_2(x),$$

so erhält man:

$$(26)\qquad r_2(x) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)(x+\nu+2)}.$$

Bis hieher liefert das Verfahren nichts, was nicht schon bekannt wäre; aber nun läßt es sich unbegrenzt fortsetzen. Wird

$$(27)\qquad r_2(x) - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = r_3(x)$$

gesetzt und die Entwicklung

$$(28)\qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = 3\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)(x+\nu+2)(x+\nu+3)}$$

benutzt, so ergibt sich:

---

und verbindet beide mit (21), so erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{d\,x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2\,(x+\nu+1)^2},$$

die von Ch. Hermite in einem Briefe an Stieltjes (Corresp. 2, p. 399) angegeben worden ist. Nach der Art, wie Hermite sich dort ausdrückt, könnte es scheinen, als ob dabei die Integraldarstellung der von ihm mit $J''(a)$ bezeichneten Funktion das Wesentliche wäre; tatsächlich ist das nicht der Fall, die Differenzengleichung für $J''(a)$, die allein gebraucht wird, folgt unmittelbar aus der Definition von $J(a)$ und der Differenzengleichung von $\log\Gamma(x)$.

$$(29)\quad r_3(x) = 3!\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)(x+\nu+2)(x+\nu+3)}$$

usw.

Nun unterscheidet sich aber jedes Glied der Reihen (1), (23), (26), (29) ... von dem entsprechenden Glied der folgenden nur durch einen Faktor, und alle Glieder aller dieser Reihen sind für positive x positiv; nimmt man von diesen Faktoren jedesmal den kleinsten, so erkennt man, daß für alle solchen x

$$r_1(x) < \frac{1}{x+1}\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2},$$

$$r_2(x) < \frac{2}{x+2}r_1(x),$$

$$r_3(x) < \frac{3}{x+3}r_2(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

also

$$r_m(x) < \frac{1\cdot 2\ldots m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}$$

ist. Nun ist aber für positive x

$$\lim_{m=\infty}\frac{1\cdot 2\ldots m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} = 0;$$

also folgt:

Die Funktion

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}$$

läßt sich für alle positiven reellen x durch die konvergente (nicht etwa bloß semikonvergente) Fakultätenreihe

$$(30)\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2!}{3}\frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{4}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$

darstellen.

Aus allgemeinen Sätzen[1]) folgt dann, daß diese Reihe auch für alle komplexen x mit positivem reellen Bestandteil konvergiert und die Funktion $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2}$ darstellt. Da die in (30) auftretenden rationalen gebrochenen Funktionen bekanntlich die Partialbruchzerlegungen ergeben:

$$
\begin{aligned}
(31)\qquad & \frac{m!}{x(x+1)\dots(x+m)} \\
& = \frac{1}{x} - \frac{m}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{x+2} - + \cdots + \frac{(-1)^m}{x+m},
\end{aligned}
$$

in denen die Zahlenkoeffizienten die Binomialkoeffizienten sind, so läßt sich die Integration von (30) einfach ausführen; sie liefert:

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} &= \log x + a + \tfrac{1}{2}(\log x - \log(x+1)) \\
& + \tfrac{1}{3}(\log x - 2\log(x+1) + \log(x+2)) \\
& + \cdots \\
+ \frac{1}{m+1}\Big(\log x - m \log(x+1) &+ \binom{m}{2}\log(x+2) - + \cdots \\
& + (-1)^m \log(x+m)\Big) \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

Daß die hier auftretende Integrationskonstante a gleich Null sein muß, kann aus der Gleichung (9) gefolgert werden; man kann es aber auch direkt mit Hilfe eines Satzes einsehen, der als eine Ergänzung des obenerwähnten Satzes von Stieltjes für den Fall $m = 1$ angesehen werden kann und folgendermaßen lautet:

Wenn die Funktion $\varphi(x)$ im Unendlichen von der ersten Ordnung Null wird, so lassen sich zwei Konstante α, β derart bestimmen, daß die Differenz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(x+\nu)} - \alpha \log x - \beta$$

mit wachsendem x gegen Null konvergiert.

---

[1]) Vgl. z. B. N. Nielsen, Theorie der Gammafunktion, § 93.

Selbstverständlich hat man auch bei Anwendung dieses Satzes etwaigen Polen der Nenner auszuweichen.

Um ihn für den vorliegenden Fall zu beweisen und die für ihn geltenden Werte der Konstanten α, β zu bestimmen, verbinden wir mit der Gleichung (4) die folgende:

$$\log x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right)-\log\left(1+\frac{1}{x+\nu}\right)\right), \tag{33}$$

die aus (21) durch Integration zwischen den Grenzen 1 und x hervorgeht. Die Differenz kann geschrieben werden

$$\begin{aligned}&\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}-\log x\\ &=-\gamma-\frac{1}{x}+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu}-\log\frac{\nu+1}{\nu}\right]\\ &\quad+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{x+\nu-1}\right)-\frac{1}{x+\nu}\right],\end{aligned}$$

indem die hier auftretenden Reihen für sich konvergieren. In der letzten Reihe wird jedes Glied im Unendlichen von der zweiten Ordnung Null, die Reihe selbst also von der ersten; mit Rücksicht auf (10) ergibt sich also:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}-\log x\right]=0.$$

Da andererseits in der Entwicklung (32) für $x=+\infty$ alle Klammergrößen Null werden, die erste von der ersten, die folgenden von höherer Ordnung, so folgt, daß $\alpha=0$ sein muß.

Eine zweite Integration liefert dann:

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x)&=x\log x-x+\tfrac{1}{2}(x\log x-(x+1)\log(x+1)+1)\\ &+b+\tfrac{1}{3}(x\log x-2(x+1)\log(x+1)+(x+2)\log(x+2))\\ &+\cdots\\ &+\frac{1}{m+1}(x\log x-m(x+1)\log(x+1)+\cdots+(-1)^m(x+m)\log(x+m))\\ &+\cdots;\end{aligned} \tag{34}$$

dabei haben sich in den Klammern von der zweiten an die von Logarithmen freien Glieder weggehoben.

Die Integrationskonstante b könnte man so gut wie γ als eine eigentümliche Konstante ansehen; daß sie sich durch die bereits in die Analysis eingeführte Zahl π ausdrücken läßt, ist eigentlich für die Theorie selbst gleichgültig[1]). Es läßt sich am einfachsten zeigen, indem man noch eine andere Formel der Theorie der Gammafunktion heranzieht, etwa die Wallissche Eingrenzung der Zahl π oder das Legendresche Duplikationstheorem, die sich beide ebenfalls elementar ableiten lassen; auch die Raabesche Formel (19) läßt sich zu diesem Zweck benutzen. In den hier verfolgten Gedankengang fügt es sich am besten ein, wenn man zunächst aus (33) durch Integration zwischen den Grenzen 1 und x die folgende Gleichung ableitet:

$$\begin{aligned} & x \log x - x + 1 \\ = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[x \log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right) - (x+\nu) \log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) \\ & - \log\left(1 + \frac{x}{\nu+1}\right) + (\nu+1) \log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right) \Big] \end{aligned}$$

und diese mit (7) und der Definition (10) der Konstanten γ verbindet; man erhält so:

$$\begin{aligned} & \log \Gamma(x) - (x-1) \log x + x - 1 \\ = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(x+\nu) \log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) - (\nu+1) \log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right) \right]. \end{aligned}$$

Wird dazu:

$$-\frac{1}{2} \log x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right) \right]$$

addiert, so kann das Resultat in der von Chr. Gudermann gegebenen Form geschrieben werden:

1) Das hat schon de Moivre Stirling gegenüber mit Recht geltend gemacht; vgl. den Bericht von J. Eggenberger, Diss., Bern 1893, p. 35, 42 = Bern Mitt. 1893, p. 142, 149.

$$\log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - 1$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(x + \nu + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x + \nu}\right) - 1 \right]$$
$$- \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{\nu + 1}\right) - 1 \right],$$

indem jede der beiden Summen für sich konvergiert. Die erste von ihnen erfüllt die Voraussetzungen des Stieltjesschen Satzes[1]) bzw. seiner p. 388 gegebenen Verallgemeinerung; man hat also:

$$\lim_{x \to +\infty} [\log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - 1] = - s_3,$$

wenn mit s_3 die Summe

$$s_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - 1 \right] \tag{35}$$

bezeichnet wird. Diese kann in

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(\nu + 1) \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - 1 - \frac{1}{2\nu} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \right]$$

umgeformt werden, ist also nach (10), (15) und (18) gleich $1 - \log \sqrt{2\pi}$. Also ergibt sich schließlich

$$\lim_{x \to +\infty} [\log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x] = \log \sqrt{2\pi}$$

und folglich muß die Konstante b in (34) gleich $\log \sqrt{2\pi}$ sein.

Übergang von Logarithmus zum Numerus gibt schließlich noch die Darstellung der Gammafunktion selbst durch das unendliche Produkt

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^x e^{-x} \sqrt{\frac{x^x e}{(x+1)^{x+1}}} \sqrt[3]{\frac{x^x (x+2)^{x+2}}{(x+1)^{2(x+1)}}} \times \tag{36}$$
$$\sqrt[4]{\frac{x^x (x+2)^{3(x+2)}}{(x+1)^{3(x+1)} (x+3)^{x+3}}} \sqrt[5]{\frac{x^x (x+2)^{6(x+2)} (x+4)^{x+4}}{(x+1)^{4(x+1)} (x+3)^{4(x+3)}}} \cdots$$

[1]) Durch diesen Satz erledigt sich auch das von Gudermann, Journ. f. Math., 29, p. 211 ausgesprochene Bedenken, wieso seine Formel und die Stirlingsche zugleich richtig sein könnten.

Sie teilt mit der Stirlingschen Formel den Vorzug, das Verhalten der Gammafunktion für unendlich große positive Argumentwerte erkennen zu lassen, ist aber wie die vorangehenden Entwicklungen für alle x mit positivem reellen Bestandteil wirklich konvergent, nicht bloß semikonvergent. Übrigens treten in ihr keine Bernoullischen oder Stirlingschen Zahlen, sondern nur Binomialkoeffizienten auf. Beim Vergleich mit der Stirlingschen Formel beachte man, daß asymptotisch

$$(x + p)^{x+q} \sim x^{x+q} e^{p},$$

und daß folglich die in (35) auftretende Quadratwurzel asymptotisch gleich $\frac{1}{\sqrt{x}}$, jede der folgenden Wurzelgrößen aber asymptotisch gleich 1 ist.

Über Schädelnähte und basale Fugen bei Menschen und Menschenaffen.

Von J. Ranke.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juni 1913.

E. Selenka[1]) macht über die „Obliteration der Nähte am Affenschädel, speziell am Schädel des Orangutan", nur die kurze, durch eine tabellarische Zusammenstellung illustrierte Mitteilung:

„Anhangsweise sei hier noch der Rhythmus erwähnt, in welchem die äußeren Schädelnähte nach Vollendung der zweiten Dentition zu verschwinden pflegen. Die Synostosen geschehen in beiden Geschlechtern in ungefähr der gleichen Zeitfolge."

„Als Maß des Alters der Schädel wurde im allgemeinen der Grad der Abnutzung der vorderen Molaren angenommen, was freilich nicht unbedingt richtig ist, weil die Zähne einiger Gebisse auffallend weich sind und sich außergewöhnlich rasch abgenutzt haben."

„Die Beobachtung lehrt, daß die drei zuletzt genannten Suturen oberhalb großer diploischer Hohlräume liegen, deren Erweiterung geschehen kann, solange sie offen bleiben! Die Innennähte dieser Suturen ossifizieren jedoch fast durchweg schon früher."

Die drei erwähnten Suturen sind: Sphenooccipitalnaht, Squamooccipitalnaht, Squamoparietalnaht. Außerdem wurden noch geprüft: Lambdanaht, Sagittalnaht, Kranznaht, Sphenofrontalnaht.

---

[1]) E. Selenka, Menschenaffen, I. Lieferung: Rassenschädel und Bezahnung des Orangutan. Wiesbaden 1898, S. 27 ff.

Die Zählungen führte Selenka an 22 männlichen und 22 weiblichen erwachsenen Orangutan aus. Die Verwachsung der Sphenofrontalnaht zeigte kein regelmäßiges Ansteigen mit dem zunehmenden Alter. Von den drei großen Schädeldachnähten verstreicht zuerst die Lambdanaht, dann die Sagittalnaht und ziemlich viel später die Kranznaht. Die Sphenobasilarnaht war, mit einer einzigen Ausnahme, noch offen. während die drei großen Schädelnähte schon verstrichen waren, in zehn Fällen, in acht Fällen war sie mit den drei großen Schädelnähten verstrichen. In neun Fällen war sie offen gleichzeitig mit den drei Nähten; sieben Schädel zeigten die Sphenooccipitalfuge offen und nur die Lambdanaht verstrichen, bei zwölf Schädeln waren Lambdanaht und Sagittalnaht verwachsen und die Sphenobasilarfuge noch offen. Unter den 44 Schädeln erwachsener Orangutan zeigten nur neun Verwachsung der Sphenooccipitalfuge = 20 %, bei 80 % war die genannte Fuge, die Basalfuge, noch offen, obwohl die Zahnung vollendet erschien; unter 22 männlichen Schädeln war sie dreimal, unter 22 weiblichen sechsmal geschlossen. Nach dem Erscheinen der dritten Molaren wächst der Eckzahn bei den Männchen nach Selenka noch jahrelang weiter, die noch offene Basalfuge gestattet dafür noch Wachstum, besonders Verlängerung der Schädelbasis zu einer Zeit, wenn das Hirnschädelwachstum durch Verschluß der großen Nähte schon beendigt ist.

Die Beobachtungen von Bolk[1]) an neun erwachsenen Orangutan-Schädeln mit vollkommenem Dauergebiß (l. c. S. 112) stimmen im allgemeinen mit denen von Selenka insofern, als unter den neun Schädeln zwei eine vollkommen, einer eine teilweise offene Basalfuge besitzen; bei sechs Schädeln ist sie verwachsen. Bei allen neun ist die Sutura lambdoidea verstrichen, ebenso, mit nur einer Ausnahme (mit nur teilweiser Verstreichung), bei allen die Sutura sagittalis; dagegen ist bei

---

[1]) Prof. L, Bolk, Amsterdam, Über die Obliteration der Nähte am Affenschädel, zugleich Beitrag zur Kenntnis der Nahtanomalien. Zeitschrift f. Morphologie u. Anthropologie, Bd. XV, Heft 1, S. 1—206, 1912.

einem die Kranznaht noch vollkommen, bei den übrigen fünf noch teilweise offen. Die Sutura squamosa ist nur bei einem von den neun Schädeln vollkommen verschlossen, bei dreien ganz, bei fünfen noch teilweise offen. Sehr charakteristisch ist das Verhalten der Sutura occipito-mastoidea: nur drei Schädel weisen Verschluß derselben auf, bei den übrigen sechs ist noch keine Spur von Verwachsung nachzuweisen.

Die Reihenfolge des Nahtverschlusses ist sonach wie bei Selenka: Lambda-, Sagittal-, Kranznaht. In keinem Fall ist vor Durchbruch der dritten Molaren die Basalfuge geschlossen, sie ist nach Herstellung des Dauergebisses bei drei Schädeln von neun, also in 33%, noch ganz oder teilweise offen.

In dieser Beziehung ergibt sich sonach ein bemerkenswerter Unterschied zwischen dem Schädelwachstum des Orang-utan und des Menschen. Bei dem Menschen erfolgt in der weit überwiegenden Anzahl der Fälle der Verschluß der Basalfuge vor Vollendung des Dauergebisses. C. Toldt sagt in seinem Lehrbuch der Anatomie[1]): Die völlige knöcherne Verschmelzung des Hinterhauptsbeins mit dem Keilbein pflegt zwischen dem 16. und 18. Lebensjahr zu erfolgen, während der dritte Molar, der Weisheitszahn, zwischen 18. und 25. Lebensjahr erscheint. Die Angaben der Autoren schwanken in Betreff der beiden Zeitpunkte etwas. H. Welcker[2]) setzt den Verschluß der Basalfuge zwischen 16. und 20. Lebensjahr, ihm schließt sich Graf von Spee[3]) an und auch C. Toldt[4]) gab früher für den Verschluß der Basalfuge das 16. bis 20. Lebensjahr und für den Durchbruch der Weisheitszähne das 18. bis 24. Lebensjahr an. Aber das ist gewiß, daß bei dem Menschen ein

---

[1]) v. Langer-Toldt, Lehrbuch der systematischen und topographischen Anatomie, VI. Aufl., 1897, S. 65.

[2]) H. Welcker, Untersuchung über das Wachstum und den Bau des menschlichen Schädels. Leipzig 1868.

[3]) F. Graf von Spee, Kopf, in: Handbuch der Anatomie des Menschen von K. von Bardeleben. Jena 1896.

[4]) K. Toldt, Die Knochen in gerichtsärztlicher Beziehung, in: J. Maschka, Handbuch der gerichtlichen Medizin, 1882, III. Bd.

Schädel mit vollständig ausgebildetem Dauergebiß und gleichzeitig noch offener Basalfuge zu den ausgesprochenen Seltenheiten gehört. Gelegentlich muß aber auch beim Menschen nach den mitgeteilten Erfahrungen der Fall zur Beobachtung kommen. Ich kann einen Schädel mit vollkommenem Dauergebiß und offener Basalfuge hier vorführen; es ist ein „Negerschädel" aus der Zoologisch-zootomischen Sammlung des Staates.

In Beziehung auf den verspäteten Verchluß der Basalfuge verhält sich nach den Beobachtungen von Bolk der Gorilla-Schädel dem Orangutan-Schädel recht ähnlich. Bei zwei Schädeln mit vollkommenem Dauergebiß, unter zwölf vollkommen

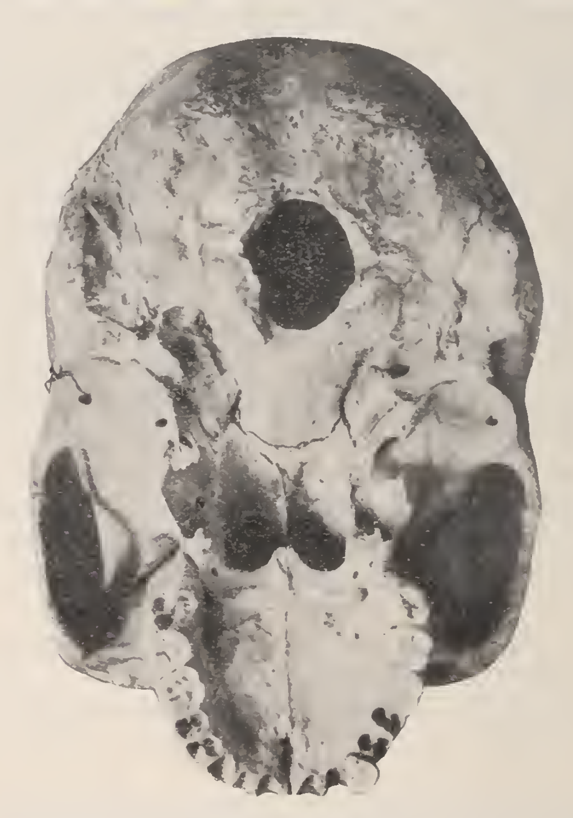


Fig. 1. Abbildung, Negerschädel mit Dauergebiß und offener Basalfuge.

erwachsenen, war die Basalfuge noch offen, während bei beiden die Lambdanaht vollkommen verschlossen war, ebenso bei beiden die Sagittalnaht, dagegen war die Kranznaht noch teilweise offen. Die Lambdanaht war bei allen zwölf erwachsenen Schädeln verwachsen, ebenso die Sagittalnaht bei elf ganz, bei einem teilweise; dagegen war die Kranznaht bei einem Schädel noch ganz, bei zweien — jenen beiden mit offener Basalfuge — noch teilweise offen. Danach erscheint für die drei großen Schädeldachnähte die Reihenfolge des Verschlusses wie bei Orangutan: Lambda-, Sagittal-, Kranznaht. Die Sutura occipito-mastoidea, „welche sich bei den übrigen Affen meistenfalls durch ihre Persistenz auszeichnet und wenigstens zuletzt sich schließt“, fand Bolk[1]) unter den zwölf erwachsenen Gorilla-Schädeln nur bei 5 = 42,6 % (ganz (zwei) oder teilweise (drei)) offen, also bei etwas weniger als der Hälfte. Ziemlich ebenso verhält sich die Sutura squamosa, bei fünf Schädeln war sie noch ganz (drei) oder teilweise (zwei) offen. „Das Wichtigste ist, daß die Obliteration an je der vier großen Nähte schon angefangen, ja schon beendigt sein kann, während die Basalfuge noch ganz offen ist.“

Meine neuen Beobachtungen an Gorilla und Schimpanse.

Gorilla-Schädel.

Ich habe neun vollkommen erwachsene, zum Teil wahrhaft riesenmäßige Gorilla-Schädel mit vollkommenem Dauergebiß prüfen können[2]). Von diesen zeigen drei (zwei männlich, einer weiblich) keine Nahtspuren mehr, jeder Schädel bildet einen einheitlichen Knochen, auch die Basalfuge ist vollkommen verstrichen. Bei einem männlichen Schädel ist die Basalfuge noch vollkommen offen, aber alle vier großen Hirnschädelnähte: Kranz-, Sagittal-, Lambda-, Schuppennaht vollkommen

[1]) Bolk, l. c. S. 124.

[2]) Über die Herkunft der untersuchten Schädel siehe S. 403 und J. Ranke, Über das Parietale und die Verknöcherung des Schädeldachs bei Affen. Sitzungsber. d. math.-phys. Kl., 1913, S. 223.

verstrichen, dagegen die Sutura occipito-mastoidea noch offen. Bei einem zweiten männlichen Schädel konnte die Basalfuge nicht genau untersucht werden, doch scheint sie unverschlossen gewesen zu sein (?), dagegen war von all den genannten Schädelnähten auch nur die letzte, die Sutura occipito-mastoidea, noch nicht verstrichen. Bei einem dritten, ebenfalls männlichen Schädel, bei welchem die Basalfuge noch teilweise offen war, war von den vier großen Schädelnähten auch die Schuppennaht noch nicht vollkommen verstrichen, ebenso wieder die Sutura occipito-mastoidea. Von zwei männlichen und einem weiblichen Schädel mit Verschluß der Basalfuge zeigte einer die Schuppennaht noch ganz, zwei teilweise offen; der eine weibliche Schädel besaß neben der teilweise offenen Schuppennaht noch eine intakte Sutura occipito-mastoidea; einer der beiden männlichen Schädel hatte neben der vollkommen offenen Schuppennaht eine nur teilweise verschlossene Sutura occipito-mastoidea, bei dem zweiten männlichen Schädel fand sich neben der nur teilweise verstrichenen Schuppennaht die Sutura occipito-mastoidea rechts teilweise, links vollkommen offen.

Unter den neun Schädeln hatten zwei resp. drei die Basalfuge noch ganz oder teilweise offen, während die drei großen Schädeldachnähte vollkommen verstrichen waren, dagegen war bei allen dreien die Sutura occipito-mastoidea noch offen, bei zwei ganz, bei einem teilweise. Bei verstrichener Basalfuge zeigten drei Schädel (zwei männlich, einer weiblich) von den Schädeldachnähten nur die Schuppennaht (zwei teilweise, einer ganz) noch offen, das gleiche Verhältnis ergibt sich für die Sutura occipito-mastoidea (einer ganz, zwei teilweise).

Auch beim Gorilla kann sonach die Basalfuge auch nach meinen Beobachtungen noch offen sein, während die drei großen Hirnschädelnähte vollkommen verstrichen sind, dagegen ist in einem Fall die Schuppennaht noch teilweise und die Sutura occipito-mastoidea noch ganz oder wenigstens noch teilweise offen.

Gorilla-Schädel mit Dauergebiss

Verschluß der Schädelnähte

Nummer	Bezeichnung	Geschlecht	Basalfuge	Kranznaht	Sagittalnaht	Lambdanaht	Schuppennaht	Sutura occipito-mastoidea
1.	8.	♂	—	—	—	—	—	—
2.	9.	♀	—	—	—	—	—	—
3.	3. Z. Z.	♂	—	—	—	—	—	—
4.	5.	♂	|	—	—	—	—	|
5.	6.	♂	| (?)	—	—	—	—	|
6.	1. Z. Z.	♂	×	—	—	—	×	×
7.	2. Z. Z.	♂	—	—	—	—	|	×
8.	4. Z. Z.	♂	—	—	—	—	× links |	rechts ×
9.	5. Z. Z.	♀	—	—	—	—	×	|

Bemerkungen. Bezeichnung nach Bolk: | offen, — verschlossen, × teilweise offen, Z. Z. Schädel stammt aus der Zoologisch-zootomischen Sammlung des Staates. Die unbezeichneten Schädel gehören der Anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates.

Schimpanse-Schädel mit Dauergebiss.

Herr Bolk macht keine näheren Angaben über den Schimpanse-Schädel, von dem er sechs Exemplare verglichen hat. Meine Beobachtungen beziehen sich auf zwölf Schimpanse-Schädel mit Dauergebiß, davon fünf weiblichen, drei männlichen und vier unbekannten Geschlechts, welche ich der männlichen Gruppe anreihe.

Von den weiblichen Schädeln mit Dauergebiß zeigen zwei noch vollkommen offene Basalfuge, bei dem einen sind alle großen Schädelnähte und auch die Sutura occipito-mastoidea noch unverschlossen, bei dem zweiten beginnt die Schuppennaht zu verstreichen, Lambdanaht und Sutura occipito-mastoidea konnten, da der Schädel defekt, nicht beobachtet werden. Die

drei übrigen weiblichen Schädel zeigten die Basalfuge verwachsen, bei allen dreien waren alle großen Schädelnähte verstrichen, bei einem auch die Sutura occipito-mastoidea, die bei den beiden anderen noch teilweise offen war.

Von den drei sicher männlichen Schimpanse-Schädeln hatten zwei eine noch offene Basalfuge, gleichzeitig zeigten sich auch alle großen Hirnschädelnähte sowie die Sutura occipito-mastoidea offen. Bei dem dritten war die Basalfuge verschlossen und mit ihr die großen Hirnschädelnähte, mit Ausnahme der Kranznaht, die noch ganz und der Sutura occipito-mastoidea, die noch teilweise offen ist.

Von den Schädeln unbekannten Geschlechts hatten zwei noch offene Basalfuge, der eine zeigte von den großen Schädelnähten die Kranz- und die Sagittalnaht noch offen, die Lambdanaht ganz, die Schuppennaht teilweise verwachsen, an der Sutura occipito-mastoidea waren noch keine Verwachsungsspuren zu bemerken. Bei dem zweiten, bei dem übrigens die Basalfuge nicht sicher zu beobachten war, waren noch alle die hier geprüften Schädelnähte ganz oder teilweise unverschlossen. Zwei Schädel mit vollkommen verwachsener Basalfuge verhielten sich sehr verschieden. Während bei dem einen noch alle Schädelnähte offen waren, nur an der Lambdanaht hatte die Verwachsung begonnen, waren bei dem zweiten die Sagittal- und die Lambdanaht ganz, die Kranznaht, Schuppennaht und Sutura occipito-mastoidea teilweise verschlossen.

Nach der Vollendung des Dauergebisses kann bei den weiblichen wie männlichen Schimpanse-Schädeln die Basilarfuge und mit ihr alle hier geprüften Schädelnähte noch offen sein.

Die drei weiblichen Schädel mit Verschluß der Basalfuge zeigen keine Spur mehr von den großen Schädelnähten, so daß jeder von ihnen als ein im wesentlichen einheitliches Knochengebilde erscheint; bei einem von ihnen ist auch die Sutura occipito-mastoidea ganz, bei den beiden anderen wenigstens teilweise verwachsen.

Mein Material ist zu klein für sichere Schlüsse, aber es erscheint doch bemerkenswert, daß bei drei von den fünf weib-

lichen Schädeln die Konsolidierung zu einem einheitlichen Knochengebilde ganz oder beinahe ganz erfolgt ist, während keiner der männlichen Schädel oder Schädel unbestimmten Geschlechts eine so weitgehende Nahtvereinigung zeigt.

Schimpanse-Schädel mit Dauergebiss.

Nummer	Bezeichnung	Geschlecht	Basalfuge	Kranznaht	Sagittalnaht	Lambdanaht	Schuppennaht	Sutura occipito-mastoidea	
	I. Weibliche Schädel:								
1.	35. Z. Z.	♀	|	|	|	|	|	|	1. Von Oberleutnant Bertram.
2.	8.	♀	|	|	|	?	×	?	
3.	38/36. Z. Z.	♀	—	—	—	—	—	×	3. Von demselben, Südkamerun.
4.	2.	♀	—	—	—	—	—	×	
5.	Z. Z.	♀	—	—	—	—	—	—	5. Von demselben.
	II. Männliche Schädel und Schädel unbestimmten Geschlechts:								
6.	21. Z. Z.	♂	|	|	|	|	|	|	6. Von Dr. Martin, Kongo.
7.	23. Z. Z.	♂	|	|	|	|	|	|	7. Von Frank, Kongo.
8.	22. Z. Z.	♂	—	|	—	—	—	×	8. Von Zimmerer, Kamerun.
9.	5.	?	|	|	|	—	×	—	
10.	4.	?	—	|	|	×	|	|	
11.	3.	?	—	×	×	—	×	×	
12.	1.	?	?	×	|	×	×	|	12. Tschego nach Haberer, Basis zerbrochen.

Bemerkungen. Die Schädel mit Nr. 2, 4, 9, 10, 11, 12 sind Geschenke von Professor Dr. Haberer an die Anthropologisch-prähistorische Sammlung des Staates.

Die Lambdanaht ist in zwei Fällen geschlossen, während die anderen Schädelnähte noch ganz oder teilweise offen sind; die Kranznaht ist noch offen, obwohl alle anderen Nähte bis auf die Sutura occipito-mastoidea, diese teilweise, geschlossen sind. Das entspricht den Verhältnissen des Nahtverschlusses

bei Orang und Gorilla, über den Verschluß der Sagittalis geben meine Aufzeichnungen keinen Aufschluß. Bei den Schädeln männlichen und unbestimmten Geschlechts fand sich, wie gesagt, keiner mit so vollkommenem Verlust aller Schädelnähte, wie wir einen solchen bei drei weiblichen Schädeln konstatierten. Das scheint nicht dafür zu sprechen, daß bei dem Schimpansen-Weib die Schädelnähte persistenter sind als bei dem Schimpanse-Mann. Auch bei Schimpanse bleibt nach dem Verschluß der Basalfuge und aller oder beinahe aller Schädelnähte noch die Sutura occipito-mastoidea offen, so daß der Schädel an dem entsprechenden Abschnitt der Basis noch weiter wachsen kann. Nr. 10, bei welchem die Basalfuge geschlossen, dagegen die Schädelnähte noch offen sind, nähert sich dadurch menschlichen Verhältnissen bemerkenswert an.

Schädel von Hylobates, niederen Affen und Menschen.

Über Hylobates-Schädel habe ich zu dem vorliegenden Zweck keine neuen Untersuchungen angestellt, da das von Bolk bearbeitete und aus der Literatur beigezogene Material, das sich zum Teil auch auf Schädel unserer Sammlung bezieht, genügend groß ist, um bezüglich den uns hier vor allem beschäftigenden Fragen exakte Antworten zu geben.

Bolk faßt die Resultate über „Siamang“ (Hylobates) l. c. S. 107 zusammen: Bei Siamang obliteriren die Nähte des Schädeldachs ungefähr gleichzeitig mit der basalen Fuge. Es fehlen Geschlechtsdifferenzen. Mit der Synchondrosis basilaris schließen sich wenigstens drei der großen Nähte am Ende der juvenilen Periode, die vierte folgt bald darauf, „nur die Sutura squamosa folgt etwas später“. — S. 123 heißt es: Die Sutura occipito-mastoidea „gehört zu jenen Nähten, welche sich im allgemeinen am längsten offen erhalten, nicht selten sogar einen permanenten Charakter tragen“, sie schließt sich bei fast allen Affen zuletzt, beim Gorilla ist sie aber „bei erwachsenen Schädeln meist verstrichen“. Siehe die Tabelle S. 403.

Soviel ich sehe, hat Emil Selenka[1]) zuerst energisch auf das Offenbleiben der Sutura occipito-mastoidea bei Affenschädeln (1899) hingewiesen. Er bringt sie, wie oben schon angeführt, in Beziehung zu den im Schläfenbein stets ausgebildeten, am mächtigsten bei Schimpanse und Gorilla aufgetriebenen, diploischen Räumen: „ihre Bedeutung ist offenbar, den Muskeln große Ansatzflächen zu schaffen, ohne den Schädel stark zu beschweren. Da das Wachstum dieser diploischen Buckel bis ins Alter hineinreicht, erhält sich die äußere Schläfenbein-Occipitalnaht am längsten unter allen Schädelnähten“.

Eine vortreffliche Serie von 410 Schädeln stand Bolk von einer niederen katarrhinen Affen-Spezies: Macacus cynomolgus für seine Untersuchung zur Verfügung. Die Ergebnisse stützen sich sonach auf ein wahrhaft großes Material. Für die folgenden Betrachtungen interessieren uns namentlich folgende Sätze: l. c. S. 54. „Die Synostose ist beim weiblichen Geschlecht intensiver als beim männlichen“, es gilt das für die sphenobasale Fuge. Bei den männlichen erwachsenen Schädeln war die Naht noch ganz offen in 30 %, bei den weiblichen nur in 18 %. „Entweder bleibt (sonach) die Schädelbasis beim männlichen Macacus länger wachsen als beim weiblichen, oder es kommt die Eruption des Dauergebisses schneller zum Abschluß als beim Weibchen.“ Das Resultat sei so zu deuten: daß beim Weibchen von Macacus cynomolgus die Hirnschädelnähte länger offen bleiben als beim Männchen, mit Ausnahme vielleicht der sphenobasalen Fuge. „Für den Menschen ist das gleiche Resultat erzielt worden durch Untersuchungen von Schwabe und besonders von Frédéric.“

Bei Frédérik[2]) finde ich übrigens keine eingehende Mitteilung über die Verwachsung der Basalfuge (siehe unten).

---

[1]) E. Selenka, Menschenaffen, II. Lieferung: Schädel des Gorilla und Schimpanse. Wiesbaden 1899, S. 156.

[2]) J. Frédérik, Untersuchungen über die normale Obliteration der Schädelnähte. Zeitschrift f. Morph. und Anthropol. IX, Heft 3, S. 373 bis 456. 1906.

Über die Sutura occipito-mastoidea sagt Bolk (l. c. S. 77): „Einen partiellen Verschluß der Sutura occipito-mastoidea fand ich bei 121 männlichen Macacus-Schädeln in 10%, d. h. 22 mal, bei 110 weiblichen Schädeln nur 5 mal.“

Sehr interessant ist seine tabellarische Vergleichung zwischen männlichen und weiblichen Macacus-Schädeln, die ich hier in zusammengezogener Form wiederhole.

Macacus-Schädel,

männlich 121 Schädel, weiblich 111 Schädel.

Das Männchen besitzt 30% offene Basalfuge (35 Fälle).

Das Weibchen besitzt 16% offene Basalfuge (18 Fälle).

Das Männchen besitzt 52% verschlossene Basalfuge (63 Fälle).

Das Weibchen besitzt 66% verschlossene Basalfuge (73 Fälle).

Das Männchen besitzt 47% = 227 offene Nähte des Schädeldachs [1]).

Das Weibchen besitzt 61% = 268 offene Nähte.

Das Männchen besitzt 28% = 137 verschlossene Nähte.

Das Weibchen besitzt 18% = 79 verschlossene Nähte.

Das Weibchen hat mehr offene Schädelnähte

Das Weibchen hat weniger verschlossene Schädelnähte.

Dagegen ist bei den erwachsenen männlichen Macacus-Schädeln die Basalfuge beinahe doppelt so häufig (30% : 16%) offen wie bei den erwachsenen Weibchen. Bei dem Männchen ist sonach, wie sich uns daraus ergibt, die Wachstumsmöglichkeit für die Schädelbasis noch vielfach gegeben zu einer Zeit, in welcher bei dem weiblichen Schädel diese Wachstumsmöglich-

---

[1]) Die Nähte sind: Kranz-, Pfeil-, Lambda-, Schuppen-Naht. — Die teilweise verschlossenen Nähte sind hier weggelassen, für die Basalfuge ist die Anzahl der teilweise verschlossenen Nähte: männlich 23, weiblich 19.

keit in der überwiegenden Anzahl der Fälle schon beendet ist. Für unsere folgenden Betrachtungen an Orangutan-Schädeln sind diese gesicherten Ergebnisse an Schädeln eines niederen Affen von hoher Wichtigkeit.

Aus den Ergebnissen, welche Frédéric an Menschenschädeln gewonnen hat, sind hier noch hervorzuheben (l. c. S. 455): „Die größten Ossifikationsmittel besitzen die Sutura sagittalis, coronalis und spheno-frontalis, dann kommen die Sutura spheno-parietalis, lambdoidea und mastoidea-occipitalis, zuletzt die Sutura squamosa, spheno-temporalis und parieto-mastoidea. Die drei letzteren Nähte werden häufig noch im hohen Alter unverwachsen angetroffen. Am häufigsten beginnt die Synostose am Obelion in der S. sagittalis, seltener in der Pars temporalis der S. coronalis oder in der S. spheno-frontalis. In letzterem Fall kommt aber die S. coronalis direkt nachher. Ausnahmsweise fällt der Beginn auf eine andere Naht, z. B. S. mastoidea-occipitalis.“ (l. c. S. 442): „Wie verhält sich die Nahtobliteration am weiblichen Schädel?“ „Für die Europäer haben Picozzo und Schwalbe nachgewiesen, daß die „Nähte beim weiblichen Geschlecht sich später und seltener schließen als beim männlichen“. Frédérics Tabellen zeigen, daß in der Tat bei den Frauen viel mehr Nahtabschnitte und ganze Nähte auch im höheren Alter frei sind als bei den Männern. Sogar im Greisenalter zeigen mehrere weibliche Schädel keine oder nur sehr geringe Spuren von Verwachsung. Es steht fest, daß beim Weib die Ossifikationstendenz geringer ist als beim Manne.“

„Bei den Elsässer, Lothringer, Badener und Württemberger Weibern ist die Sutura squamosa keinmal, die Pars asterica der Lambdoidea ein einziges Mal, die Sutura parieto-mastoidea nur bei einer 84jährigen Elsässerin, auf der linken Seite in geringem Maße, desgleichen die S. spheno-temporalis nur einmal; die S. sagittalis nicht vor dem 26. (bei Männern im 24.), die Lambdoidea nicht vor dem 43. (bei Männern im 27.), die Coronalis nicht vor dem 25. (bei Männern schon im 21.), die S. spheno-frontalis in ihrem orbitalen Teil nicht

vor dem 25. (bei Männern nicht vor dem 27.), die S. mastoidea-occipitalis nicht vor dem 24. (bei Männern gewöhnlich nicht vor dem 31., ausnahmsweise schon im 21.), die S. spheno-parietalis nicht vor dem 32. (bei Männern nicht vor dem 36.) Lebensjahr verwachsen. Die Pars complicata obliteriert bei Frauen erst von 50—60 Jahren."

Die Sutura mastoidea-occipitalis (= occipito-mastoidea), welche bei Affenschädeln im allgemeinen wenig Tendenz zur Ossifikation zeigt, schließt sich nach dem Vorstehenden beim menschlichen Weibe beträchtlich viel früher (24. Lebensjahr) als beim Manne (31. Lebensjahr), was für eine längere Wachstumsperiode der Schädelbasis bei dem Manne spricht.

Die Reihenfolge der Ossifikation ist sonach bei dem
Menschen: Sagittal-, Coronal-, Lambdanaht;
Affen: Lambda-, Sagittal, Coronalnaht.

Neue Beobachtungen am Orangutan-Schädel.

Die Sphenobasilarfuge der Orangutan-Schädel.

Unter 174 Orangutan-Schädeln mit Dauergebiß, welche nach Selenka als erwachsen, alt und uralt gruppiert werden können, fand ich 99 Schädel, deren Sphenobasilarfuge noch ganz oder teilweise offen war, und 75, d. h. 43,6 %, bei welchen diese Fuge, die Basalfuge, vollkommen verwachsen war. In mehr als der Hälfte aller Schädel war, was beim Menschen so selten zu beobachten ist, die Basalfuge nach Erscheinen der dritten Molaren resp. nach relativem Abschluß der zweiten Zahnung noch nicht ossifiziert und damit das Längenwachstum der Schädelbasis noch nicht abgeschlossen.

Dem Geschlecht nach gehörten von den 174 erwachsenen Orangutan-Schädeln dieser Reihe nach den genauen an der frischen Leiche gemachten Aufzeichnungen Selenkas 106 dem weiblichen, 68 dem männlichen Geschlechte an. Unter den 106 weiblichen Schädeln zeigten 60, d. h. 56,6 %, vollkommene Verwachsung der Sphenobasilarfuge, dagegen von den 68 männlichen Schädeln nur 15, d. h. 25,0 %. Dieser auf-

fallende Unterschied der Geschlechter tritt noch anschaulicher hervor bei Vergleichung der von Selenka aufgestellten verschiedenen Lebensaltergruppen: erwachsen, alt und uralt.

Übersichtstabelle.

Verwachsung der Sphenobasilarfuge:

	bei weiblichen Schädeln	bei männlichen Schädeln
erwachsen . .	40,0 %	9,1 %
alt	61,5 „	9,1 „
uralt . . .	85,7 „	60,0 „

Im einzelnen ergab die Untersuchung folgendes:

Haupttabelle.

Verwachsung der Sphenobasilarfuge an 106 weiblichen und 60 männlichen Orangutan-Schädeln bei

	erwachsenen		alten		uralten	
	♀	♂	♀	♂	♀	♂
Skalau	13 : 2	13 : 1	15 : 8	5 : 3	16 : 10	4 : 3
Dadap	2 : 0	3 : 0	6 : 4	3 : 0	5 : 5	8 : 4
Bogau	2 : 2	2 : 0	5 : 3	2 : 0	2 : 2	— —
Landak	3 : 1	3 : 1	3 : 3	— —	4 : 4	1 : 1
Batangtu	2 : 2	— —	4 : 2	8 : 1	— —	— —
Berantau	1 : 0	— —	2 : 1	2 : 1	— —	— —
Rantei	3 : 2	3 : 0	2 : 2	— —	1 : 1	— —
Genepai	5 : 0	5 : 1	2 : 1	— —	— —	2 : 1
B. Bara	6 : 5	2 : 0	— —	— —	— —	— —
Ketungau	1 : 1	1 : 0	— —	— —	— —	— —
Kapuas	2 : 1	1 : 0	— —	— —	— —	— —
	40 : 16	33 : 3	39 : 24	20 : 5	28 : 22	15 : 9
	♀=40,0%	♂=9,1%	♀=61,5%	♂=25%	♀=85,7%	♂=60%

Bei den weiblichen Orangutan ist die Verwachsung der Sphenobasilarfuge = Basalfuge schon im jungerwachsenen Alter bei 40% eingetreten, bei den männlichen dagegen erst bei 9%. Bei den weiblichen beginnt sonach die Verwachsung dieser für

das Wachstum und Formgestaltung des Schädels so wichtigen Fuge früher als bei den männlichen und hat im mittleren Alter, bei den oben in der Tabelle als alt bezeichneten weiblichen Schädeln, schon die gleiche Anzahl (61,5%) erreicht wie bei den männlichen im höchsten Alter, in der Tabelle als uralt bezeichnet (60%). Im höchsten Alter ist bei fast allen Schädeln der weiblichen Orangutan (85,7%) die Verwachsung der Basalfuge eingetreten, während an den uralten männlichen Schädeln noch bei 40% die Fuge offen ist.

Für das Wachstum der Schädelbasis ist der früher oder später erfolgende Verschluß der Basalfuge von hoher Bedeutung. Bei dem männlichen Orangutan kann die Schädelbasis bei offener Basalfuge längere Zeit noch an Länge zunehmen, wodurch z. B. für die nach Selenkas Beobachtungen noch jahrelang nach dem Durchbruch fortwachsenden Eckzähne der erforderliche Platz im Kiefer geschaffen werden kann. Mit dem Durchbruch der dritten Molaren ist bei dem männlichen Orangutan im Gegensatz gegen den Menschen das Dauergebiß noch nicht vollkommen entwickelt, da der Eckzahn, wie gesagt, noch fortwächst und entsprechend mehr und mehr Raum im Kiefer beansprucht. Die weiblichen Eckzähne bleiben nicht nur viel kleiner als die männlichen, sie beenden auch ihr Wachstum früher, so daß ein weiteres Längenwachstum der Schädelbasis für die Ausgestaltung des Gebisses nicht mehr notwendig erscheint.

Die Behauptung, daß sich bei den beiden Geschlechtern des Orangutan keine **Geschlechtsdifferenzen** bezüglich der Verwachsung der Schädelnähte nachweisen lassen, gilt sonach wenigstens für die Basalfuge nicht, hierin altert der weibliche Orangutan entschieden früher als der männliche. Ersterer fixiert in Beziehung auf die gesamte Entwickelung des Schädels im vollerwachsenen Leben einen unausgebildeteren, in gewissem Sinne jugendlicheren Zustand. Die Schädelbasis und mit dieser auch der Gesichtsschädel mit den Kauwerkzeugen kann nach Verschluß der Basalfuge kaum mehr wesentlich wachsen. Das relative Zurückbleiben

des Wachstums des Gesichtsschädels im Vergleich zum Hirnschädel bei den weiblichen Orangutan bezieht sich zum Teil auf dieses Verhältnis. Bei dem männlichen Orangutan wächst entsprechend dem mächtigen Eckzahn der ganze Kauapparat mit seinen gewaltigen Knochen und Muskelentfaltungen bei offener Basalfuge, mit der sich vergrößernden, vornehmlich verlängernden Schädelbasis fort. Darauf beruht zum Teil die extreme Umgestaltung der männlichen Schädelform gegenüber den kindlichen und weiblichen Verhältnissen, woran sich anderen Teils auch das Übergreifen der Nackenmuskulatur auf den Schädel sehr wesentlich beteiligt.

Das jugendliche Aussehen des weiblichen Orangutanschädels beruht sonach nicht auf einer dauernden Konservierung jugendlicher Verhältnisse des Wachstums, sondern im Gegenteil auf einem dem männlichen Schädel gegenüber früher eintretenden definitiven Abschluß des Wachstums. Der weibliche Schädel konserviert jugendliche, ja in gewissem Sinne kindliche Form, weil er früher altert als der männliche. Die jugendliche, kindliche, sonach auch die weibliche Gestalt des Orangutan-Schädels ist wegen der geringeren Ausgestaltung seines gesamten Visceralteiles entschieden menschenähnlicher als der des erwachsenen männlichen Tieres. Auch die frühe Verwachsung der Basalfuge erweist sich als Menschenähnlichkeit. Bei dem Menschen tritt die Verwachsung der Basalfuge, wie gesagt, relativ früher ein als bei dem Orangutan, bei erwachsenen Menschen ist die Verknöcherung der Fuge so gut wie ausnahmslos erfolgt; die raschere Verwachsung der Basalfuge bei dem weiblichen Orangutan erscheint danach als ein anthropomorpher Charakter. Es werden dadurch eine Reihe von Annäherungen der weiblichen Orangutan-Schädelform an menschliche Verhältnisse bedingt.

Vor allem ist die Schädelbasis der erwachsenen weiblichen Orangutan nicht so ausgesprochen tierisch gestaltet als die der erwachsenen männlichen Tiere.

Die Knickung der Schädelbasis bei dem Orangutan.

Durch die frühzeitige Ossifikation der Basalfuge konserviert der weibliche Orangutan-Schädel bis ins höchste Alter, wie gesagt, gewisse kindliche und damit menschenähnliche Formverhältnisse.

Ein auffallendes Beispiel für diese scheinbar jugendlichen Alterserscheinungen ist in der Gestalt der Schädelbasis gegeben, welche bei dem weiblichen Orangutan entschieden menschenähnlicher ist als bei dem männlichen. Ich habe an

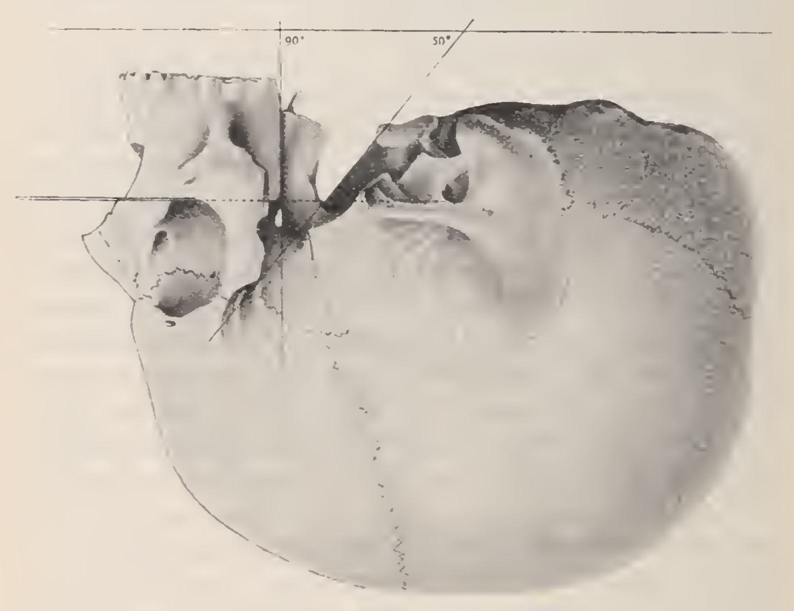


Fig. 2. Menschenschädel.

anderer Stelle darauf hingewiesen[1]), daß in der Bildung der Schädelbasis besonders charakteristische Differenzen zwischen dem Schädel des Menschen und dem der anthropoiden Affen

[1]) J. Ranke, Über einige gesetzmäßige Beziehungen zwischen Schädelgrund, Gehirn und Gesichtsschädel. Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern, II. Band, 1892. München. F. Bassermann.

resp. dem Schädel aller Wirbeltiere hervortreten. Diese Unterschiede zeigen sich besonders scharf bei der Vergleichung der Schädel erwachsener Menschen unserer Rasse mit denen erwachsener männlicher menschenähnlicher Affen, beide in der deutschen Horizontale aufgestellt, namentlich dann, wenn man die Schädel, was mit meinem Kraniophor ohne Schwierigkeit ausführbar ist, um 180° gedreht, mit der Basis horizontal nach oben gerichtet, von der Seite her betrachtet. (Fig. 2 und 3.)

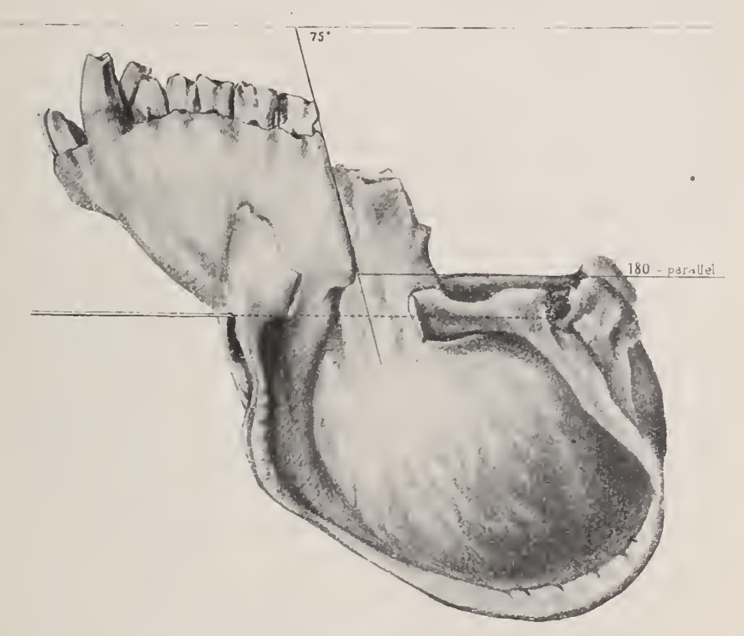


Fig. 3. Männlicher Orangutan-Schädel.

„Bezeichnen wir (l. c. S. 16) den vor der Synchondrosis sphenobasilaris gelegenen Abschnitt als den Gesichtsteil der Schädelbasis, den hinter ihr liegenden als Hinterhauptsteil, so ergibt sich ohne weiteres, daß der Gesichtsteil bei den anthropoiden Affen, und das gleiche gilt für alle anderen Säugetiere, auffallend viel mächtiger entwickelt ist als der Hinterhauptsteil, während dagegen beim Menschen der Hinter-

hauptsteil der Schädelbasis den Gesichtsteil an Ausdehnung übertrifft. Mit diesem Verhältnisse hängt dann einerseits die relativ zentrale Lage des Hinterhauptslochs in der Schädelbasis (Norma basilaris) des Menschen zusammen, ebenso wie anderseits das relative Zurücktreten des Hinterhauptslochs gegen die Norma occipitalis bei den menschenähnlichen Affen und allen anderen Säugetieren."

„Diese allbekannten typischen Unterschiede zwischen dem Menschen- und Affenschädel werden in ihrem Eindruck auf den Beschauer noch wesentlich gesteigert durch die Verschiedenheiten der Winkelbiegung oder Knickung der beiden Abschnitte der Schädelbasis gegeneinander. Während bei dem Affen der Körper des Hinterhauptsbeins mit seiner Unterfläche beinahe oder ganz horizontal liegt, d. h. parallel zur Ebene der deutschen Horizontale, und sich von ihm der Oberkiefer bei aufrechter Richtung des Schädels nach vorne in einen stumpfen Winkel nach abwärts, die Ebene des Hinterhauptslochs ebenfalls in einen stumpfen Winkel, aber nach hinten und aufwärts biegt, finden diese Winkelknickungen bei dem Menschen in gewissem Sinne in entgegengesetzter Richtung statt. Die Unterfläche der Pars basilaris neigt sich bei dem erwachsenen Menschen entschieden gegen die Horizontale zu nach aufwärts und bildet mit ihr meist annähernd einen halben rechten Winkel; der Oberkiefer neigt sich mit seinem s. v. v. Hinterrande, nicht wie bei den Affen nach vorn und auswärts, sondern (meist) nach einwärts und hinten, mit dem Körper des Hinterhauptsbeins nicht einen stumpfen, sondern einen spitzen Winkel bildend; während sich bei dem Affen die Ebene des Hinterhauptslochs, wie gesagt, nach aufwärts und hinten wendet, ist die typische Richtung dieser Ebene bei dem Menschen unserer Rasse (speziell habe ich die altbayerische Bevölkerung darauf untersucht) umgekehrt, d. h. von dem Hinterrande des Foramen magnum gegen den Vorderrand nach vorn und abwärts gerichtet." (Fig. 2 und 3.)

Ein besonders wesentlicher Unterschied zwischen Menschen- und Tierschädel spricht sich sonach darin aus,

daß bei letzterem die Schädelbasis, speziell die Unterfläche der Pars basilaris des Hinterhauptsbeins, annähernd flach, d. h. parallel zur deutschen Horizontale liegt, während bei dem Menschenschädel die Schädelbasis resp. die Unterfläche der Pars basilaris die typische Abknickung in der Sphenobasilarfuge zeigt. Ich habe l. c. nachgewiesen, daß ein Zusammenhang existiert zwischen der Flachlegung oder Knickung der Schädelbasis, der Stellung des Gesichts zum Gesamtschädel und der relativen Größe des Hirnschädels resp. der relativen Größe des Gehirns. Ein typischer Affenschädel ist nur denkbar, verbunden mit dem im Verhältnisse zum Gesichtsschädel relativ kleinen Gehirnschädel und kleinen Gehirnvolumen des Affen; ein typischer Menschenschädel ist nur möglich, verbunden mit dem relativ großen Gehirnschädel und Gehirnvolumen des Menschen. Sonach ist es das relative Verhältnis des Gehirns zum Schädel, was diesem die menschliche Form aufdrückt. Das ist der Grund, warum die Köpfe der Embryonen der Säugetiere, aber auch noch die Köpfe der neugeborenen Säugetiere, nicht nur der Affen sondern auch der Hunde, Katzen, Rinder, Schafe, Schweine u. a., vor der vollen Ausbildung der Kauwerkzeuge eine ganz unverkennbare Annäherung an die menschliche Form erkennen lassen. Solange der Gehirnteil des Schädels an Masse den Gesichtsteil überwiegt, ist die Schädelform menschenähnlich; sie weicht von diesem primär allgemeinen menschlichen Typus mehr und mehr ab, je mächtiger sich die Kiefer und alle Gesichtsorgane unter Zurückbleiben der Gehirnentwickelung entfalten.

Für die Affen habe ich festgestellt, daß, innerhalb der von der Spezies gegebenen Grenzen der Wachstums- und Formbildung mit dem relativ größeren Gehirn, wie es für die Embryonen, Jungen und Weibchen (in abnehmendem Grade dieser Reihe) typisch ist, relativ menschlichere Verhältnisse am Hirnschädel, am Gesichtsschädel und an der Schädelbasis verbunden sind: speziell eine mehr oder weniger menschenähnliche Abbiegung der Unterfläche der Pars basilaris

in der Sphenobasilarfuge. Umgekehrt werdenmit dem relativ kleineren Gehirn bei den erwachsenen Männchen auch alle die anderen betreffenden Verhältnisse am Affenschädel tierischer.

Durch das frühere Altern der weiblichen Orangutan, durch den frühzeitigeren Verschluß ihrer Basalfuge werden mit dem relativ größeren Gehirnschädel im Verhältnis zum Gesichtsschädel auch die jugendlichen, relativ menschenähnlichen Knikkungsverhältnisse der Schädelbasis konserviert.

Ich habe an 45 männlichen und 67 weiblichen Orangutan-Schädeln aus unserer Selenkaschen Sammlung, alle von der gleichen Schußgegend Skalau, und an der Leiche nach dem Geschlecht genau bestimmt, die Winkelstellung der Pars basilaris-Unterfläche zur deutschen Horizontale gemessen. Die Messungsergebnisse illustrieren das im vorstehenden Gesagte.

Tabelle.

Messungen der Basalfuge, absolute Werte, an 112 Orangutan-Schädeln.

45 männliche Schädel:			67 weibliche Schädel:		
	Nr.	Basalwinkel		Nr.	Basalwinkel
10 Säuglinge	285	+ 20°	2 Säuglinge	166	+ 18°
	64	19		119	16
	182	19			
	181	16			
	63	16			
	62	13			
	131	13			
	49	13			
	286	8			
	126	7			
8 Kinder	208	+ 8°	10 Kinder	88	+ 9°
	93	7		224	9
	279	6		241	9
	125	5		80	7
	94	5		108	6
	216	2		47	3
	281	1		212	3
	160	± 0°		221	2
				110	2
				258	± 0

Männliche Schädel:

	Nr.	Basalwinkel
6 Junge	157	$+10^{0}$
	201	5
	103	3
	158	2
	174	$\pm 0^{0}$
	97	0
12 Erwachsene	96	$+5^{0}$
	203	3
	255	3
	127	2
	121	2
	124	$\pm 0^{0}$
	102	0
	123	0
	161	0
	156	0
	155	0
	98	0
5 Alte	129	$\pm 0^{0}$
	100	0
	200	0
	204	-3^{0}
	162	-3
4 Uralte	18	$\pm 0^{0}$
	142	-3^{0}
	17	-5
	180	-6

Weibliche Schädel:

	Nr.	Basalwinkel
13 Junge	83	$+5^{0}$
	75	4
	213	4
	87	3
	137	2
	254	2
	90	2
	211	1
	70	1
	79	1
	206	$\pm 0^{0}$
	208	0
	86	0
14 Erwachsene	107	$+4^{0}$
	91	2
	106	2
	122	2
	263	2
	209	2
	256	2
	264	2
	132	1
	219	$\pm 0^{0}$
	207	0
	231	0
	85	-1^{0}
	262	-4
15 Alte	78	$+4^{0}$
	116	2
	217	2
	76	2
	69	1
	214	1
	150	1
	84	1
	210	1
	92	1
	113	$\pm 0^{0}$
	118	0
	89	0
	77	0
	72	0
13 Uralte	82	$+4^{0}$
	95	3
	132	2
	218	2
	74	1
	104	1

Männliche Schädel: Nr.	Basalwinkel	Weibliche Schädel: Nr.	Basalwinkel
		257	+ 1
		73	± 0°
		111	0
		265	0
		81	0
		205	0
		147	— 5

Übersichtstabelle
der absoluten Werte über die Messungen der Basalwinkel von 112 Orangutan-Schädeln.

	Säuglinge: 10 ♂	2 ♀	Kinder: 8 ♂	10 ♀	Junge: 6 ♂	13 ♀	Erwachsene: 12 ♂	14 ♀	Alte: 5 ♂	15 ♀	Uralte: 4 ♂	13 ♀
+ 20	1											
19	2											
18	—	1										
16	2	1										
13	3											
10	—				1							
9	—				—							
8	1		1	3	—							
7	1		1	—	—							
6			1	1	—							
5			2	—	1	1	1					
4			—	—	—	2	—	1		1		1
3			—	2	1	1	2	—		—		1
2			1	2	1	3	2	7		3		2
1			1	—	—	3	—	1		6		3
± 0°			1	1	2	3	7	3	3	5	1	5
— 1								1	—			
3								—	2		1	—
4								1			—	—
5											1	1
6											1	

Für die Zusammenfassung der Resultate vereinige ich Kinder und Junge und Alte und Uralte und berechne die Ergebnisse in Prozenten. Es ergeben sich dann die beiden folgenden reziproken Tabellen. Die erste gibt an, wie viele prozentisch bei den beiden Geschlechtern in den vier Altersstufen: Säuglinge, Kinder und Junge, Erwachsene, Alte und Uralte den typischen Affencharakter der Schädelbildung, d. h. Pars basilaris-Winkel (Basalwinkel) horizontal (= ± 0°)

oder negativ (—) aufweisen; die zweite Tabelle bietet die entsprechenden prozentischen Zahlen für die mehr oder weniger große Annäherung an den Menschentypus, d. h. Pars basilaris-Unterfläche mehr oder weniger positiv (+) abgeknickt.

Tabelle I, relative Werte,
Basalwinkel $\pm$ 0° oder — ° (äffisch):

	männlich	weiblich
Säuglinge	0,0%	0,0%
Kinder und Junge	21,4%	17,4%
Erwachsene	59,2%	35,7%
Alte und Uralte	100,0%	38,6%

Tabelle II, relative Werte.
Basalwinkel mehr oder weniger + (menschenähnlich):

	männlich	weiblich
Säuglinge	100,0%	100,0%
Kinder und Junge	78,6%	82,6%
Erwachsene	40,8%	64,3%
Alte und Uralte	0,0%	61,4%

Die Zahlen sprechen für sich selbst; während alle Säuglinge bei den hier untersuchten Orangutan-Schädeln bei beiden Geschlechtern eine mehr oder weniger menschenähnliche positive (+) Knickung der Schädelbasis besitzen, steigt die Anzahl der Schädel mit flacher resp. zur deutschen Horizontale paralleler Schädelbasis oder mit negativer (—) Knickung derselben, d. h. mit ausgesprochenem Affencharakter mit zunehmendem Lebensalter, so daß bei Schädeln von männlichem Geschlecht alle alten und uralten nur noch den äffischen Formcharakter aufweisen, bei fünf von neun Schädeln = 55,5% ist sogar die Knickung der Schädelbasis der typisch menschlichen positiven (+) Knickung, wie bei niederen Säugetieren, entgegengesetzt, negativ (—).

Die weiblichen Schädel, alte und uralte, zeigen dagegen noch zu 61,4% eine mehr oder weniger starke positive (+)

menschenähnliche Abknickung der Schädelbasis, während nur 38,6% den äffischen Charakter der flachen, d. h. zur deutschen Horizontale parallelen Gestalt der Schädelbasis besitzen, darunter nur ein Schädel mit negativer (—) Knickung der Unterfläche der Pars basilaris.

Gelegentlich kann sich übrigens auch bei ganz jungen Orangutan-Schädeln eine horizontale resp. „tierische“ Stellung der Pars basilaris (Pars basilaris-Winkel ± 0°) finden, wie ich bei dem Schädelchen des „neugeborenen“ Orangutan Quix gefunden habe.[1]) Es stimmt das mit meiner Beobachtung am Menschenschädel, daß bei neugeborenen Menschen die Abknickung der Schädelbasis eine geringere ist als im Kindes- und Erwachsenenalter.

Als Resultat unserer Untersuchung ergibt sich, daß in der Tat der weibliche Orangutan-Schädel sich in höherem Grade als der männlichen Schädel kindliche und damit menschenähnliche Formverhältnisse bis ins Alter erhält, aber nur dadurch, daß er früher altert als der männliche Schädel und durch frühzeitigere Verknöcherung der Schädelbasis (Basilarfuge) Bauverhältnisse konserviert, welche für die männlichen Orangutan-Schädel Durchgangsstadien zu weiterer Ausgestaltung sind.

Verschluss der Hirnschädelnähte, Kranz- und Pfeilnaht bei Orangutan.

Solange die Fugen an der Schädelbasis noch nicht knöchern verwachsen und damit definitiv verschlossen sind, kann die Schädelbasis noch wachsen und sich verändern.

Bei dem männlichen Orangutan bleibt die Basalfuge bis in höhere Altersstufen offen als das bei dem weiblichen der Fall ist, bei dem männlichen Schädel kann sonach noch ein Wachs-

[1]) J. Ranke, Über das Interparietale und die Verknöcherung des Schädeldachs bei Affen. Vorgetragen in der Sitzung am 1. Februar 1913. Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. d. Wissensch., mathem.-physik. Klasse, 1913, S. 223—269.

tum und eine Umgestaltung der Basis und der mit dieser verbundenen Schädelpartien erfolgen in einer Altersstufe, auf welcher die Schädelbildung bei den weiblichen Schädeln schon abgeschlossen ist. Der männliche Schädel kann daher in der typischen Formentwickelung von der für beide Geschlechter gemeinsamen embryonalen und jugendlichen menschenähnlichen Ausgangsform sich weiter entfernen als der weibliche, welcher sich durch früheres Altern jugendlichere, menschlichere, das heißt in gewissem Sinn unfertige Bauverhältnisse dauernd konserviert.

Aber nicht nur der Visceralschädel des männlichen Orangutan sondern auch sein Cerebralschädel, speziell die Hirnhöhle, zeigt gegenüber dem weiblichen Schädel ein gesteigertes Wachstum, die Hirnschädelhöhle der erwachsenen männlichen Orangutan-Schädel ist, wie auch Selenka festgestellt hat, beträchtlich weiter, ihr Volum größer als der der weiblichen Schädel; das männliche Orangutan-Gehirn ist dementsprechend besser entwickelt, größer und schwerer, als das weibliche.

Diese Tatsache legt den Gedanken nahe, daß sich doch, vielleicht gegen bisher festgehaltene Meinungen der Autoren, zeitliche Differenzen in dem Nahtverschluß des Hirnschädels bei den beiden Geschlechtern des Orangutan finden lassen möchten, welche das gesteigerte Wachstum des männlichen Hirnschädels, das der männlichen Hirnschädelhöhle, im Vergleich mit dem weiblichen Schädel verständlich machen würden.

Ich habe zur Entscheidung dieser Frage sämtliche Orangutan-Schädel unserer Selenkaschen Sammlung untersucht. Für die Gruppeneinteilung nach dem Alter schloß ich mich auch hier den auf jeden Schädel von Selenkas Hand geschrieben stehenden Bezeichnungen: Säugling, Kind, Jugendlich, Erwachsen, Alt, Uralt ausnahmslos an. Das Geschlecht der Tiere war, wie gesagt, von jedem Tier an der Leiche festgestellt, ein ganz besonderer Vorzug unserer Orangutan-Schädel-Sammlung.

Im folgenden teile ich zunächst meine statistischen Zählungen über den Verschluß der Kranznaht und Sagittalnaht

mit; für die Lambdanaht bestehen durch die Bildung des Occipitalkammes so besondere Verhältnisse, daß sie eine gesonderte Darstellung verlangt. Im Nachtrag gebe ich noch einige Bemerkungen zur Stirnnaht.

Das Nähere ergeben die folgenden Tabellen.

Kranznaht des Orangutan.

Tabelle I.

Orangutan-Schädel mit teilweise oder vollkommen verwachsener Kranznaht.

Weibchen.

	Anzahl der Individuen	Kranznaht verschlossen bei:
Säuglinge	4	0 = 0%
Kinder	15	0 = 0%
Junge	17	0 = 0%
Erwachsene	40	22 = 55%
Alte	39	33 = 84%
Uralte	28	20 = 100%
Summe	143	

Männchen.

	Anzahl der Individuen	Kranznaht verwachsen bei:
Säuglinge	14	0 = 0%
Kinder	9	0 = 0%
Junge	12	0 = 0%
Erwachsene	33	3 = 9,1%
Alte	20	14 = 70,0%
Uralte	15	15 = 100,0%
Summe	103	

Die Weibchen zeigen schon bei den Erwachsenen 55% Verwachsungen, die Männchen nur 9% Verwachsungen.

Auch bei der Gruppe der Alten sind die Weibchen noch den Männchen entschieden voraus: Alte Weibchen haben 84,60%

(= 85%), alte Männchen erst 70%, bei denen die Kranznaht teilweise oder ganz verwachsen ist.

Bei der Gruppe der Uralten findet sich keine offene Koronalnaht mehr weder bei dem männlichen noch weiblichen Geschlecht.

Ich habe auch jene Schädel von vollkommen erwachsenen nach der Bezeichnung von Selenkas alten, männlichen und weiblichen Individuen gezählt, bei denen die Kranznaht sich vollkommen verwachsen zeigte, das Resultat der Zählung gibt die folgende kleine Tabelle.

Tabelle II.

Orangutan-Schädel mit vollkommen verwachsener Kranznaht.

	Anzahl der Individuen	Kranznaht verschlossen bei:
Weibchen.		
Erwachsen	40	1 = 2,5%
Alt	39	11 = 28,2%
Männchen.		
Erwachsen	33	0 = 0%
Alt	20	3 = 15,0%

Das Resultat entspricht der Voraussetzung. Namentlich nach unserer Tabelle I sind die zeitlichen Unterschiede in dem Verschluß der Kranznaht bei beiden Geschlechtern unverkennbar.

Die Weibchen zeigen schon bei der Selenkaschen Gruppe der Erwachsenen 55% Verwachsungen bei den Männchen 9,1%.

Die **weiblichen** Orangutan altern sonach auch in dieser Beziehung, in der Verwachsung einer der wichtigsten Hirnschädelnähte, früher als die Männchen.

Auch die Gruppe der alten Männchen besitzt noch die doppelte Anzahl von Schädeln mit offener Kranznaht als die Weibchen:

Weibchen 15%,
Männchen 30%.

Das gleiche ergibt auch unsere Tabelle II: vollkommen verwachsen zeigt sich die Kranznaht

bei Männchen in 15%,
bei Weibchen in 28%.

Bei den **männlichen** Orangutan kann sonach, da die offenen Hirnschädelnähte länger eine Erweiterung des Hirnraums gestatten, das Gehirn länger als bei den Weibchen wachsen, es wird ja tatsächlich größer.

Pfeilnaht der Orangutan.

Tabelle I.

Orangutan-Schädel mit teilweise oder vollkommen verwachsener Pfeilnaht.

Weibchen.

	Anzahl der Individuen	Pfeilnaht verwachsen bei:
Säuglinge	4	0 = 0%
Kinder	15	2 = 13,2%
Junge	17	5 = 29,4%
Erwachsene	40	31 = 77,5%
Alte	39	38 = 97,4%
Uralte	28	28 = 100,0%

Männchen.

	Anzahl der Individuen	Pfeilnaht verwachsen bei:
Säuglinge	14	0 = 0%
Kinder	9	0 = 0%
Junge	12	4 = 33%
Erwachsene	33	33 = 63,6%
Alte	20	18 = 90,0%
Uralte	15	15 = 100,0%

In Beziehung auf die Verwachsung der Pfeilnaht verhalten sich beide Geschlechter der Orangutan recht ähnlich, immer-

hin sind die Weibchen den Männchen auch hierin im Altern voraus.

Schalten wir die Säuglinge mit 0% bei beiden Geschlechtern aus, so erhalten wir folgende Tabelle für alle sonstigen Altersgruppen:

Tabelle II.

Orangutan-Schädel (ohne Säuglinge) mit teilweise oder vollkommen verwachsener Pfeilnaht.

	Anzahl der Individuen	Pfeilnaht verwachsen bei:	offen bei:
Weibchen	139	74,5%	25%
Männchen	89	65,2%	35%.

Bemerkenswert erscheint es auch, daß bei den Kindern nach Selenkas Gruppierung

von den weiblichen Schädeln 13,2%,
von den männlichen Schädeln 0,0%

Verwachsungserscheinungen an der Pfeilnaht aufweisen.

Die gesonderte Zählung der nur teilweise verwachsenen Pfeilnähte hat kein statistisch verwertbares Ergebnis geliefert, da die Zahlen zu gering sind. Es fanden sich mit nur teilweiser Verwachsung der Pfeilnaht:

	Weibchen	Männchen
Kinder	1	0
Junge	3	1
Erwachsene	5	5
Alte	3	1
	Summe 12	Summe 7

Über die Zeit der Verwachsung der Kranznaht und der Sagittalnaht resp. über die Altersstufen, in welchen die Verwachsung erfolgt, geben die im vorstehenden mitgeteilten Haupttabellen erwünschten Aufschluß. Ich stelle dazu nur die prozentischen Zahlen in einer vergleichenden Tabelle nebeneinander.

Tabelle.

Die Alterstufen, in denen die Verwachsung der Kranznaht und der Sagittalnaht bei Orangutan erfolgt.

	Teilweise oder vollkommene Verwachsung der			
	Kranznaht:	Pfeilnaht:	Kranznaht:	Pfeilnaht:
	bei Weibchen		bei Männchen	
Säuglinge	0%	0%	0%	0%
Kinder	0%	13,2%	0%	0%
Junge	0%	29,4%	0%	33,0%
Erwachsene	55,0%	77,5%	9,0%	63,0%
Alte	84,0%	97,4%	70,0%	90,0%
Uralte	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

In den Altersstufen der Säuglinge, Kinder und Junge, in welchen bei den Weibchen die Kranznaht noch ohne Ausnahme offen ist, weist die Pfeilnaht nur bei den Säuglingen keine Verwachsung auf, dagegen bei der Altersstufe der Kinder schon 13,2% und bei den Jungen 29,4%, sonach im ganzen schon bei 42% der hiefür in Frage kommenden Schädel. Auch in den weiteren Altersstufen ist die Verwachsung der Pfeilnaht der der Kranznaht entschieden voraus, bei den Affenweibchen haben noch 16% offene Kranznaht, offene Pfeilnaht dagegen nur 3% (2,6%).

Entsprechend verhalten sich auch die Männchen. Bei Säuglingen, Kindern und Jungen zeigt sich noch keine Verwachsung der Kranznaht, während die Pfeilnaht in dieser Jugendgruppe schon 33% Verwachsungen aufweist (bei Jungen). Die Pfeilnaht verschließt sich auch bei den Männchen früher als die Kranznaht, in allen in Frage kommenden Altersstufen sind wieder die Weibchen den Männchen in der Anzahl der verschlossenen Nähte voraus. Während bei den weiblichen Kindern schon 13,2% Verwachsung der Pfeilnaht zeigen, findet sich in dieser Altersstufe bei Männchen noch keine.

Für den knöchernen Verschluß der Basalfuge hat die Untersuchung (s. oben S. 411) die folgende Reihe ergeben, die ich hier zur Vergleichung wiederhole:

	Weibchen	Männchen
Erwachsene	40,0 %	9,1 %
Alte	61,5 %	25,0 %
Uralte	85,7 %	60,0 %

Während bei der Gruppe der uralten männlichen und weiblichen Orangutan-Schädel die Basalfuge noch in 40 % und 14,3 % unverknöchert ist, sind die beiden großen Hirnschädelnähte, Kranznaht und Pfeilnaht, bei beiden Geschlechtern schon vollkommen verschlossen. Wachstumsveränderungen der Schädelbasis können sonach bei beiden Orangutan-Geschlechtern noch, wenn auch mit verschiedener Energie, erfolgen, nachdem das Wachstum des Hirnschädels resp. des Hirnraums der Schädelhöhle schon vollkommen abgeschlossen ist.

Dadurch unterscheidet sich der Affenschädel (Orangutan-Schädel) sehr wesentlich vom Menschenschädel, bei welchem das Wachstum der Schädelbasis durch Verschluß der Basalfuge schon in einer Altersstufe beendigt ist, in welcher die Hirnschädelnähte im wesentlichen noch offen sind.

Von dem Gesichtspunkt der Konservierung jugendlicher Bauverhältnisse des weiblichen Schädels, was ja auch für den Menschen zutrifft, verdient die Bestimmung der Verschlußzeit der Basalfuge und der Hirnschädelnähte und deren eventuelle zeitliche Verschiedenheit auch bei dem menschlichen Weibe eine erneuerte Prüfung. Mir selbst stehen entsprechende Aufnahmen, die am sichersten in den Anatomien gemacht werden können, nicht zur Verfügung.

Vielleicht handelt es sich bei dem menschlichen Weibe nur um ein früheres Altern der Schädelbasis und der zunächst mit dieser verbundenen Schädelnähte. Ich habe schon oben (S. 409) bei Besprechung der Ergebnisse, welche Frédéric am Menschenschädel gewonnen hat, darauf hingewiesen, daß die frühzeitigere Verwachsung der Sutura mastoidea-occipitalis (= S. occipito-mastoidea) beim menschlichen Weibe (bei dem Weibe erfolgt der Verschluß schon im 24. Lebensjahr, bei dem Manne erst im 31. Lebensjahr) wohl für eine verlängerte Periode des Breitenwachstums der Schädelbasis beim Manne spricht.

Bleibt die Schädelbasis durch frühzeitigere Verwachsung kleiner, so ergibt der bei dem menschlichen Weibe nach Schwalbe und Frédéric verzögerte Verschluß der Hirnschädelnähte und das dadurch noch ermöglichte Wachstum des Hirnschädels (und Gehirns) aus entwicklungs-mechanischen Gründen die Konservierung der relativ kindlichen Form des weiblichen Hirnschädels.

Zum Schluß dieser Betrachtungen möchte ich noch auf eine wie mir scheint ziemlich allgemein geltende Gesetzmäßigkeit im Verschluß der Nähte und Fugen der Schädel hinweisen.

Bei dem Menschen werden die Schädelknochen in ausgedehnterem Maße zur Herstellung der mächtigen Hirnschädelkapsel beigezogen als bei niederen Säugetieren, aber auch bei den Affen, speziell bei dem Orangutan. Bei diesem werden geradezu die unteren Partien der Hirnschädelknochen teilweise zur Verbreiterung der Schädelbasis verwendet, gewissermaßen in diese einbezogen.

Diejenigen Teile des Schädels, welche im nachembryonalen Leben bis zum voll erwachsenen Alter ein besonders gesteigertes Wachstum zu entfalten haben, bei dem Menschen also die Schädelkapsel, der Cerebralschädel, bei dem betreffenden Affen der Gesichtsteil, der Visceralschädel, erhalten sich die protrahierte Wachstumsmöglichkeit durch längeres Offenhalten der Nähte und Fugen in den späteren Altersperioden. Infolge davon kann bei dem Menschen der Hirnschädel, bei dem betreffenden Affen der Viceralschädel noch ein andauerndes Wachstum in vergleichsweise fortgeschrittenen Altersperioden entfalten.

In dieser Beziehung möchte ich noch auf zwei Orangutan-Schädel der Selenkaschen Sammlung besonders hinweisen.

Es sind zwei weibliche Schädel, der eine aus Landak, der andere aus Bogau.

Bei beiden Schädeln sind alle Hirnschädelnähte vollkommen verwachsen bis auf die Schuppennaht, die Sutura occipito-mastoidea und das (beim Menschen ganz besonders früh verwachsende) untere Ende der Kranznaht. Die Basalfuge ist bei beiden vollkommen verknöchert, dagegen sind die genannten

Nähte und Nahtstrecken noch vollkommen offen und bilden gleichsam eine zusammenhängende offene Grenznaht zwischen Cerebral- und Visceralschädel, durch welche eine Verbreiterung der Schädelbasis noch gestattet ist, zu einer Zeit, da das Hirnschädelwachstum schon abgeschlossen ist.

Stirnnahtreste bei Orangutan.

An anderer Stelle[1]) habe ich vor kurzem darauf hingewiesen, es wäre wünschenswert, daß die Anthropoiden-Schädel der Zoologischen Sammlungen überall auf das Vorkommen der Stirnnaht oder Stirnnahtresten durchgesehen werden. An 245 Orangutan-Schädeln habe ich selbst die vorkommenden Stirnnähte und Stirnnahtreste gezählt. Es fanden sich:

1 vollkommen offene Stirnnaht bei dem weiblichen neugeborenen Orangutan „Quix“;

11 Schädel mit Stirnnahtresten unter 244 = 4,5 %.

Das Schädelchen des kleinen „Quix“ muß, da es ein Unikum ist, von der statistischen Berechnung ausgeschlossen bleiben.

Die Stirnnahtreste sind im allgemeinen recht unscheinbar, mehrfach nur im Stirnnahtfortsatz des Stirnbeins nachzuweisen. Immerhin ist das Resultat der Zählung für die hier vorliegende Frage der zeitlichen Differenzen in der Verknöcherung beider Geschlechter nicht bedeutungslos.

Von den 244 Orangutan-Schädeln sind 103 männlich, 140 weiblich.

Unter den Schädeln mit Stirnnahtresten sind zwei weiblich = 1,4 % (unter 140) und acht männlich = 7,7 % (unter 103).

Unter den acht männlichen Schädeln sind drei als „Säuglinge“ bezeichnet, diese Altersstufe fehlt bei meinen weiblichen Stirnnahtschädeln.

Nach diesen freilich statistisch noch nicht ausreichenden Zählungen scheint bei dem weiblichen Geschlecht der

---

[1]) J. Ranke, Über das Interparietale und die Verknöcherung des Schädeldachs bei Affen. Diese Sitzungsberichte, mathem.-physik. Klasse, 1913, S. 240.

Verschluß der Stirnnaht im allgemeinen früher und vollständiger als bei dem männlichen Geschlecht des Orangutan einzutreten, der weibliche Schädel auch hierin früher zu altern als der männliche.

Die Verknöcherung des Hinterhauptsbeins.

Synchondrosis condylo-squamosa bei Mensch und Orangutan.

Das knorpelig vorgebildete Hinterhauptsbein gliedert sich bekanntlich bei seiner Entwickelung und noch im ersten Kindesalter in vier gesonderte, durch Knorpelfugen verbundene Stücke, es sind das elementare Primärknochen, wie Entwickelungsgeschichte und vergleichende Anatomie erweist (Fig. 4). Die allgemein anerkannten Elementarbestandteile des knorpelig vorgebildeten Hinterhauptsbeins sind:

1. Die Unterschuppe des Hinterhauptsbeins, Os occipitale superius, dessen Bildung aus zwei getrennten Anlagen nun festgestellt ist.

2. Die beiden Gelenkteile des Hinterhauptbeins, Exoccipitalia, Exoccipitale dextrum et sinistrum, jederseits eine Pars lateralis seu condyloidea ossis occipitis.

3. Der Basilarteil des Hinterhauptsbeins, Os basilare, Processus seu Pars basilaris ossis occipitis.

Bei dem Menschen erfolgt die knöcherne Verschmelzung der Unterschuppe mit den Gelenkteilen nach den Beobachtungen von C. Toldt in der zweiten Hälfte oder gegen Ende des ersten Lebensjahres und zwar beginnt die Verschmelzung beiderseits in den seitlichen äußeren Abschnitten der die Gelenkteile mit der Unterschuppe verbindenden Knorpelfugen, die als hintere Interoccipitalfuge oder Synchondrosis condylo-squamosa bezeichnet werden; etwas später folgt die Verknöcherung des mittleren Abschnittes. Nach dem ersten Viertel des zweiten Lebensjahres ist normal die Verknöcherung der Fuge eine vollständige. Häufig trifft man indessen noch bis in das dritte Lebensjahr hinein Reste der Fuge



Fig. 4. Schädel eines kindlichen weiblichen Orangutan mit noch offenen basalen Fugen.

am Hinterhauptsloch[1]). „Ausnahmsfälle, in denen diese sogenannte hintere Occipitalfuge bis ins vierte oder selbst ins siebente Lebensjahr zur Gänze offen bleibt, sind schon wiederholt und vorzugsweise an Stirnnahtschädeln beobachtet worden (vgl. u. a. Welcker)[2]).“ Sie sind in der Tat nicht gar selten. C. Toldt hat selbst den im ganzen wohlgebildeten Schädel eines acht Jahre alten Mädchens präpariert, an welchem die beiden hin-

[1]) C. Toldt, Die Knochen in gerichtsärztlicher Beziehung. In: J. Maska, Handbuch der gerichtlichen Medizin, 1882, S. 515 ff.

[2]) H. Welcker, Untersuchung über das Wachstum und den Bau des menschlichen Schädels. Leipzig 1862.

teren und die linke vordere Interoccipitalfuge ganz offen sind. Die vordere Interoccipitalfuge, zwischen Gelenk- und Basilarteil, Synchondrosis condylo-basilaris, synostiert erst konstant im 6. Lebensjahr und zwar von der inneren, medialen Seite nach außen, lateralwärts fortschreitend. Auch hier findet man häufig bis ins siebente und achte Lebensjahr an einzelnen Stellen noch Reste der Fuge vor. „Daß die manchmal am Erwachsenen vorkommende Zweiteilung der Gelenkfläche in den Condylen nicht mit der Knorpelfuge zusammenfällt, ist schon wiederholt betont worden[1]) (vgl. u. a. A. Virchow)."

Nach R. Virchow[2]) fängt die Verwachsung der Synchondrosis condylo-squamosa gewöhnlich schon im ersten Lebensjahr an der lateralen Seite an, der mediale, beim Manubrium squamae (Ossiculum Kerkringii) liegende Teil bleibt bis zu drei Jahren offen; bei einem zweijährigen Kinde sah R. Virchow die Trennung zwischen Bogenstücken und Schuppe noch ganz erhalten. „Die Besonderheit, daß die vordere innere Knorpelfuge (Synchondrosis condylo-basilaris) zuerst am Umfang des Loches verknöchert, die hintere (Synchondrosis condylo-squamosa) dagegen gerade an diesem Umfang am längsten offen bleibt, erklärt offenbar die größere Breite, welche das Loch gewöhnlich an seinem hinteren Abschnitt hat[3])."

H. Welcker gab[4]) 1862 eine Lebensalterstatistik für die Obliteration der Gelenkteile mit der Schuppe vom 1.—7. Lebensjahr. Die Fugenreste finden sich danach stets am Rande des Foramen occipitale, während die lateralen Teile der Fuge verknöchert sind.

Nach der Literaturzusammenstellung von T. Zaaijer bildeten 1864 Rambaud und Renault[5]) das Hinterhauptsbein

[1]) C. Toldt, l. c. S. 518.

[2]) R. Virchow, Untersuchung über die Entwickelung des Schädelgrundes. Berlin 1857, S. 13.

[3]) R. Virchow, l. c. S. 25, 26.

[4]) H. Welcker, l. c. S. 85, 86.

[5]) A. Rambaud et Ch. Renault, Origine et développement des os. Mit Atlas. Paris 1864.

eines 10jährigen Kindes ab, an welchem die medialen Teile der Synchondrosis condylo-squamosa (rechts 11, links 13 mm lang) noch offen sind. Sappey findet 1867, die Verwachsung schreitet von außen nach innen fort.

Im Jahre 1894 erschien eine vorläufige Mitteilung von Professor T. Zaaijer[1]) in Leiden über: Die Persistenz der Synchondrosis condylo-squamosa am Hinterhauptsbein des Menschen uud der Säugetiere. Noch in dem gleichen Jahre (1894) wurde eine ausführliche Abhandlung T. Zaaijers unter dem gleichen Titel wie die vorläufige Mitteilung veröffentlicht[2]).

Nach einer eingehenden Darstellung der Literatur folgen die eigenen umfassenden Beobachtungen des Autors, über welche (l. c. S. 206) als Schlußresultat mitgeteilt wird:

„1. Die Obliteration der Synchondrosis condylo-squamosa fängt gewöhnlich im 2. Lebensjahre an und wird darin auch größtenteils, wenn nicht ganz, zu Ende geführt.

2. Der laterale, an die Sutura masto-occipitalis stoßende Teil bleibt fast ohne Ausnahme am längsten offen.

3. Die Verwachsung geht fast immer von der Gehirnfläche des Knochens aus."

S. 212: „Offene Reste der Synchondrosis condylo-squamosa am erwachsenen Schädel sind nicht so ganz selten, sie kommen in 5,3% der untersuchten Fälle vor und haben höchstens kaum die Hälfte der Länge der ganzen Fugen (Maximum 29 mm).

Sie finden sich ohne Ausnahme an dem lateralen Ende der Synchondrose vor.

„Das an die Sutura masto-occipitalis stoßende (laterale) Ende der Synchondrose liegt im Durchschnitt 26 mm unterhalb des Asterions."

S. 222: „Die Persistenz der Synchondrosis condylo-squamosa ist als eine Hemmungsbildung aufzufassen. Bei einzelnen

[1]) T. Zaaijer, Anatomischer Anzeiger, Bd. IX, 1894, S. 337 ff. Siehe auch das folgende Zitat.

[2]) T. Zaaijer, Anatomische Hefte, XI. Heft (IV. Bd., Heft 1), 1894. S. 192—222 mit 3 Tafeln.

Säugetiergruppen kommt aber an erwachsenen Tieren die Persistenz der totalen Synchondrosis condylo-squamosa nicht so ganz selten vor, während sie bei anderen Gruppen, wie beim Menschen, nicht beobachtet wurde. Am zahlreichsten fanden wir die offene Synchondrose bei Antilopidae und bei den Suideae."

Zur Frage der Bedeutung der Persistenz bemerkt Zaaijer (l. c. S. 221): „Bei den niederen Wirbeltieren, Fischen, Amphibien bleiben die Teile, welche das Hinterhauptsbein bilden, getrennt, bei den höheren Wirbeltieren aber zeigen die zusammensetzenden Stücke eine Neigung zur Verwachsung, so daß bei den Säugetieren die relativ frühzeitige Verwachsung aller Nähte oder Synchondrosen des Os occipitis wohl als Regel zu betrachten ist. Eine Ausnahme findet man aber bei der Oberschuppe, welche als Os interparietale bei vielen Säugetieren getrennt bleibt, beim Menschen aber (meist) mit der Unterschuppe zu verschmelzen pflegt."

„Nach Gegenbaur[1]) können die Stücke des Hinterhauptsbeins, z. B. bei Beuteltieren, bei Monotremen, sehr lange getrennt bleiben. Romiti fand das an Ornithorhinchus bestätigt, während bei Makropus und Sariga (Didelphis), nämlich bei den erwachsenen Tieren, die vier Stücke verschmolzen waren; am Rande fanden sich aber noch deutliche Spuren der früheren Trennung."

„Ist der Persistenz der Synchondrosis condylo-squamosa als Rassenmerkmal einiger Wert beizulegen?[2]) Hierauf muß ich — sagt Zaaijer — leider die Antwort schuldig bleiben, da das mir zur Verfügung stehende Material zur Lösung dieser Frage bei weitem nicht hinreichend ist. Unter den Schädeln, an welchen die Anomalie sich vorfand, kommen zwar relativ viele aus dem Ostindischen Archipel vor; dies findet aber seine Erklärung darin, daß ein sehr bedeutender Teil unserer Sammlung in unseren ostindischen Kolonien haupt-

[1]) Zaaijer, l. c. S. 915. — Gegenbaur, Grundzüge der vergleichenden Anatomie, 1870, S. 657. — G. Romiti, Lo sviluppo e le varietà dell' osso occipitale nell' uomo. Siena 1881.

[2]) Zaaijer, l. c. S. 212.

sächlich von dem verdienstvollen Dr. C. Swaving zusammengebracht ist. Mit einer etwaigen größeren Frequenz der Anomalie bei den ostindischen Völkern hat dies also nichts zu schaffen."

Zur Beantwortung der Frage über die Persistenz der Synchondrosis condylo-squamosa bei Erwachsenen hat Zaaijer 895 Menschenschädel durchmustert. Daran reiht sich die Untersuchung von 1364 Tierschädeln von erwachsenem Alter:

Simiae 443; Carnivora 311; Ruminantia 210; Pachydermata 101; Sirenia 4; Cetacea 41; Rodentia 155; Insectivora 20; Chiroptera 23; Bruta 21; Marsupialia 35.

Unter Zuzählung der untersuchten jugendlichen, noch nicht erwachsenen Schädel steigt die Gesamtsumme der von Zaaijer untersuchten Tierschädel auf 1885.

Die Abhandlung ist durch zahlreiche Abbildungen erläutert.

Wie vollkommen anerkannt die Beobachtungen Zaaijers unter den deutschen Anatomen sind, beweist z. B. das Zitat von Professor Dr. F. Graf von Spee in seinem klassischen Werke: Kopf[1]).

„Die Verwachsung der Schuppen mit den Seitenteilen kann sich verzögern oder überhaupt bloß unvollkommen vollziehen, so daß eine Spalte, entsprechend der lateralen Abteilung der Synchondrosis condylo-squamosa[2]), bestehen bleibt. Vorkommen bei Erwachsenen in 5,3% der untersuchten Fälle (nach Zaaijer)." „Beim Menschen beteiligen sich regelmäßig sämtliche knorpelig präformierten Elemente des Occipitale an der Umrandung des Hinterhauptslochs (nach Zaaijer)."

Zwischen den Beobachtungen der älteren Autoren über den Gang der knöchernen Verwachsung der Fuge zwischen den Gelenkteilen und der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins an Kinderschädeln und dem im vorstehenden mitgeteilten Resultate

---

[1]) Graf von Spee l. c. Jena 1896, S. 105 und 106.

[2]) Diese Bezeichnung der Fuge scheint Herr Zaaijer in die Anatomie eingeführt zu haben.

des Herrn Zaaijer an einer so großen Anzahl von Schädeln Erwachsener besteht nach dem vorstehend Mitgeteilten ein bisher unausgeglichener Gegensatz. Nach den ersteren finden sich gelegentlich Fugenreste bei jungen Schädeln im Anschluß an den Rand des Foramen magnum, also medial; Zaaijer, dem sich ein so ausgezeichneter Kenner des menschlichen Schädels wie Graf von Spee rückhaltlos anschließt, konstatiert dagegen an 895 erwachsenen Menschenschädeln die von ihm statistisch aufgenommenen Fugenreste ausnahmslos lateral an dem an die Sutura masto-occipitalis anstoßenden Ende der Synchondrosis.

Seit Jahren habe ich mich mit dieser Frage beschäftigt.

Ehe ich meine eigenen statistischen Aufnahmen zu dieser Frage veröffentlichen konnte, erschien die Abhandlung des Herrn Professor Dr. Bolk, Amsterdam, Über die Obliteration der Nähte am Affenschädel, zugleich ein Beitrag zur Kenntnis der Nahtanomalien[1]), welche eine Fülle neuen und wichtigen Beobachtungsmateriales vorwiegend an Affenschädeln bringt.

Auffallenderweise wird, trotz sonstiger eingehender Literaturangaben, von Herrn Professor Dr. L. Bolk in Amsterdam die eben in ihren Resultaten dargelegte Abhandlung des Herrn Professor Dr. Zaaijer in Leiden nicht erwähnt oder berücksichtigt, was um so näher gelegen wäre, weil die Resultate beider Autoren in dem obenerwähnten unausgeglichenen Gegensatz zueinander stehen.

Herr Bolk sagt l. c. S. 154: „Sutura condylo-squamosa. Diese Naht gehört auch am Menschenschädel zu jenen, welche sich ziemlich kurz nach der Geburt schließen. Wir haben jedoch im deskriptiven Teil schon mehrfach Gelegenheit gehabt, darauf hinzuweisen, daß bisweilen der Verschluß dieser Naht bei Affen retardiert ist. Beim Menschen ossifiziert bekanntlich die Verbindung zwischen Pars condylica und Squamosa des Occipitale am Ende des zweiten Lebensjahres, also nachdem das Milchgebiß komplett geworden ist.“ „Wenn man mensch-

[1]) L. Bolk, l. c. S. 1—206, 912. — S. auch Ranke l. c.

liche Schädel auf diesen Punkt untersucht, so kann man sich leicht überzeugen, daß der Verschluß meistenfalls in der Mitte anfängt, um von hieraus zunächst in lateraler Richtung fortzuschreiten. Untersucht man deren auch Kinderschädel aus dem letzten Trimensium des zweiten Jahres, dann findet man gewöhnlich den lateralen Teil der Naht verstrichen und nur die mediale, vom Rand des Foramen magnum ausstrahlenden Reste sind noch da. Der mediale Teil der Naht



Fig. 5 nach Bolk. Synchondrosis condylo-squamosa. Kindlicher Menschenschädel.



Fig. 6 nach Bolk. Synchondrosis condylo-squamosa. Kindlicher Orangutan-Schädel.

schließt sich somit am spätesten. Die Figur 5 (l. c. S. 155) gibt Lagerung und Ausbreitung der Nahtreste an einem Kinderschädel von 20 Monaten wieder. In diesem Obliterationsvorgang steht der Mensch unter den Primaten wohl einzig da. Denn was die Affen anbelangt, so findet man ohne Ausnahme eine andere Obliterationsrichtung. Auch hier fängt meistenfalls die Obliteration in der Mitte an, um von hier, statt wie beim Menschen in laterater Richtung in medialer fortzuschreiten, um zuerst den Rand des Foramen magnum zu erreichen. Die Figur 6 (l. c. S. 155) bringt zum Beweis davon eine Skizze der occipitalen Region eines jungen Orangutan-Schädels mit Milchgebiß und erstem Dauermolaren. Im Gegensatz gegen den Menschen sind hier auch die lateralen Reste der Naht zubeobachten. Wie gesagt ist diese Verschlußrichtung eine für alle Affen geltende. Man vergleiche dazu z. B. auch die Figur 3 (l. c. S. 16). Die laterale Hälfte ist es nun, welche bei den Affen sich bisweilen auffallend lang erhält.“



Fig. 7.

Nach den Resultaten Zaaijers gilt das gleiche aber auch beim (erwachsenen) Menschen in ca. 5⁰/₀ der Fälle. Der Autor gibt eine anschauliche Abbildung[1]) der Hinterfläche eines Hinterhauptsbeins eines 16 bis 18jährigen Mannes aus einem Grabe auf der Insel Disko an der dänischen Westküste Grönlands mit großen (23 mm langen) seitlichen Resten der Synchondrosis condylo-squamosa (Fig. 7); dieser auffällige Befund veranlaßte ihn, die Verwachsungsverhältnisse der Fuge näher zu studieren. (Fig. 7, 8 und 9.)

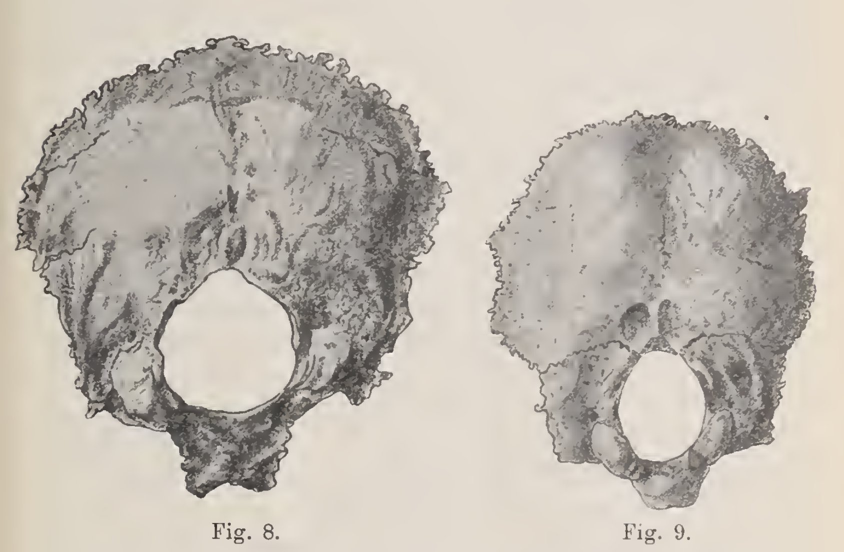


Fig. 8. Fig. 9.

Fig. 7, 8 und 9. Synchondrosis condylo-squamosa beim Menschen nach Zaaijer. — Fig. 7 und 8 Syn. c.-sq. noch teilweise lateral offen, Fig. 9 noch ganz offen.

---

1) T. Zaaijer, Anatomischer Anzeiger, Bd. IX, 1894, S. 338 und derselbe: Anatomische Hefte, I. Abt., Bd. IV, Heft II, Taf. XVI, Fig. 1, 2. 3.

Meine Untersuchungen über Persistenz von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa am erwachsenen Schädel des Menschen und des Orangutan.

1. Untersuchung an erwachsenen Menschenschädeln. (1000 Europäer, 200 Südsee-Eingeborene.)

Die weit überwiegende Mehrzahl der von mir auf die Persistenz von Resten der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa untersuchten 1000 erwachsenen Europäerschädel stammt aus drei Regierungsbezirken Bayerns: Oberbayern, Oberpfalz, Oberfranken, außerdem wurden noch in die Untersuchung einbezogen eine Anzahl von Schädeln aus Württemberg und einige aus Paris stammend.

Unter den 1000 erwachsenen europäischen Schädeln fanden sich 10 mit einem einseitigen oder mit doppelseitigem Rest der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa.

Die Einzelbeobachtungen stelle ich in der folgenden Tabelle zusammen. Eine Trennung der Schädel nach dem Geschlecht habe ich nicht vorgenommen. Jugendliche Schädel vor Vollendung der zweiten Zahnung waren hier ausgeschlossen.

Tabelle I.

Über das Vorkommen von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa unter 1000 erwachsenen Europäerschädeln.

Anzahl	Herkunft der Schädel	Synch. cond.-squam. rechts	Synch. cond.-squam. links
	Oberbayern		
1.	(Neukirchen)	—	| 11 mm
	„	—	| 11 mm
3.	(Münchener Landbevölkerung	| 8 mm	| 8 mm
4.	Oberpfalz (Chammünster)	| 14 mm	| 13 mm
5.	(Burglengenfeld)	| 17 mm	| 17 mm

Anzahl	Herkunft der Schädel	Synch. cond.-squam. rechts	links	
6.	Oberfranken (Ebrach)	| 6 mm	— . .	mit Stirnnaht.
7.	„	—	| 7 mm	
8.	„	—	| 24 mm	
9.	Württemberg	| 19 mm	— . .	mit Stirnnaht.
10.	Frankreich (Paris)	—	| 5 mm	

Bemerkungen. — fehlend, | vorhanden. Die Zahlen geben die gerade Länge der Synchondrosenreste in Millimeter an

Unter den in der vorstehenden Tabelle aufgeführten zehn Schädeln mit Resten der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa fanden sich drei, bei denen die Reste doppelseitig, rechts und links, und sieben, bei denen solche Reste nur einseitig vorhanden sind, bei zwei von diesen rechts und bei fünf links.

Die gerade Erstreckung des Fugenrestes, die Länge, auf welche die fötale Fuge noch offen ist, schwankt zwischen 5 und 24 mm. Es stimmt das mit den Resultaten von Zaaijer gut überein, ebenso fand ich wie er: die Lage des persistierenden Restes der fötalen Fuge, Synchondrosis condylo-squamosa bei erwachsenen Europäerschädeln ausnahmslos lateral.

Wenn ich somit die Angaben Zaaijers, im Gegensatz gegen Bolk u. a. (siehe oben S. 438) bestätige, so besteht zwischen den statistischen Ergebnissen von Zaaijer und mir doch ein auffallender Unterschied: während Zaaijer 5 % gezählt hat unter 895, zählte ich nur 1 % unter 1000 Schädeln erwachsener Europäer mit fötalen Resten der fraglichen Fuge.

Zaaijer hat es trotz der großen Anzahl der von ihm zu seiner Statistik benützten Menschenschädel abgelehnt, eine Antwort auf die Frage zu geben, ob der Perstistenz der Synchondrosis condylo-squamosa als Rassenmerkmal einiger Wert beizulegen sei. Er weist aber doch darauf hin, daß unter den Schädeln, an welchen er diese Anomalie vorfand, relativ viele

aus dem Ostindischen Archipel stammen (siehe S. 436). Da ihm aber zur Vergleichung europäisches Material nicht in genügender Anzahl zur Verfügung stand, glaubte er sich doch nicht zu dem Schluß berechtigt, daß seine Zählungen etwas für eine größere Frequenz der Anomalie bei den ostindischen Völkern beweise.

Die Frage nimmt nun aber nach unseren Untersuchungen an ausschließlich europäischen Schädeln ein anderes Gesicht an. Wir dürfen fragen: Erklärt sich die auffallende Differenz in der Häufigkeit der Reste der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa nach den Zählungen von Zaaijer und mir daraus, daß ersterer der Hauptsache nach ostasiatische, ich lediglich europäische Schädel auf die betreffende Anomalie untersucht habe?

Danach scheint doch die Vermutung berechtigt, daß bei den Ostasiaten die Anomalie weit häufiger sich findet (5 %) als bei den Europäern (1 %).

Als Beitrag zur Lösung der Frage nach der etwaigen Bedeutung der Persistenz der condylo-occipitalen Fuge als Rassenmerkmal habe ich an 200 voll erwachsenen Schädeln aus Neu-Pommern und den Salomons-Inseln (aus der Kollektion Frizzi unserer anthropologischen Sammlung) das Vorkommen der fraglichen Anomalie gezählt. Das Resultat gibt die folgende Tabelle.

Tabelle II.

Über das Vorkommen von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa unter 200 erwachsenen Schädeln aus Neu-Pommern und den Salomons-Inseln.

Anzahl	Herkunft der Schädel	Synch. cond.-squam. rechts	links
	Neu-Pommern		
1.	(Gunanur)	6 mm	6 mm
2.	"	7 mm	—
3.	"	9 mm	10 mm
4.	"	15 mm	—

Anzahl	Herkunft der Schädel	Synch, cond.-squam. rechts	links
5.	"	—	| 16 mm
6.	(Baining)	| 4 mm	| 12 mm
	Salomons-Inseln		
7.	(Baku)	| 9 mm	—

Bemerkungen siehe Tabelle I S. 443. Stirnnahtschädel fehlen unter den 200 Schädeln.

Unter den 200 der vorstehenden Tabelle zu Grunde liegenden erwachsenen Schädel, die ich als Südseeschädel bezeichnen will, fanden sich nach dem Vorstehenden: sieben Schädel mit Resten der Synchondrosis condylo-squamosa. Bei drei Schädeln zeigte sich die Persistenz von Resten der fötalen Fuge doppelseitig, rechts und links, bei vier Schädeln nur einseitig, dreimal rechts, einmal links. Auch hier fanden sich wie bei den erwachsenen Europäerschädeln die Reste der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa ausnahmslos **lateral.**

Die fraglichen Fugenreste sind sonach unter unseren 200 Südseeschädeln auffallend viel häufiger als unter unseren 1000 Europäerschädeln. Bei ersteren fanden sie sich unter 200 siebenmal, bei den zweiten unter 1000 nur zehnmal. Unter 1000 Südseeschädeln hätten wir dagegen 35 mit der fraglichen Anomalie zu erwarten = 3,5 %.

Das ergibt folgende Reihe:

1000	Europäerschädel (J. Ranke) . . .	1 %
200	Südseeschädel (J. Ranke)	3,5 %
895	Schädel vorwiegend aus dem Ostindischen Archipel (Zaaijer)	5 %.

Diese statistischen Ergebnisse deuten doch entschieden auf eine größere Häufigkeit der teilweisen Persistenz der Synchondrosis condylo-squamosa bei den Eingeborenen des Ostindischen Archipels und der deutschen Südseebezirke.

Da nach dem definitiven Verschluß der Fugen an der Schädelbasis das Wachstum der letzteren in den betreffenden

Richtungen beendigt ist, so scheint bei jenen außereuropäischen Völkern das Wachstum der Schädelbasis häufiger etwas länger andauern zu können als bei den Europäern.

Anhangsweise mögen hier noch einige Zählungsresultate an kleineren Schädelserien mitgeteilt werden über das Vorkommen von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa bei verschiedenen Menschenrassen.

I. Europäer:	Anzahl der untersuchten Schädel		davon zeigen Reste der Synch. con.-sq.	
Kelte (Isländer)	1		0	
Pariser	16		0	
Ungarn	30		1	
Tiroler	17		2	
Österreichische Slaven:				
Petrowatz	29	98	1	1
Olmütz	30		0	
Nobol	29		0	
Dubidirtsch	10		0	
Aus einst slavisch. Gegenden Bayerns:				
Weischenfeld	101	105	4	4
Weiden	4		0	
Bayerische Westfranken:				
Ebrach	73		3	
	Summe 340		Summe 11 = 3,2 %	
II. Amerikaner:				
Altamerikaner	5	13	2	4
Indianer	8		2	
Eskimo	2		0	
III. Australier und Südsee-Insulaner:				
Australier	5		1	
Bismarck-Archipel	6	8	0	0
Neu-Guinea	2		0	

	Anzahl der untersuchten Schädel		davon zeigen Reste der Synch. con.-sq.	
IV. Asiaten	3		0	
V. Afrikaner:				
Massai	9		2	
Pare-Neger	4	12	1	1
Usambara	2		0	
Jaunde	1		0	
Bakwiri	3		0	
Dahome	2		0	
	Summe 52		Summe 7 = 19,2%.	

Die Gesamtsumme der im vorstehenden aufgeführten Schädel beträgt 392 (340 Europäer, 52 Nichteuropäer), darunter 18 = 4,6% mit Resten der Synchondrosis condylo-squamosa.

Die Serien sind ja viel zu klein, als daß sie eine Grundlage für eine sichere Statistik abgeben könnten, aber immerhin ist es im Hinblick auf unsere im vorausgehenden mitgeteilten Resultate beachtenswert, daß auch diese Reihe ein bedeutendes Überwiegen des Vorkommens von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa bei dem außereuropäischen Schädelmaterial (hier 19,2%) gegenüber dem europäischen (hier 3,2%) ergibt. —

Da sich unter den außereuropäischen Schädeln in überwiegender Anzahl solche von dolichocephaler Form finden, könnte man auf die Vermutung kommen, daß die Dolichocephalie als solche, also nicht eigentlich die Rasse, eine Ursache für ein häufigeres Persistieren von Resten der betreffenden fötalen Fuge abgebe.

Unter unseren im vorstehenden aufgeführten bayerischen Schädeln zeigen zwei größere Serien: einerseits die 101 Schädel aus Weischenfeld aus einer einst slavischen Gegend und andererseits die 73 Schädel der Serie der den urgermanischen Rheinfranken und Thüringern nächststehenden bayerischen Westfranken (Ebrach) beide relativ gleichmäßig hohe prozentische

Werte für das Persistieren der Fuge ca. 4 %. Aber die Weischenfelder Schädel sind überwiegend brachycephal, die Ebracher vorwiegend dolichocephal und mesocephal. Das spricht entschieden gegen den Gedanken, daß die Schädelform als solche die Ursache der Persistenz sein könne. –

R. Virchows Bemerkungen scheinen darauf hinzuweisen (siehe oben S. 434), daß die Persistenz der Symphysis condylo-squamosa in irgend einer Beziehung zu der Verknöcherung des Ossiculum Kerckringii, das bei fötalen Schädeln sich in der Mitte des Hinterrandes des Foramen magnum findet[1]), stehen könnte.

Ich habe bei den 392 Schädeln der vorstehenden Reihe das Vorkommen eines deutlichen Ossiculum Kerckringii gezählt.

Während es in all den anderen Serien der vorstehenden Reihe (S. 446) fehlt, fand ich das Ossiculum Kerckringii

unter	9	Massai	1 mal
„	3	Bakwiri	1 „
„	16	Parisern	1 „
„	30	Schädeln aus Olmütz	1 „
„	101	Schädeln aus Weischenfeld	1 „
„	233	Schädeln der anderen Serien der vorstehenden Reihe	0 „
Summe	392	Schädel verschiedener Rasse zeigten ein Ossiculum Kerckringii . Summe	5 mal

= 1,25 %.

Das Vorhandensein eines deutlichen Ossiculum Kerckringii (in 1,25 %) ist danach eine weit größere Seltenheit als die Persistenz der Reste der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa (in 4,6 %) und ein Zusammenhang zwischen beiden Bildungen läßt meine Zählung nicht erkennen.

Immerhin muß daran erinnert werden, daß die Verknöcherung des Innenrandes des Foramen magnum in der Mitte, also an der Stelle des Ossiculum Kerckringii gar nicht selten verzögert erscheint, aber, soviel ich sehe, ohne erkennbaren Zusammenhang mit jener Synchondrose.

1) J. Ranke (Hautknochen), l. c.

2. Untersuchung von 70 erwachsenen europäischen Stirnnahtschädeln.

Unter den älteren Angaben über die Häufigkeit der Persistenz der fraglichen Fuge wurde oben die Beobachtung von H. Welcker erwähnt, daß er den verzögerten Verschluß der Synchondrosis condylo-squamosa vorzüglich an Stirnnahtschädeln beobachtet habe.

In der Tabelle I (S. 443) sind unter den zehn Schädeln mit offenen Resten der betreffenden fötalen Fuge zwei Schädel mit Stirnnaht angeführt. Es deutet das offenbar in die gleiche Richtung wie Welckers Beobachtungen. Die zwei Stirnnahtschädel bilden 20 % der Reihe, während das Vorkommen der Stirnnaht auch bei Europäerschädeln ein weit selteneres ist.

Unter 1500 erwachsenen Europaerschädeln unserer anthropologischen Schausammlung finden sich 70 Stirnnahtschädel, also 3,7 (3,66) %.

Ich habe diese 70 Schädel auf das Vorkommen von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa untersucht. Es fanden sich außer den zwei in Tabelle I enthaltenen noch vier, also im ganzen sechs Schädel mit solchen Resten.

Während in den 1000 darauf untersuchten Schädeln erwachsener Europäer nur 1 % mit Persistenz der betreffenden Fugenreste gefunden wurden, wurden unter den 70 Stirnnahtschädeln sechs, das sind 8,6 %, gezählt.

Das bestätigt die Angabe von H. Welcker, daß sich an europäischen Stirnnahtschädeln der verzögerte Verschluß der Synchondrosis condylo-squamosa häufiger als an anormalen Schädeln findet.

Die Einzelresultate ergibt die folgende Tabelle.

Tabelle III.

Über das Vorkommen von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa unter 70 erwachsenen europäischen Stirnnahtschädeln.

Anzahl	Herkunft der Schädel	Synchon. cond.-squam. rechts	links
	Oberfranken		
1.	(Ebrach) (6) . . .	| 6 mm	—
2.	Württemberg (9) . .	| 19 mm	—
	Oberpfalz		
3.	(Chammünster) . . .	—	| 25 mm
4.	(Waischenfeld) .	| 18 mm	| 20 mm
5.	„ . .	—	| 14 mm
6.	„ . . .	—17 mm	—

Bemerkungen. 1 und 2 stehen schon in Tabelle I als Nr. 6 und 9.

Ich hebe speziell hervor, daß auch bei diesen erwachsenen Stirnnahtschädeln die Reste der Synchondrosis condylo-squamosa sich stets, ausnahmslos, nur lateral gefunden haben.

Wenn sich, trotz meiner negativen Befunde, medial, am Rande des Foramen magnum gelegene persistierende Reste dieser Fuge bei erwachsenen Menschenschädeln finden sollten, so würde das jedenfalls als ein ausgesprochen seltenes Vorkommen zu gelten haben. Ich möchte aber die Fachgenossen auf diese Frage speziell aufmerksam machen, da ein solches Vorkommen, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, in der Tat als mehr als wahrscheinlich vorausgesetzt werden muß.

3. Untersuchungen von 42 menschlichen Kinderschädeln.

Gutes Material für eine statistische Untersuchung menschlicher Kinderschädel ist in den kraniologischen Sammlungen ziemlich spärlich vertreten.

Ich konnte aus unserer anthropologischen Sammlung 42 Kinderschädel für die vorliegende Frage verwenden. Ihre Herkunft ist eine ziemlich bunte:

Es stammen:

	Anzahl
aus Bayern	
steinzeitliche Höhlenschädel	2
südbayerische Land- und Stadtbevölkerung	17
aus Böhmen (Tschechen)	1
aus Frankreich (Paris)	1
aus Labrador (Eskimo)	2
aus Peking und Formosa (Chinesen) . .	4
aus Altperu	8
Südsee-Insulaner	6
aus Madagaskar	1
Summa	42 Schädel.

Die Synchondrosis sphenobasilaris, die Basalfuge, aller dieser Schädel ist noch weit offen, weitaus die Mehrzahl besitzt ein vollständiges Milchgebiß, bei zwei ist die erste Zahnung noch nicht vollendet, bei einem dieser letzterwähnten sind die oberen Schneidezähne eben durchgebrochen, bei dem zweiten fehlt noch der zweite Milchmolar; vier Schädel haben schon die ersten bleibenden Molaren. Alle können sonach als Kinderschädel bezeichnet werden.

Nur die Verhältnisse der Kinderschädel können uns wohl die Lösung des Rätsels bringen, wie es möglich ist, daß zwischen den Resultaten der Autoren der im vorstehenden festgestellte Gegensatz hervortritt.

Während Zaaijer, Graf Spee und ich, gestützt auf eine etwa 2000 Schädel umfassende Statistik, die persistierenden Reste der Synchondrosis condylo-squamosa bei erwachsenen Menschenschädeln sehr differenter Rassen ausnahmslos lateral angetroffen haben, findet Bolk diese Fugenreste beim Menschen im Gegensatz gegen die Verhältnisse bei Affen stets medial am Rande des Foramen magnum. Nach den oben S. 432 ff. gegebenen Notizen aus der älteren Literatur fanden auch R. Virchow, C. Toldt, H. Welcker, Rambaud und Renauld, auch Sappey, die persistierenden Fugenreste medial, am Rand des Foramen magnum.

Alle die letztgenannten Autoren haben an kindlichen Schädeln untersucht. Die Differenz der Resultate erscheint sonach in verschiedenem Material, das den Untersuchungen zu Grunde lag, begründet.

Nach Bolk u. a. beginnt beim Menschen die Verknöcherung der Fuge in einer mittleren Strecke derselben und schreitet von da lateralwärts fort, die mediale Strecke schließt sich zuletzt.

Auch nach R. Virchow schließt sich zuerst der laterale Abschnitt der Fuge und der mediale Abschnitt des Foramen magnum bleibt noch erhalten; anders bei der die Pars condyloidea des Hinterhauptsbeins mit der Pars basilaris desselben Knochens verbindenden Fuge, der Synchondrosis condylo-basilaris, bei welcher die Verknöcherung medial, am Rand des Foramen magnum beginnt und lateral fortschreitet, so daß ein Fugenrest in den äußeren Teilen noch persistiert, während die inneren (am Foramen magnum) schon fest verknöchert sind.

Ich will hier zunächst hervorheben, daß meine Untersuchungen an den Kinderschädeln den erwähnten Gang an der Synchondrosis condylo-basilaris vollkommen bestätigen. An drei dieser Schädel war diese Fuge teilweise verknöchert, bei allen drei war die Verknöcherung am Rand des Foramen magnum eingetreten, während die Außenpartie der Fuge noch relativ weit offen geblieben war.

Meine Resultate bezüglich der Verknöcherung der Synchondrosis condylo-squamosa fasse ich in folgende Tabelle zusammen.

Tabelle IV.

Über das Vorkommen von Resten der Synchondrosis condylo-squamosa unter 42 Kinderschädeln verschiedener Rassen.

		Synchond. cond.-squam. rechts		links	
Anzahl	Herkunft der Schädel	innen (medial)	außen (lateral)	innen (medial)	außen) (lateral
	Bayern				
1.	(Höhlenschädel)	—	| 10 mm	—	—
2.	(Landbevölkerung)	—	—	—	| 15 mm

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="4">Synchond. cond.-squam.</th></tr>
<tr><th></th><th></th><th colspan="2">rechts</th><th colspan="2">links</th></tr>
<tr><th>An-
zahl</th><th>Herkunft
der Schädel</th><th>innen
(medial)</th><th>außen
(lateral)</th><th>innen
(medial)</th><th>außen
(lateral)</th></tr>
<tr><td>3.</td><td>Landbdvölkerung</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>„</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>| 7 mm</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>„</td><td colspan="2">ganz offen</td><td>| 20 mm</td><td>—</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>„</td><td>| 6 mm</td><td>—</td><td>| 6 mm</td><td>—</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Peking</td><td colspan="2">zerbrochen</td><td>—</td><td>| 23 mm</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Paris</td><td colspan="2">zerbrochen</td><td>| 5 mm</td><td>| 15 mm</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Südsee</td><td>| 13 mm</td><td>| 24 mm</td><td>| 9 mm</td><td>—</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>„</td><td>| 14 mm</td><td>| 16 mm</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>„</td><td>—</td><td>| 8 mm</td><td>—</td><td>| 5 mm</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>„</td><td>—</td><td>| 6 mm</td><td>—</td><td>| 4 mm</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>Peru (Ancon)</td><td>| 10 mm</td><td>—</td><td colspan="2">zerbrochen</td></tr>
</table>

Bemerkungen.

| offen, — geschlossen.

1. und 2. Der zweite bleibende Molar im Durchbruch.

4. Oben und unten nur der erste Milchmolar vorhanden.

6. Stirnnaht.

7. Links nur die Mittelpartie der Synchondrosis verschlossen.

9. Rechts nur die Mittelpartie der Synchondrosis verwachsen.

12. Oben der erste bleibende Molar durchgebrochen.

13. Schöner, vollständiger Inkaknochen. Erster bleibender Molar durchgebrochen.

Unter den 42 Kinderschädeln fanden sich 13 mit Resten der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa. Bei Nr. 4 war die Fuge auf der rechten Seite des Schädels noch ganz offen.

Bei acht Schädeln fanden sich die Reste der fötalen Fuge nur lateral, außen.

Bei fünf Schädeln fanden sich mediale Reste der Fuge.

Bei einem Schädel der letzteren Gruppe (Nr. 4) war rechts die Fuge noch ganz offen, links teilweise und zwar medial. Nr. 5 zeigt rechts und links nur mediale Fugenreste. Bei Nr. 7, 8 und 9 zeigt sich die Mittelpartie der Fuge verwachsen, bei Nr. 7 links, bei den beiden anderen, Nr. 8 und 9, rechts. Nr. 8 zeigt auch links einen medialen Fugenrest.



Fig. 10. Photographie nach Original. Pariser Kind (7 Jahre).

An Kinderschädeln finden sich sonach in der Tat die von den genannten Autoren beschriebenen medialen Fugenreste am Rand des Foramen magnum vor, aber auch bei den Kinderschädeln sind die Fugenreste lateral weit häufiger als die medialen. Nur bei zwei dieser Schädel sind nur mediale Fugenreste vorhanden. Bei drei Schädeln sind sowohl rechts wie links in den gleichen Fugen laterale und mediale Reste vorhanden, mit anderen Worten die Fuge zeigt erst in ihrem mittleren Verlauf Verknöcherung und ist rechts und links noch offen (Fig. 10) — welche Seite sich zuerst schließen wird, ob also ein medialer oder lateraler Rest der Fuge bleiben wird, ist nichtzu bestimmen.

Das Resultat der Untersuchung der Kinderschädel kann dahin zusammengefaßt werden, daß bei diesen sowohl la-

terale wie mediale Reste der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa vorkommen, daß aber die lateral liegenden weit häufiger sind, so daß dadurch das ausschließliche Vorhandensein letzterer bei Erwachsenen verständlich wird.

Eine in dem Grade strikte Gesetzmäßigkeit der Verknöcherung der Fuge für den Menschen, wie ihn die älteren Autoren angenommen haben, kann nicht mehr festgehalten werden.

4. Untersuchung von 246 (244) Orangutan-Schädeln der Selenkaschen Sammlung.

Bei der Gruppe der männlichen 15 und weiblichen 4 Säuglinge (nach Selenkas Bezeichnung) ist die Synchondrosis condylo-squamosa beiderseits noch vollkommen offen. Die Stelle, an welcher die Fuge an die Pars mastoidea der Lambdanaht, Sutura mastoidea, anstößt, bildet eine Art von Fontanelle, hier finden sich bei zahlreichen Schädeln erwachsener Orangutan beider Geschlechter, bei denen die Fuge vollständig verknöchert und verstrichen ist, Wormsche Knochen, welche sonst bei den Orangutan-Schädeln zu den Seltenheiten gehören. An der typischen Stelle, etwa in der Mitte der Sutura mastoidea, darf sonach dieser Schaltknochen als ein Fontanellknochen angesprochen werden[1]).

Bei der Gruppe der Kinder, 8 männlichen und 14 weiblichen Geschlechts, ist die Synchondrose bei weiblichen zu 80%, bei männlichen zu 71% ganz oder teilweise offen.

Bei der Gruppe der Jungen, 12 männlichen und 20 weiblichen Geschlechts, sind die prozentischen Zahlen noch 65 und 59.

Bei der Gruppe der Uralten, 16 männlichen und 28 weiblichen Geschlechts, haben sich keine Reste der Fuge erhalten.

Die Gruppe der Erwachsenen setzt sich zusammen aus 30 männlichen und 33 weiblichen Geschlechts, zusammen 63 Schädel.

Die Gruppe der Alten umfaßt 19 männliche und 39 weibliche Schädel, zusammen 58.

Bei der relativen Seltenheit der gesuchten Anomalie erscheint

---

[1]) Siehe Figur 4 S. 433.

es wünschenswert, um größere Vergleichszahlen zu erhalten, die Gruppen der Erwachsenen mit der der Alten zu vereinigen, die kombinierte Gruppe umfaßt dann 121 Schädel, davon 49 männlichen und 72 weiblichen Geschlechts. Dazu kommen noch als „unbezeichnet“ aufgeführt fünf weibliche Schädel, so daß dadurch die Summe der weiblichen Schädel auf 77, die Gesamtsumme der Schädel beider Geschlechter auf 126 steigt.

Mit Resten der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa haben sich gefunden Schädel von

	Weibchen	Männchen
Erwachene	6	7
Alte	6	2
Summe	12 von 77 Schädeln	9 von 49 Schädeln
in Prozenten	15,6 %	18,4 %.

Unter der Gesamtsumme der erwachsenen und alten Schädel 126 fanden sich sonach 21 Schädel mit Resten der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa = 16,66 %.

Die Anzahl der Reste der fötalen Synchondrose fanden sich bei Menschen verschiedener Rassen von 1 %—5 %.

Bei den erwachsenen Orangutan ist sonach die Anzahl der Reste der fötalen Synchondrosis condylo-squamosa zum wenigsten mehr als dreimal häufiger als bei dem Menschen; wir dürfen danach ihr Vorkommen bei dem Menschen als ein **Merkmal niederer Rasse** bezeichnen.

Auch bei dem Orangutan finden sich die Reste der Fuge so gut wie ausnahmslos wie beim erwachsenen Menschen **lateral**.

Nur an einem männlichen kindlichen Schädel (Nr. 63 Skalau) mit vollständigem Milchgebiß habe ich einseitig die Fuge links medial noch offen gefunden. Auf der rechten Seite war sie noch vollkommen offen, auf der linken verwachsen bis auf eine medial, am Rand des Foramen magnum gelegene Strecke von fünf Millimetern.

Anhang.

Das Supraoccipitale des Schweins.

Herr Gegenbaur macht in seiner vergleichenden Anatomie die auffallende Mitteilung, daß den Schweinen ein Interparietale fehle (siehe oben).

Die Untersuchung frühfötaler Schweineschädel ergibt für die Untersuchung mit freiem Auge in der Tat, daß das Supraoccipitale als eine einheitliche Bildung, als ein schmaler Verknöcherungsstreifen unter der auffallend weiten hinteren Fontanelle zuerst zu Gesicht kommt. Die Anlage unterscheidet sich durch ihr kompaktes Aussehen als Knorpelknochen in auffallender Weise von den durch ihre faserig-maschige Struktur sich als Hautnochen zu erkennen gebenden beiden Parietalia und Frontalia. Die Verkalkung des Supraoccipitale nimmt mit dem Wachstum des Embryo an Breite und Höhe zu, von unten schneidet in die etwa schildförmige Anlage ein über die Mitte reichender, relativ breiter Spalt ein. Dabei wird dem freien Auge von einem gesonderten Interparietale nichts sichtbar, der Oberrand der Supraoccipitalanlage rückt mehr und mehr den Hinterrändern der Parietalia näher, wodurch die hintere Fontanelle verkleinert wird.

Bei Verwendung von stärkeren Lupenvergrößerungen klärt sich das Verhältnis auf. Die dem Interparietale entsprechende Hautverknöcherung liegt nicht vor, sondern über dem Vorderrand des Supraoccipitale und wird dadurch für das freie Auge von unten her gedeckt. Daß aber doch eine den Anlagen bei den übrigen Säugetieren entsprechende fötale Anlage eines Interparietale besteht, zeigt die von Herrn stud. med. Golling angefertigte Zeichnung (Fig. 11). Bei wenig älteren Embryonen ist das Verhältnis auch mit freiem Auge zu erkennen.



Fig. 11. Hinterhauptsbein eines Schweinembryo.

Die Verknöcherung des Occipitale superius, das sich als Knorpelknochen bildet, erscheint gegen die als Hautknochen entstehenden Hirnschädelknochen beim Schwein auffallend verzögert.

1. Der kleinste Schweinembryo, der mir zur Untersuchung vorlag, hatte eine Scheitelsteißbeinlänge von 18 mm.

Das Stirnbein erscheint als eine charakteristische Hautverknöcherung als zwei schmale Bogen über den Augen.

Das Scheitelbein ist noch sehr klein und schmal und läßt nur ein Verknöcherungszentrum erkennen.

Vom Hinterhauptsbein ist noch nichts zu sehen.

2. Embryo von 22 mm Scheitelsteißbeinlänge.

Die Verknöcherung des Stirnbeins und des Scheitelbeins etwas gewachsen, mit deutlicher Hautknochenstruktur, sonst wie bei 1.

Vom Hinterhauptsbein ist noch nichts zu sehen.

3, 4, 5. Embryonen von 21,5 mm Scheitelsteißbeinlänge, Verknöcherung des Schädeldachs wie bei 2. Die Verknöcherung der Skelettknochen beginnt.

6. Embryo von 42 mm Scheitelsteißbeinlänge.

Während die Verknöcherung von Stirnbein und Scheitelbein weiter vorgeschritten, ist von einer Hinterhauptsverknöcherung nichts zu sehen.

7. Embryo von 42 mm Scheitelsteißbeinlänge.

Trotz gleicher Größe wie 6 zeigt die Verknöcherung des Schädeldachs bei 7 weitere Fortschritte, entsprechend der schon weit fortgeschritteneren Skelettverknöcherung.

Das Stirnbein zeigt beiderseits am Augenrand die dichteste Partie, darüber die lockere Hautknochenstruktur ohne weiteres Verknöcherungszentrum.

Das Scheitelbein erscheint beträchtlich gewachsen.

Die Gestalt ist länglich viereckig (8 : 5 mm) mit abgerundeten Ecken. Die hintere Hälfte ist etwas dichter als die vordere, am oberen Rand des linken Scheitelbeins ist eine kleine Partie abgetrennt und nur durch einzelne Knochenfäserchen mit dem Hauptstück verbunden. Das rechte Scheitelbein ist mehr einheitlich.

Das Hinterhauptsbein erscheint als ein kleiner, tiefer als die Hautverknöcherungen liegender und sich durch das dichtere Aussehen als Knorpelverknöcherung zu erkennen gebender, schmaler Verknöcherungspunkt, 1,5 mm lang und ganz schmal. Es ist die Verknöcherungsanlage des Occipitale superius. Von einem Interparietale ist nichts zu sehen.

Ein ebenso großer Embryo von 42 mm Scheitelsteißbeinlänge zeigt die Verknöcherung des Schädeldachs im ganzen und auch das Occipitale superius beträchtlich weiter fortgeschritten. Es erscheint gut verknöchert, ca. 5 mm breit und

ca. 2,5 mm hoch. Die Form ist im allgemeinen oval, der Unterrand in der Mitte vorgebuchtet. Der obere Rand ist schwach konvex, die Seitenränder sind abgerundet, der Unterrand zeigt in seiner mittleren Hervorbuchtung einen tiefen Einschnitt.

Noch ist das Interparietale mit freiem Auge nicht zu erkennen. Das gelingt erst bei Embryonen von 80 und 85 mm Scheitelsteißbeinlänge, bei welchen das Supraoccipitale beträchtlich gewachsen ist. Bei einem Embryo von 80 mm habe ich das Supraoccipitale gemessen zu ca. 8 mm Länge und zirka 4 mm Höhe.

Die weiteren Verhältnisse gibt die Abbildung Fig. 11.

Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale.

Von **Edmund Landau** in Göttingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Juni 1913.

Es sei die (reelle oder komplexe) Funktion $\varphi(x)$ für $x > 1$ definiert und für jedes $y > 1$ von $x = 1$ bis $x = y$ eigentlich integrabel. In Analogie eines Tauberschen Potenzreihensatzes hatte ich[1]) bewiesen:

Es sei für $x \longrightarrow \infty$

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right),$$

also (a fortiori)

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x)\, x^{-s}\, dx$$

für $s > 0$ konvergent. Für $s \longrightarrow 0$ sei

$$f(s) \longrightarrow l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^\infty \varphi(x)\, dx = l,$$

das heißt für $x \longrightarrow \infty$

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y)\, dy \longrightarrow l.$$

In Analogie eines Littlewoodschen (den Tauberschen enthaltenden) Potenzreihensatzes läßt sich zeigen, daß diese Behauptung richtig bleibt, wenn die Voraussetzung

---

[1]) Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XVIII (1907), S. 8—28], S. 25—27.

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

durch die geringere

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

ersetzt wird. Dies ist bisher nirgends gemacht worden und soll auch hier nur als Spezialfall eines neuen allgemeineren Integralsatzes bewiesen werden, der so dazu steht wie meine[1]) Verallgemeinerung des Littlewoodschen Potenzreihensatzes zu diesem selbst. Den wesentlichsten Kunstgriff beim Beweise habe ich aus Herrn Littlewoods Abhandlung übernommen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der

Satz: Es sei für $x \geqq 1$

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y)\,dy$$

beschränkt:

$$|\Phi(x)| \leqq K,$$

also

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x)\,x^{-s}\,dx$$

für $s > 0$ konvergent und

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| = \left|\int_u^v \varphi(y)\,dy\right| \leqq 2K \qquad \text{für } 1 \leqq u \leqq v.$$

Es bezeichne $\psi(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ die hiernach endliche obere Grenze von

$$\left|\int_u^v \varphi(y)\,dy\right|$$

für jedes Wertepaar u, v, das den Ungleichungen

$$1 \leqq u \leqq v \leqq u^{1+\varepsilon}$$

---

[1]) Über einen Satz des Herrn Littlewood [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 265—276], § 3 (S. 270–273).

genügt. Es sei für $\varepsilon \to 0$

$$\psi(\varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Es sei für $s \longrightarrow 0$

$$f(s) \longrightarrow l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^\infty \varphi(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \Phi(x) = l.$$

Vorbemerkung: Dieser Satz enthält den oben angekündigten (meinen 1907er Wortlaut mit O statt o, d. h. die Behauptung: Aus $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$, $f(s) \longrightarrow l$ folgt $f(0) = l$). Denn aus

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right), \quad f(s) = O(1)$$

folgt nach einem anderen Satze meiner 1907er Arbeit[1])

$$\Phi(x) = O(1).$$

Aus

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

folgt ferner, wenn c so gewählt wird, daß für $x \geqq 1$

$$|\varphi(x)| < \frac{c}{x \log(2x)}$$

ist, für $1 \leqq u \leqq v \leqq u^{1+\varepsilon}$ (bei jedem $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} \left|\int_u^v \varphi(y)\,dy\right| &\leqq c \int_u^{u^{1+\varepsilon}} \frac{dy}{y \log(2y)} \\ &= c \log \frac{\log(2u^{1+\varepsilon})}{\log(2u)} \\ &< c \log \frac{\log((2u)^{1+\varepsilon})}{\log(2u)} \\ &= c \log(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

1) L. c., S. 27—28.

also

$$\psi(\varepsilon) \leqq c \log(1+\varepsilon),$$
$$\psi(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $l = 0$ angenommen werden, da man sonst nur die Definition von $\varphi(x)$ auf der Strecke $1 \leqq x \leqq 2$ abzuändern hätte.

Nach der Voraussetzung

$$\Phi(x) = O(1)$$

ist

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} dx$$

nicht nur für $s > 0$ konvergent, sondern ebenda beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiierbar[1]). Für $s > 0$ und ganzes[2]) $r \geqq 1$ ist demgemäß

$$f^{(r)}(s) = (-1)^r \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} \log^r x \, dx$$

und wegen[3])

$$f(s) = s \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} dx,$$

da auch hier Differentiieren unter dem Integralzeichen gestattet ist,

$$f^{(r)}(s) = (-1)^{r-1} r \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} \log^{r-1} x \, dx$$
$$+ (-1)^r s \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} \log^r x \, dx.$$

Wegen

$$|\Phi(x)| \leqq K$$

ist für festes $r \geqq 1$

---

[1]) Bekanntlich gilt dies sogar in der Halbebene $\Re(s) > 0$; vgl. z. B. meine Arbeit Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen [diese Sitzungsberichte, Bd. XXXVI (1906), S. 151—218], S. 212, Satz III'''.

[2]) r ist in der Folge durchweg ganz.

[3]) Vgl. z. B. die in der vorletzten Anmerkung zitierte Abhandlung, S. 212, Z. 1.

$$|f^{(r)}(s)| \leq Kr\int_1^\infty x^{-s-1}\log^{r-1}x\,dx + Ks\int_1^\infty x^{-s-1}\log^r x\,dx$$

$$= Kr(-1)^{r-1}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\int_1^\infty x^{-s-1}\,dx + Ks(-1)^r\frac{d^r}{ds^r}\int_1^\infty x^{-s-1}\,dx$$

$$= Kr(-1)^{r-1}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left(\frac{1}{s}\right) + Ks(-1)^r\frac{d^r}{ds^r}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= Kr\frac{(r-1)!}{s^r} + Ks\frac{r!}{s^{r+1}}$$

$$= \frac{2Kr!}{s^r}$$

$$= O\left(\frac{1}{s^r}\right).$$

Nach dem (von Herrn Littlewood herrührenden) Hilfssatz 2 meiner Arbeit aus den Rendiconti (in dem hier $x = 1 - s$ zu substituieren ist) ist also für $r \geq 0$

$$s^r f^{(r)}(s) \to 0;$$

wenn für $s > 0$, $r \geq 0$

$$s^{r+1}\int_1^\infty \Phi(x)x^{-s-1}\log^r x\,dx = h_r(s)$$

gesetzt wird, ist folglich

$$f(s) = h_0(s) \to 0,$$

$$s^r f^{(r)}(s) = (-1)^{r-1}r\,h_{r-1}(s) + (-1)^r h_r(s) \to 0 \qquad \text{für } r \geq 1,$$

also

$$h_r(s) \to 0 \qquad \text{für } r \geq 0.$$

Nun ist für $\xi > 1$, $s > 0$, $r \geq 1$

$$h_r(s) = \Phi(\xi)s^{r+1}\int_1^\infty x^{-s-1}\log^r x\,dx + s^{r+1}\int_1^\infty(\Phi(x) - \Phi(\xi))x^{-s-1}\log^r x\,dx$$

$$= \Phi(\xi)r! + s^{r+1}\int_1^\infty(\Phi(x) - \Phi(\xi))x^{-s-1}\log^r x\,dx,$$

$$|\Phi(\xi)|\,r! \leq |h_r(s)| + s^{r+1}\int_1^\infty |\Phi(x) - \Phi(\xi)|\,x^{-s-1}\log^r x\,dx.$$

Es sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ fest gegeben.

Für $\xi > 1$, $s > 0$, $r \geqq 1$ ist mit Rücksicht auf die Definition von $\psi(\varepsilon)$ (da auf der Strecke $\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqq x \leqq \xi^{1+\varepsilon}$ entweder $\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqq x \leqq \left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{1+\varepsilon}$ oder $\xi \leqq x \leqq \xi^{1+\varepsilon}$ ist)

$$s^{r+1}\int\limits_{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}^{\xi^{1+\varepsilon}} |\Phi(x) - \Phi(\xi)|\, x^{-s-1}\log^r x\, dx \leqq \psi(\varepsilon)\, s^{r+1}\int\limits_{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}^{\xi^{1+\varepsilon}} x^{-s-1}\log^r x\, dx$$

$$\leqq \psi(\varepsilon)\, s^{r+1}\int\limits_1^{\infty} x^{-s-1}\log^r x\, dx$$

$$= \psi(\varepsilon)\, r!\,.$$

Andererseits ist für $\xi > 1$, $r \geqq 1$, wenn s den speziellen Wert $s = \frac{r}{\log \xi}$ hat,

$$s^{r+1}\int\limits_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} |\Phi(x) - \Phi(\xi)|\, x^{-s-1}\log^r x\, dx \leqq 2\,K s^{r+1}\int\limits_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} x^{-s-1}\log^r x\, dx,$$

also, weil $x^{-s}\log^r x$ sein Maximum bei $x = \xi$ hat[1]),

$$\leqq 2\,K s^{r+1}\left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{-s}\left(\log\left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)\right)^r\int\limits_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} x^{-1}\, dx$$

$$= 2\,K\frac{r^{r+1}}{\log^{r+1}\xi}\left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{-\frac{r}{\log \xi}}\frac{\log^r \xi}{(1+\varepsilon)^r}\,\frac{\log \xi}{1+\varepsilon}$$

$$= \frac{2\,K}{1+\varepsilon}\, r^{r+1}\, e^{-r\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \log(1+\varepsilon)\right)}$$

$$= o(r^r e^{-r})$$

$$= o(r!),$$

---

[1]) Wegen $\frac{d}{dx}(x^{-s}\log^r x) = -\, s x^{-s-1}\log^r x + r x^{-s-1}\log^{r-1} x$ $= x^{-s-1}\log^{r-1} x(-\, s\log x + r) = s x^{-s-1}\log^{r-1} x(-\log x + \log \xi)$.

ferner

$$s^{r+1}\int\limits_{\xi^{1+\varepsilon}}^{\infty}|\Phi(x)-\Phi(\xi)|\,x^{-s-1}\log^r x\,dx \leq 2\,Ks^{r+1}\int\limits_{\xi^{1+\varepsilon}}^{\infty}x^{-s-1}\log^r x\,dx$$

$$= 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^r\int\limits_{\xi}^{\infty}y^{-(1+\varepsilon)(s+1)}\log^r y\cdot(1+\varepsilon)\,y^{\varepsilon}\,dy$$

$$= 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^{r+1}\int\limits_{\xi}^{\infty}y^{-s(1+\varepsilon)-1}\log^r y\,dy$$

$$\leq 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^{r+1}\xi^{-s\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{\infty}y^{-s-1}\log^r y\,dy$$

$$\leq 2\,Ks^{r+1}(1+\varepsilon)^{r+1}\xi^{-s\varepsilon}\int\limits_{1}^{\infty}y^{-s-1}\log^r y\,dy$$

$$= 2\,Kr!\,(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^r e^{-r\varepsilon}$$

$$= o(r!).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $r = r(\varepsilon)$ derart, daß für $\xi > 1$

$$|\Phi(\xi)|\,r! \leq \left|h_r\left(\frac{r}{\log\xi}\right)\right| + \psi(\varepsilon)r! + \varepsilon r! + \varepsilon r!$$

ist. Für $\xi > \xi_0(r) = \xi_0(\varepsilon)$ ist aber

$$\left|h_r\left(\frac{r}{\log\xi}\right)\right| < \varepsilon r!,$$

also

$$|\Phi(\xi)|\,r! < (3\varepsilon + \psi(\varepsilon))\,r!,$$
$$|\Phi(\xi)| < 3\varepsilon + \psi(\varepsilon).$$

Wegen $\psi(\varepsilon) \to 0$ ist daher

$$\Phi(\xi) \to 0.$$

Göttingen, den 28. Mai 1913.

Die Glazialhypothese und der Mond.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1913.

Daß von dem Zeitpunkte an, als sich eine gigantische Übereisung der Erdoberfläche als unbestreitbare Tatsache herausstellte, ähnliche Zustände auch für andere Weltkörper angenommen wurden, kann nicht auffallen. Für den Mars ergab sich eine gewisse Glazialhypothese ganz von selbst, da man in den ihre Größe nach Maßgabe der Jahreszeiten verändernden, weiß schimmernden Nachbargebieten der beiden Pole unmittelbar ein Analogon zum gefrorenen Wasser unserer Erde erkennen zu dürfen glaubte. Minder nahe schien in Bezug auf den Erdmond der gleiche Gedanke zu liegen, und in der Tat schreiben Diejenigen, welche auch in diesem Falle an eine ausgedehnte Vergletscherung glauben, dieser Auffassung kein höheres Alter zu. So hat sich denn auch eine Darstellung, welche verpflichtet war, auf die gleiche Frage einzugehen, kürzer gefaßt[1]), als es vielleicht mit Rücksicht auf deren Tragweite richtig war. Bei näherem Zusehen stellte sich heraus, daß doch schon verhältnismäßig früh sich Andeutungen und Vermutungen in solchem Sinne nachweisen lassen, und daß es somit als zweckmäßig erscheinen kann, die lunare Glazialhypothese in ihren einzelnen Phasen soweit als möglich zu verfolgen.

[1]) Günther, Vergleichende Mond- und Erdkunde (Die Wissenschaft, 37. Heft), Braunschweig 1911, S. 131.

Die erste deutliche Spur dürfte bei dem bekannten Münchener Astronomen F. Gruithuisen aufzuzeigen sein. Der durchaus selbständige, seiner Exzentrizitäten halber recht oft unzutreffend gewürdigte Mann[1]) äußert sich über die Möglichkeit, daß Schnee und Eis auf dem Monde zu finden sein möchten. Die lunare Klimatologie sei weit einfacher als die terrestrische, weil die Schiefe der Ekliptik einen so unbedeutenden Wert habe, und so könne von Jahreszeiten in unserem Sinne gar nicht gesprochen werden[2]). „Die selenographischen Klimate sind mit den physischen so verwebt, daß sie sich für den Beobachter nur gegen die Pole hin so bemerklich abändern, daß hier etwa vom 70. Grade der Breite an alle dunkle Farbe in den Ringflächen der Rundgebirge aufhört, und jede der Polargegenden eine besonders weiße helle Farbe annimmt, so daß man versucht würde, hier an Schneebedeckung zu denken.“

[1]) Daß er der erste war, der gewisse Oberflächenerscheinungen der sogenannten Moränenlandschaft mit den Gletschern der Alpen in ursächlichen Zusammenhang brachte, wurde bei einer früheren Gelegenheit hervorgehoben (Günther, Glazial- und Drifthypothese auf bayerischem Boden entstanden, 9. Jahresbericht der Geographischen Gesellschaft zu München (1894), S. 49 ff.; vgl. Gruithuisen, Geognostische Beobachtungen und Ansichten über die sonderbare Lagerung, Beschaffenheit und Herkunft der Urfelstrümmer in der Gegend und an den Ufern des Würmsees in Oberbayern, Neue Oberdeutsche Allgemeine Literaturzeitung, 1809, S. 1009 ff.). Des ferneren hat seine „Konglomerattheorie“, deren Originalität dadurch keine Schmälerung erleidet, daß Kants Kosmogonie auf den nämlichen Grundgedanken zurückgeht, später manche Wiederauferstehung gefeiert, ohne daß man des Urhebers zu gedenken für notwendig befunden hätte. Dieselbe (Gruithuisen, Lieblingsobjekte im Felde der Naturforschung, München 1817, S. 69 ff.; Analekten für Erd- und Himmelskunde, 3. Band (1829), S. 5 ff.), die in sehr merkwürdiger Weise auch für die Erklärung der Erderschütterungen nutzbar zu machen versucht wird, antizipiert mit den Mitteln, die eben in der Zeit ihrer Entstehung verfügbar waren, völlig die mit großem Applomb auftretende Theorie von Lockyer (The Meteoritic Hypothesis, London 1890).

[2]) Gruithuisen, Naturgeschichte des gestirnten Himmels; eine neue faßliche Darstellung der neuesten Lehren der Astronomie, nebst tabellarischer Astronomie als Anhang, München 1836, S. 173 ff.

In diesen Polarkalotten möge wohl eine Temperatur herrschen, nicht allzu verschieden von derjenigen des Weltraumes. Allein bereits zuvor hatte sich Gruithuisen selbst einen Einwurf gemacht, durch den sein Hinweis auf den Schnee des Mondes großenteils entkräftet wird. Indem er nämlich auf die lange Dauer des Mondtages, d. h. des Zeitraumes direkter Insolation, aufmerksam macht, zeigt er — hierauf wird weiter unten nochmals die Sprache kommen — die gewaltigen Temperaturgegensätze auf, welche für den Mond charakteristisch sein müssen. „Weil ganze vierzehn Tage, und darüber, die Sonne über dem Horizont steht und einen nie bewölkten Boden bescheint, so mag die Mittagshitze des Monds doch so groß werden, wie wir sie im südlichen Europa noch nicht erlebt haben[1].“ Dann freilich trete wieder eine Kälte ein, die ausreiche, um unter 45° selenographischer Breite das Quecksilber zum Erstarren zu bringen. Wie dem auch sei, an eine dauernde Bedeckung der uns zugekehrten Mondhälfte mit fest gewordenem Wasser scheint Gruithuisen nicht gedacht zu haben.

Für diese Vorstellung ist, wie es den Anschein hat, zuerst ein Gelehrter eingetreten, der mit dem vorgenannten insofern einige Ähnlichkeit bekundet, als er sich gerne auf Seitenpfaden bewegt, die zwar, soweit die Naturwissenschaften in Betracht kommen, nicht zu tieferen sachlichen Erkenntnissen führen, wohl aber in nicht geringer Anzahl beachtenswerte Seitenblicke eröffnen. Der Philosoph A. Schopenhauer ist es, der mit aller Bestimmtheit das ausspricht, was er, nicht gerade übereinstimmend mit der zumeist in seinen Äußerungen hervortretenden apodiktischen Sicherheit, „eine gewagte Konjektur“ nennt[2]. Durch den Mangel jeder Atmosphäre werde auf dem

[1] A. a. O., S. 165 ff.

[2] A. Schopenhauer, Parerga und Paralipomena; kleine philosophische Schriften, herausgegeben von J. Frauenstädt, 2. Band, 2. Auflage, Berlin 1862, S. 140. Das Werk wurde von seinem Verfasser zuerst 1851 veröffentlicht. Als unterstützend zitiert letzterer in einer Note, die allem Vermuten nach noch von ihm selbst für eine spätere Auflage bestimmt war, einen Satz A. Secchis, der (Atlas lunaire photographique,

Monde eine „fast absolute Kälte“ herbeigeführt, und da unser Trabant von der Sonne nur etwa das gleiche Maß Wärme, wie die Erde, zugesandt erhalte, so könne diese Bestrahlung keinen besonders großen Einfluß ausüben. Denn ohne Lufthülle gäbe es überhaupt keine Erwärmung! Hier gibt sich, während im allgemeinen folgerichtig geschlossen wird, der Sonderlingstandpunkt des geistvollen Autors zu erkennen, der ihn veranlaßt, sich ab und zu eine ganz eigenartige Physik zu konstruieren. Wenn die „absolut leichte“, d. h. imponderable Wärme nicht durch den Druck der auf der bestrahlten Fläche lastenden Atmosphäre zusammengehalten („kohibiert“) werde, so „verfliege“ sie sofort und könne keine Wirkung ausüben. Es ist ersichtlich, daß Schopenhauer hier das, was man damals bereits von der Diathermansie der Luft wußte, falsch aufgefaßt hat; es wird ausdrücklich bemerkt, diese sei „der schlechteste Wärmeleiter“. Als Beleg für seine Meinung führt er den ewigen Schnee der Berge an; dort sei die Atmosphäre so verdünnt, daß sie den erwähnten Druck nicht mehr auszuüben

---

Compt. Rend. de l'Acad. Franc., 47. Band, 1858, S. 362 ff.) folgendermaßen laute: „Très remarquable dans la pleine lune est le fond noir des parties lisses, et le grand éclat des parties raboteuses: doit-on croire celles-ci couvertes de glace ou de la neige?“ Da der römische Astronom unseres Wissens in der Folgezeit nicht mehr auf diesen Punkt zurückgekommen ist, so ist die Annahme gestattet, daß er lediglich von einem Bilde Gebrauch machen, nicht aber die Oberflächenbeschaffenheit des Mondes näher bestimmen wollte. Mußte es ihm doch an sich klar sein, daß die bloße Kontrastwirkung zwischen einer glatten, also spiegelnden Fläche und einer rauhen, höckerigen und deshalb diffus reflektierenden Flächenpartie das bewirken mußte, was er als scharf markierten Gegensatz kennzeichnet. — Angesichts der immer wieder bemerkbaren Abhängigkeit der Denkweise Schopenhauers von der altindischen Begriffswelt kann es kaum als ausgeschlossen gelten, daß einigen Einfluß auf ihn auch ausübte, was er in der Sanskritliteratur vorfand, wenngleich er dieser im vorliegenden Falle keine Erwähnung tut. „Bei den Indern heißt im Sanskrit der Mond als König der Sterne der kalte, auch der kaltstrahlende, während die Sonne mit ihren Strahlenhänden ein Schöpfer der Wärme heißt“ (A. v. Humboldt, Kosmos, 3. Band, Stuttgart-Augsburg 1858, S. 539).

und somit auch ein rasches Entweichen der Wärme nicht zu verhindern imstande sei. Ein Bedenken freilich kann er selber nicht verhehlen, das nämlich, daß die beim Mangel jeder entgegenwirkenden Luftschicht ungemein energisch einsetzende Verdunstung die Eisbildung von Anfang an hintanhalten müsse. Eine gewisse Auflösung der obersten Eislage werde freilich eintreten, erwidert er, aber die geringe so entstandene Dampfmenge unterliege unverzüglich wieder der Kältewirkung, und so helfe die schwache Verdunstung nur mit zur Verdickung des Eisbelages[1]). „Dieser Hypothese zufolge hätten wir alles Wasser auf dem Monde als in Eis verwandelt und namentlich den ganzen, so rätselhaften, graueren Teil seiner Oberfläche, den man allzeit als maria kennzeichnet, als gefrorenes Wasser anzusehen, wo alsdann seine vielen Unebenheiten keine Schwierigkeiten mehr machen und die so auffallenden, tiefen und meist geraden Rillen, die ihn durchschneiden, als klaffende Spalten im geborstenen Eise zu erklären wären, welcher Auslegung ihre Gestalt sehr günstig ist[2]).“ Man möchte nur fragen, weshalb das lunare Eis überhaupt zum Bersten gelangen soll, da doch weder Wärmeschwankungen noch molare Bewegungen auf der ewigem Tode verfallenen Mondoberfläche als möglich anerkannt werden. Da klafft denn doch wohl neben den Mondrillen auch eine sehr fühlbare Diskrepanz im Aufbau der Gedanken[3]). Und daß Schopenhauers Beispiel irgendwie an-

[1]) Stützen glaubt sich Schopenhauer zu können auf den bekannten Leslieschen Versuch, dessen springender Punkt das Gefrieren von Wasser im luftleeren Raume ist (vgl. F. Rosenberger, Die Geschichte der Physik in Grundzügen, 3. Teil, Braunschweig 1887—1890, S. 66 ff.).

[2]) Schopenhauer, a. a. O., S. 142 ff.

[3]) Nach anderen Seiten hinwiederum tritt der scharfe Denker wieder sehr deutlich in die Erscheinung. So dann, wenn er (a. a. O.) sich gegen die weithin gehegte Überzeugung ausspricht, es könne der Mond, weil er anders wie die Erde beschaffen ist, nicht doch zugleich der Aufenthaltsort von Lebewesen sein. Dieser Schluß erscheint ihm „kleinstädtisch“, philiströs, und in seiner Zurückweisung berührt er sich mit keinem Geringeren als mit Gauß, der ja auch die Frage nach der Bewohnbarkeit unseres Satelliten streift und dem Gedanken Raum gibt, die

regend auf die, welche nach ihm kamen, gewirkt habe, muß anscheinend in Abrede gestellt werden; man findet seinen Namen nirgendwo in den einem gleichen Ziele zugewandten Publikationen genannt.

Unter einem etwas anderen Gesichtspunkte ist an das lunare Übereisungsproblem herangetreten der bekannte schwedisch-amerikanische Ingenieur Ericsson, der indessen auch von den gewaltigen Wärmedifferenzen an der Außenseite unseres Begleiters ausging. Er stellte zur Messung derselben ein eigenes Instrument her, dem er, in Anlehnung an den bekannten Pouilletschen Apparat, die Bezeichnung Pyrheliometer beilegte, und suchte mit dessen Hilfe zu verlässigen Zahlwerten zu gelangen, was allerdings noch nicht in der Weise, wie es nachmals möglich wurde, zu erreichen war. An dem speziellen Beispiele des großen Ringberges Tycho versuchte er darzutun, daß die von der Mehrzahl der Mondforscher vulkanisch gedeuteten Erhebungen in Wirklichkeit Glazialgebilde seien. „A rigid application," so schließt er[1]), „of physical and mechanical principles to the solution of the problem proves conclusively that water subjected to the action of heat and cold has produced the circular walls of Tycho."

In Einzelheiten abweichend, in der Hauptsache überein-

Natur habe mehr Mittel zur Verfügung, als der arme Mensch ahnen könne (Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauß, herausgeg. v. Bruhns, Leipzig 1877, S. 73). Und einen freien Blick bekundet Schopenhauer in seiner (a. a. O.) aufgestellten These, „daß höchst wahrscheinlich die chemischen Elemente, nicht nur auf dem Monde, sondern auch auf allen Planeten dieselben, wie auf der Erde sind, weil das ganze System aus demselben Ur-Licht-Nebel, in den die jetzige Sonne ausgebreitet war, sich abgesetzt hat". Derjenige, der diese Worte niederschrieb, durfte noch kurz vor seinem Ende (1860) die große Entdeckung der Spektroskopie durch Bunsen und Kirchhoff erleben, durch welche der von ihm divinatorisch hingeworfene Gedanke die glänzende, alle Zweifel ausschließende Bestätigung erfahren und der Laplaceschen Evolutionshypothese eine unerwartete Stütze verleihen sollte.

[1]) J. Ericsson, The Lunar Surface and its Temperature, Nature, 34. Band (1876), S. 248 ff.

stimmend ist eine Abhandlung von Andries[1]) gehalten, die für die Eisnatur der Mondoberfläche eine Lanze bricht. Die numerischen Daten, welche der Erörterung zu Grunde gelegt sind und aus ihr hervorgehen, können schon um deswillen für die Verhältnisse der Gegenwart keine höhere Bedeutung beanspruchen, weil sie die Viollesche Solarkonstante[2]) verwenden, die unserem heutigen Wissensstande gemäß den Tatsachen nicht entspricht. Sehr bald, so heißt es, nach Anfang der Abkühlung mußte die wesentlich aus Wasserdämpfen zusammengesetzte Atmosphäre des kurz zuvor noch in feurigflüssigem Zustande sich befindenden Mondes in Schnee übergegangen sein, der sich auf der Oberfläche niederschlug. In dem Maße, wie die Verfestigung der Mondkugel fortschritt, bedeckten sich die Kontinente mit einer starken Eisrinde, während sich über den großen Wasserflächen die Dampfschicht noch etwas länger erhielt. Allmählich gingen aber auch die Meere in den festen Aggregatzustand über, ohne daß jedoch unter dieser Eisrinde alle Ansammlungen flüssigen Wassers von dem gleichen Prozesse mitbetroffen waren. Diese Wassermassen sollen sich unter der Einwirkung des heißen Mondinneren in hochgespannte Dämpfe verwandelt haben, die sich einen Ausweg suchten und in formenreichen Öffnungen die Decke durchbrachen. Je nach den Umständen bildeten sich spaltenförmige Rillen, Krater aller Art, Strahlensysteme. Was man also gewöhnlich als vulkanische Bildungen betrachte, seien Löcher im Eise mit teilweise wulstförmiger Umrandung.

---

[1]) P. Andries, Die Beschaffenheit der Mondoberfläche, Sirius, Zeitschrift für populäre Astronomie (2), 15. Band (1887), S. 148 ff.

[2]) Vgl. Violle, Die Messung der Intensität der Sonnenstrahlung, Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, 13. Band, S. 379 ff. Den Stand unseres einschlägigen Wissens, wie er sich vor etwa dreißig Jahren gestaltet hatte, kennzeichnet am besten eine tiefgreifende Untersuchung von Langley (Research on Solar Heat and its Absorption by the Earth's Surface, Washington 1884). Die erwähnte Konstante sinkt in Wahrheit erheblich unter den lange für richtig gehaltenen Wert > 3 und < 4 herunter und ist wahrscheinlich von 2 nur wenig verschieden.

Die Hypothese ist übrigens weitherzig genug, um, gewissermaßen subsidiär, auch „schlamm- und lavaartige Ausbrüche“ auf dem Monde zuzugestehen, doch müssen diese, ebenso wie die — doch wesentlich tektonische — Entstehung der Gebirge in eine verhältnismäßig sehr frühe Epoche der Mondgeschichte verlegt werden. Auf schwache vulkanische Zuckungen werden jene Veränderungen im Antlitze des Mondes zurückgeführt, deren Existenz Andries nicht gänzlich leugnen möchte[1]). Eine so detaillierte Übersicht über die bei der Vergletscherung unseres Begleiters vermeintlich zu konstatierenden Vorgänge hatte keiner der Vorgänger gegeben.

So ist es denn nicht zu verwundern, daß ein so entschiedener Anhänger der Glazialhypothese, wie der bekannte Mondbeobachter Fauth, sich auf Ericsson und Andries bezieht; völlig identifiziert er sich nicht mit ihren Anschauungen, da er insonderheit tropfbar-flüssiges Wasser noch jetzt dem Monde zuschreiben möchte[2]). Ihm zufolge ist an dem Vorhandensein von Eis im Sonnensysteme — d. h. auch außerhalb der Weltkörper selbst — nicht zu zweifeln. Sodann fällt für ihn die Färbung gewisser Mondlandschaften sehr stark ins Gewicht. Dieselben sind zum Teil von hellstem Glanze, zum Teil erwecken sie den Eindruck einer von Reif überzogenen Fläche. Um andere Farben zu erklären, macht Fauth auch bei der bekannten Meteoritenhypothese[3]) eine Anleihe; der kosmische Vagant, welcher Einbrüche und Überflutungen veranlaßt hat, sei als Urheber der dunkleren Farbentöne anzusprechen, welche zumal im Bereiche der „Meere“ die Regel bilden. Auf diese Gedankengänge, die man im Ori-

---

[1]) Wegen solcher Durchbrechungen des starren Charakters der „Weltleiche“ (Ausdruck von Andries) s. die oben zitierte Schrift (Vglch. Mond- u. Erdkunde, S. 164 ff.).

[2]) Ph. Fauth, Was wir vom Monde wissen, Entwicklung und heutiger Stand der Mondforschung, Berlin-Leipzig 1906, S. 124 ff.

[3]) Die Unzulässigkeit dieser auch in jüngster Zeit noch mit großer Lebhaftigkeit verfochtenen Doktrin ist ebenfalls am obgenannten Orte nachzuweisen versucht worden (Vglch. Mond- u. Erdkunde, S. 173 ff.).

ginale[1]) kennen lernen muß und kaum einer Paraphrase unterziehen kann, weil sie zu sehr auf ganz fremdartige Gebiete leiten, wird dann auch die Entstehung der Strahlensysteme zurückgeführt, denen gegenüber man zur Zeit noch weit besser tut, mit Erklärungsversuchen sehr vorsichtig zu sein[2]). Es wird dann von Fauth noch die Beibringung anderer Gründe für seine Glazialhypothese angestrebt. allein man kann doch leicht feststellen, daß das Studium der Färbungsunterschiede, mit denen er ja als anerkannt zuverlässiger Mondbeobachter sich besonders zu beschäftigen Gelegenheit hatte, für ihn die Hauptveranlassung zur Konzeption seiner theoretischen Anschauungen gebildet haben muß.

Und da ist es nun von Interesse, zuzusehen, wie andere Astronomen, die ebenfalls aus dem Studium der Mondgebilde ein eigenes Studium gemacht haben, sich dieser Interpretation der sehr hellen und sehr dunklen Flächenteile gegenüber verhalten haben. Günstiger scheint dieselbe zu beurteilen Pickering[3]), wenngleich er eine absolute Bejahung nicht recht wagt,

[1]) Eine auffällige Diskrepanz tritt uns entgegen bei der über die dunklen Stellen verlautbarten Ansichten. Denn, während diese oft ganz in die glänzenden Partien eingebetteten Flecke einerseits, wie erwähnt, mit extralunarer Invasion in Verbindung gebracht werden, wird ihnen andererseits vollständiger Eischarakter zuerkannt. „Nicht minder einleuchtend" sollen sie sich als aus purem, kristallinischem Eise erklären lassen. Dann heißt es (a. a. O., S. 126) weiter: „Wohl muß die Mondschale ein Eismantel sein; aber unter derselben liegt vielleicht heute noch ein Ozean, dessen Wogen einst gelegentlich durchbrachen oder durchgepreßt worden sind. . . ." Ähnlich dachte man sich noch im XVIII. Jahrhundert vielfach die großen Gebirgsgletscher als eine gewaltige Ansammlung von tropfbar flüssigem Wasser verhüllend, wohl gar auf ihr schwimmend. Aus der bekannten mittleren Dichte des Mondes und aus der weiteren Voraussetzung, daß der starre Kern des Nebenplaneten die Dichte 4,5 habe, wird dann auch noch die Tiefe des erwähnten „Ozeans" zu berechnen gesucht; sie soll 185 km betragen.

[2]) Günther, a. a. O., S. 116, S. 161.

[3]) W. H. Pickering. The Moon, a Summary of the existing Knowledge of our Satellite, with a Complete Photographic Atlas, New York 1903, S. 45 ff. „Very many of the craterlets upon the Moon are lined with a white substance which becomes very brilliant when illu-

sondern die Frage: „Ist das auffallend weiße Material gewisser Landschaften reeller Schnee?“ noch ziemlich unentschieden läßt. Daß er letzteres für wahrscheinlich erachtet, ist wohl sicher. Zumal bei Abulfeda und Censorinus sind ihm solche Wahrnehmungen gelungen, freilich nicht sowohl auf der minder klare Bilder ergebenden photographischen Platte, als vielmehr bei direkter Betrachtung durch ein stark vergrößerndes Fernrohr. Ganz anders urteilt darüber Puiseux, der diesem Gegenstande neuerdings zwei Aufsätze[1]) gewidmet hat. Er hebt zunächst als eine ebensosehr bemerkenswerte, wie zu wenig berücksichtigte Tatsache die hervor, daß der Mond ausgeprägter, ihre charakteristische Eigenschaft zur Schau tragender Polarkalotten, wie sie uns von der Erde und vom Mars geläufig sind, durchaus entbehrt. Sucht man die Gegenden heraus, die sich durch einen namhaften Glanz auszeichnen, so kann man keinen Unterschied hinsichtlich der selenographischen Breite konstatieren; Äquator und Polargebiete halten sich gegenseitig ganz die Wage. Im allgemeinen sind auch die gebirgigen Partien den mehr ebenen an Strahlungsintensität überlegen, ohne daß man doch ein Recht hätte, sie als von Schnee und Eis bedeckt anzunehmen. Aber auch eben in der sogenannten Albedo müßte sich die Natur des das Licht zurückwerfenden Stoffes offenbaren, und davon, daß die lunare Reflexionsfähigkeit mit der des Eises übereinstimme, könne gar keine Rede sein[2]).

minated by the Sun. . . .“ Diese „Kraterchen“ sind Ringgebilde von sehr geringem Durchmesser, ausgestreut durch alle Formationen.

[1]) Puiseux, Interprétation physique et historique de quelques traits de la surface de la Lune, d'après les feuilles de l'onzième fascicule de l'Atlas photographique publié par l'Observatoire de Paris, Compt. Rend. de l'Acad. Franç., 148. Band (1909, 1), S. 1744 ff.; De l'origine des contrastes de teintes et des dénivellations brusques qui se rencontrent sur la Lune, ebenda, 149. Band (1911, 2), S. 195 ff.

[2]) In ähnlicher Weise hat auch schon C. Schoy (Atmosphäre und Rotation des Planeten Venus, Gaea, 1909, 4. Heft) aus der Albedo dieses Planeten einen Gegengrund gegen die Übertragung der Glazialhypothese auf die Venus hergeleitet. S. auch Küster, Wasser und Luft auf dem Monde, Deutsche Revue, 1903, S. 244 ff.

Auch sei zu beachten, daß helle und dunkle Stellen sich da und dort unmittelbar berühren, was doch nicht der Fall sein könne, wenn erstere aus Eis bestehen würden. Entschieden wendet sich dann, was die Dunkelstellen anlangt, der zweite der genannten Aufsätze dagegen, daß man hier an eine Überlagerung mit kosmischen, d. h. meteoritischem Staube sollte denken können. Sehr treffend ist ferner Puiseux' Bemerkung, daß doch die weiß schimmernden Flächenstücke, wenn sie wirklich aus gefrorenem Wasser bestünden, unter dem Einflusse der machtvollen Temperaturveränderungen — wovon später — Gestaltänderungen erleiden müßten. Im großen und ganzen wird tektonischen Gleichgewichtsstörungen, die der Mond ganz ebenso wie die Erde, und aus den gleichen Ursachen durchzumachen hatte[1]), eine bedeutsame Rolle bei der Herausbildung der lunaren Formen von heute zugeschrieben. Schon vorher waren[2]) von dem französischen Forscher die Farbenkontraste zu den Aschenmassen in Beziehung gesetzt worden, welche während der unzweifelhaft nachweisbaren vulkanischen Periode des Gestirnes[3]) an vielen Orten sich anhäufen mußten.

Eine eingehende Untersuchung über die einzelnen Bemühungen um die Deutung der Mondprobleme besitzt man auch[4])

---

[1]) Vgl. Günther, a. a. O., S. 150 ff.

[2]) Loewy-Puiseux, L'Atlas lunaire de l'Observatoire de Paris. Compt. Rend., 126. Band (1898), S. 1539 ff.; Bulletin Astronomique, 16. Band (1899), S. 290 ff. Es wird hier auch betont, daß das gänzliche Fehlen aller im Sinne glazialer Bedeckung auszulegenden Oberflächengebilde die einzige durchgreifende Analogie zwischen der arktischen und antarktischen Mondkalotte bilde, wogegen im übrigen das Gebirgsrelief beider beträchtliche Verschiedenheiten aufweise.

[3]) Die äußerst umsichtigen Studien von Tschermak über die Gesamtheit der Agentien und Vorgänge, welche er unter dem Namen des kosmischen Vulkanismus zusammenfaßt (Die Bildung der Meteoriten und der Vulkanismus, Sirius, 8. Band (1875), S. 202 ff.) lassen es als fast notwendig erscheinen, daß jeder Weltkörper in dem langen Zeitraume, der zwischen seiner Individualisierung und Verfestigung liegt, eine vulkanische Periode durchgemacht habe.

[4]) W. Prinz, Esquisses sélénologiques, Ciel et Terre, 14. Jahrgang, S. 363 ff.

von dem viel zu früh (1910) verstorbenen belgischen Astro- und Geophysiker Prinz, der zuerst auch die Glazialtheorie eines Angloinders Teal[1]) in die Diskussion hereingezogen hat. Ersterer ist für seine Person überzeugter Anhänger der Doktrin, daß tektonische und vulkanische Prozesse — diese großenteils durch jene ausgelöst — ineinandergegriffen haben müssen, um das Antlitz des Mondes zu dem zu machen, als was es in der Gegenwart erscheint[2]). Die Notwendigkeit, irgendwie das fest gewordene Wasser zur Auflösung der noch immer die Beschaffenheit der Mondoberfläche umhüllenden Rätsel heranzuziehen, wird auch von diesem gewiegten Kenner der einschlägigen Verhältnisse bestritten.

Gewissermaßen als Potenzierung der Hypothesengebäude, welche man bezüglich der Glazialerscheinungen auf dem Monde, und wohl auch auf anderen Planeten, errichtet hat, mag jene „Glazialkosmogonie" angesehen werden, die in jüngster Zeit von Hörbiger ausgegangen ist[3]). Es gehört ihr zufolge das Eis zu den wesentlichsten Konstituenten der Weltkörper, wie denn die Mehrzahl der um die — selbst „mineralische" — Sonne kreisenden Wandelsterne aus reinem Eise zusammengesetzt sein sollen. Auch die Sternschnuppen und Meteorite gehören in diese Kategorie[4]), und ein ununterbrochener Eisregen prasselt auf die Sonne nieder. Hier ist nicht der Ort,

---

[1]) Teal, A Theorie of Lunar Surfacing by Glaciation, Calcutta 1890.

[2]) Insbesondere tritt Prinz dafür ein, daß jene Torsionstheorie, welche in neuerer Zeit eine Reihe von Freunden in ihrer Anwendung auf die Erde gefunden hat, auch einer allgemeineren Ausgestaltung fähig sei (L'hypothèse de la déformation tétraédrique de la terre de W. Lothian Green et de ses successeurs, Brüssel 1901). Diese Doktrin wird umfassend in ihrer geschichtlichen Entwicklung dargestellt.

[3]) Von derselben liegt folgende Publikation vor: Hörbigers Glazialkosmogonie, bearb. von Ph. Fauth, Kaiserslautern 1913. Unter dem gleichen Titel gab J. Riem einen erläuternden Auszug (Petermanns Geogr. Mitteil., 59. Jahrgang (1913), S. 262 ff.).

[4]) Anscheinend wird indessen zwischen den in Schwärmen umlaufenden Sternschnuppen und den gelegentlich auf die Erde herabfallenden Meteoriten ein Unterschied gemacht. Denn die Beschaffenheit der letzteren kennt man doch wohl genau genug.

die eigenartigen Spekulationen dieses Autors näher zu verfolgen; hier sollte nur um deswillen Akt von ihnen genommen werden, weil dann allerdings, wenn man sich auf solchen Boden stellt, auch der Gedanke eines gefrorenen Mondes[1]) keine Schwierigkeiten mehr zu bereiten imstande ist.

Prüfen wir nun die ziemlich spärlichen Beweise, welche man für die lunare Glazialhypothese beizubringen versucht hat, so fällt auf, daß man es als so gut wie selbstverständlich hinstellt, Wasser müsse auf dem Monde vorhanden gewesen sein. Hiefür fehlt jeder sichere Anhalt. Denn die selenitische Morphologie, über die doch wahrlich von berufener Seite viel gearbeitet worden ist, bietet nirgendwo Gesichtspunkte, aus denen irgendwie auf Wirkungen der fluviatilen Erosion, der Korrasion, zu schließen wäre. Zumal seit auch die Rillen, die eine mit minder scharfen optischen Hilfsmitteln arbeitende Zeit begreiflicherweise als Trockentäler anzusprechen geneigt war, mit großer Wahrscheinlichkeit als tektonische Gebilde erkannt worden sind[2]), muß von Kennzeichen für eine frühere Tätigkeit strömenden Wassers ein für allemal Abstand genommen werden. Allein selbst wenn man dafür hält, daß zeitweise tropfbares Wasser dem Monde nicht gefehlt habe, wird man jene Desikkationstheorie, welche im XVIII. Jahrhundert von De Maillet ausgedacht und später systematisch durchgebildet worden ist[3]), auf unseren kleinen Trabanten weit eher als auf

---

[1]) Gefroren läßt die Mondkugel auch sein Servus (Neue Grundlagen der Meteorologie, Berlin 1895 und 1897). Nur bleibt unentschieden, ob deren Inneres reines Eis ist oder ob man sich dasselbe ähnlich vorstellen soll, wie jenen ewig gefrorenen Boden, der bekanntlich für einen großen Teil Nordasiens typisch ist.

[2]) Günther Vglch. Mond- u. Erdkunde, S. 162): „Mit Prinz (Esqu. sélénol, III, S. 50 ff.) fassen wir die Rillen als Einkerbungen der Oberfläche auf, die nicht tief in die Panzerdecke hinabreichen und an ihren beiden Enden ganz unmerklich im Terrain verlaufen."

[3]) Eine Charakteristik derselben, welche durch die merkwürdige Schrift „Telliamed" (R. Sieger, Über Telliamed, Verhandl. d. 66. Versammlung d. Naturf. u. Ärzte, II, 1, S. 238) eingeleitet wurde, ist an anderer Stelle zu geben versucht worden (Günther, Handbuch der Geo-

die sehr viel größere Erde anwendbar erachten dürfen. Demgemäß erscheint es sehr wohl denkbar, daß es zur Ansammlung größerer Wasser- und Eismassen auf dem Monde überhaupt niemals gekommen ist.

Setzen wir jedoch den Fall, daß es sich anders verhalten habe, und daß zu einer gewissen Zeit eine hinlängliche Menge von Wasser existiert habe, um durch die äußerst niedrige Temperatur der kosmischen Umgebung verfestigt werden zu können. Fauth glaubt (a. a. O.), die Wärmemessungen Verys[1]), die augenblicklich ohne Zweifel die verlässigsten Zahlen für die auf unserem Begleiter obwaltenden Temperaturdifferenzen an die Hand geben, als Beleg für seine uns bekannte Doktrin ververwerten zu dürfen; da er diese Arbeit jedoch nur nach sekundärer Quelle[2]) zitiert, so darf nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß Very selbst aus seiner Gegnerschaft gegen die Ericsson-Tealsche Vergletscherungslehre kein Hehl macht. Gewiß wird durch diese aktinometrischen Vergleiche festgestellt, daß der halbmonatliche Tag und die halbmonatliche Nacht auf der uns zugekehrten Mondhälfte sich in schärfst ausgeprochener Weise offenbaren müssen, wie dies (s. o.) bereits Gruithuisen ganz zutreffend geahnt hatte. Daß während der langen Finsternis die Temperatur auf — 150°, ja auf — 200° herabgehen könne, ergibt sich aus der Natur der Sache, aber für absolut unzulässig erklärt es unser Gewährsmann, der Mondoberfläche eine annähernd konstante, mit derjenigen des Intrastellarraumes

physik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 576 ff.). Daß durch Hydratisierung der Gesteine unaufhörlich Wasser den oberflächlichen Schichten verloren gehen müsse, haben Trautschold (Über säkuläre Hebungen und Senkungen der Erdoberfläche, Dorpat 1869) und Lemberg (Über Silikatumwandlungen, Zeitschr. d. D. Geolog. Gesellsch., 28. Band, S. 515 ff.) mindestens sehr plausibel gemacht. Wieviel Wasser der Oberfläche unausgesetzt durch Absorption verloren geht, zeigt Reyer (Beitrag zur Physik der Eruptionen und der Eruptivgesteine, Wien 1877, S. 7 ff.).

[1]) Very, The probable Range of Temperature on the Moon, Astrophysical Journal, 8. Band, S. 199 ff., S. 265 ff.

[2]) S. Newcomb-R. Engelmann-H. C. Vogel, Populäre Astronomie, Leipzig 1905, S. 370.

sich deckende Temperatur beizulegen. Wenn nun aber während des vierzehntägigen sonnenlosen Zeitraumes auch ein energisches Gefrieren des angeblich vorhandenen Wassers eintritt, wird diese Eisschicht einer Bestrahlung standhalten können, die eine selbst im Durchschnitte über dem Gefrierpunkte sich haltende, im Maximum dagegen über die Siedehitze hinausgehende Temperatur erzeugt? Wahrlich, von diesem vermeintlichen Eismantel würde das Wort gelten: wie gewonnen, so zerronnen. Wer mit diesen Tatsachen rechnet, wird nicht daran denken dürfen, daß es auf dem Monde zur Herausbildung kompakter Eislagen kommen könne.

Eiu ganz besonders entscheidendes Gewicht wirft endlich noch gegen die Glazialhypothese die Größe des Polarisationswinkels in die Wagschale. Durch Landerer[1]) und weit bestimmter noch durch Ebert[2]) ist über die Zusammenhänge zwischen der Natur des lunaren Bodens und seiner Reaktion dem einfallenden Sonnenlichte gegenüber volles Licht verbreitet worden. Daß den sogenannten „Meeren“ eine gewisse Pelluzidität zukommt, läßt sich nicht leugnen, allein an Eisflächen, die ja fürs erste auch der Physiker für nicht gerade unmöglich erachten könnte, ist eben der Polarisationsverhältnisse wegen nicht zu denken. Der genannte maßgebende, die mineralogische Beschaffenheit des reflektierenden Stoffes eindeutig bestimmende Winkel ist nicht der des Eises, weicht vielmehr im Mittelwerte um mehrere Grade von demjenigen des Eises ab. Er beträgt für die Gesamtheit der Meere 33° 43′. Und da dies der Wert des Polarisationswinkels einiger natürlich-vulkanischen Gläser ist, die dem Petrographen als Tektite bekannt, und die in den aus dem Weltenraume in unsere Museen gewanderten Meteoriten wiederholt nachgewiesen sind, wie denn auch auf der

---

[1]) Landerer, Sur l'angle de polarisation de la Lune, Compt. Rend., 109. Band (1881), S. 360 ff.; Sur l'angle de polarisation des roches ignées et sur les premières déductions sélénologiques qui s'y rapportent, ebenda, 110. Band (1882), S. 210 ff.

[2]) H. Ebert, Beitrag zur Physik der Mondoberfläche, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch., Mathem.-Physik. Kl., 1909, S. 153 ff.

Erde Obsidian und Vitrophyr ein fast genau übereinstimmendes Verhalten betätigen, so ist doch wohl der Erfahrungssatz, daß die „Mondmeere“ zum sehr großen Teile erstarrte Laven darstellen, von ganz unvergleichlich überzeugenderer Kraft als die reine Vermutung, man habe es da mit einer Übereisung größten Stiles zu tun.

Auf die optisch-photometrischen Momente ist hier nicht mehr eigens verwiesen worden, da sie ja, wie wir sahen, von Puiseux bereits ausreichend geklärt sind, und da es sich als völlig unzulässig herausgestellt hat, einzig aus dem hellen Glanze einzelner Partien auf deren glazialen Ursprung zu schließen. Somit wäre also die Gegenbeweiskette ziemlich vollständig geschlossen. Ob der Mond zu einer Zeit, da er noch eine diesen Namen verdienende Atmosphäre besaß, durch eine Reihe von Glazialperioden hindurchgegangen ist, die denen unserer Erde vergleichbar zu denken wären, wissen wir nicht, und wir werden auch niemals die Erforschung der Mondoberfläche derart bis in die feinsten Einzelheiten ausbilden können, um uns über diese Möglichkeit ein gesichertes Urteil zu verschaffen. Das aber dürfen wir behaupten, daß die Annahme, unser Satellit sei in der Jetztzeit mit einem dichten Eisüberzuge versehen, einer die verschiedenen hier in Frage kommenden Punkte ernstlich prüfenden Überlegung nicht standzuhalten vermag.

Die Grundformeln der sphärischen und ebenen Tetragonometrie.

Von **E. v. Fedorow** (in St. Petersburg).

Vorgelegt von P. v. Groth in der Sitzung am 8. November 1913.

I. Die Grundformeln der sphärischen Tetragonometrie.

Das System der zonalen Berechnungen, welche speziell den Anforderungen der Kristallographie angepaßt ist und zu den einfachst möglichen mathematischen Operationen geführt hat[1]. wird mit der Verbreitung der kristallochemischen Analyse, wenn also die betreffenden Operationen auch die reinen Chemiker auszuführen genötigt sein werden, zur Sache der unumgänglichen Anwendung. Diese Unumgänglichkeit wurde besonders in der Arbeit „Der einfachste Operationsgang der kristallographischen Untersuchung" hervorgehoben[2]).

In diesen Arbeiten sind die für die gewöhnlichen Zwecke nötigen mathematischen Operationen erschöpft. Man hätte sicher sagen können, daß die für die kristallochemische Analyse dienenden graphischen Operationen trotz ihrer geringen Genauigkeit sich für die praktischen Zwecke hinreichend erweisen. Aber mit der Zeit wird es immer mehr und mehr

[1]) In der Arbeit des Verfassers „Die größtmögliche Vereinfachung bei zonalen Berechnungen und kristallographischen Berechnungen im allgemeinen" (Verhandl. d. K. Miner. Ges. in St. Petersburg 1906, 44, 199; referiert von Herrn Barker in Zeitschr. für Kristallographie 46, 202).

[2]) Annalen des Berg-Instituts zu St. Petersburg IV, 325.

fühlbar werden, daß die Ersetzung der grob angegebenen Zahlen durch die genaueren für die Aufsuchung der betreffenden Punkte in der zur Bestimmung dienenden Tabellen sehr willkommen ist.

Somit ist es aber wünschenswert, das Gebiet der einfachsten Berechnungen, also auch die Auffindung der dazu dienenden Formeln, auf eine breitere Basis zu stellen.

Dem Wesen nach fußen alle betreffenden Formeln auf denen der sphärischen Trigonometrie, welche, obgleich sie in dem Gesamtgebiet der mathematischen Analyse nur einen verschwindend kleinen Platz nimmt, aber wegen besonderer Wichtigkeit ihrer Grundformeln zum notwendigen Elemente der allgemeinen Bildung gehört.

Speziell sind aber in Anwendung auf kristallographische Berechnungen in dem zonalen System ihre Grundformeln durchaus nicht hinreichend, da in denselben kein Bezug auf die Grundeigenschaften der Größen in diesem Gebiet genommen wird, und zwar darauf, daß hier die sämtlichen geometrischen Elemente aus vier derselben sich vollständig ableiten lassen.

Das nähere Eindringen in die Sache lehrt uns, daß nicht allein die Möglichkeit der Berechnungen der Elemente der sphärischen Dreiecke, was eigentlich durch die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie erschöpft ist, sondern auch erfordert wird, den Weg aufzufinden, für jedes geometrische Element die betreffende Formel aufzustellen. Daß aber diese Aufgabe wirklich lösbar ist, ersieht man aus den folgenden Erwägungen.

Wenn auf der Sphäre wirklich vier Punkte gegeben sind, so läßt sich daraus eine unendlich große Gesamtheit von Punkten bestimmen, indem durch jeden Großkreisbogen die sämtlichen Punkte zur Bestimmung gelangen, welche als Schnittpunkte derselben mit den gegebenen und den neugezogenen Großkreisbögen erscheinen; die gegebenen sind aber diejenigen sechs Kreisbögen, welche sich durch je zwei von vier angegebenen Punkten bestimmen lassen.

Wie in der Ebene, so läßt sich auf dieselbe Art und Weise

auch auf der Sphäre das geometrische Netz (Möbius)[1]) zustande bringen, und gerade dieses Netz entspricht dem kristallographischen Begriff des Komplexes vollständig.

Jeder Schnittpunkt dieses Netzes wird aber durch das Schneiden der Großkreisbögen eindeutig bestimmt. Daraus aber folgt, daß wir hier ausschließlich mit den linearen Verhältnissen der betreffenden trigonometrischen Funktionen zu tun haben. Die linearen Gleichungen sind aber stets und ausnahmslos in reellen Größen lösbar, und folglich können wir für jedes gegebene sphärische Winkelelement, als Resultat der linearen Lösung, die betreffende Formel ermitteln.

Die Aufgaben dieser Art sind also von spezieller Natur und sind in der gewöhnlich abgefaßten Form der Begriffe der sphärischen Trigonometrie nicht enthalten; dieselben kommen aber einer speziellen Verzweigung derselben zugute; und nur der Bestimmtheit halber werden wir dieselbe als die sphärische Tetragonometrie bezeichnen, und stellen uns hier die Aufgabe, die Grundformeln für diese spezielle Verzweigung aufzufinden.

Es muß dazu nur die Bemerkung beigefügt werden, daß die Großkreisbögen eigentlich nicht in einem einzigen, sondern in einem Paare von[2]) Punkten zum Schnitt kommen; folglich beziehen sich die linearen Gleichungen eigentlich auf Größen, welche von sich selbst auch quadratischen Ausdruck erhalten können; ohne diese Bemerkung hätten wir manchmal auf einen Widerspruch mit den allgemeinen Schlußfolgerungen stoßen können.

Die Zugehörigkeit eines sphärischen Punktpaares zum Komplexe (resp. dem sphärischen Netze) hat den speziellen kristallographischen Ausdruck dadurch erhalten, daß jedem derselben spezielle drei Indizes zukommen, welche aus ganzen Zahlen bestehen. Es mögen dabei den Indizes der drei zu

---

[1]) „Der baryzentrische Kalkül“ (hier wurde eigentlich nur das auf der Ebene entwickelt).

[2]) von diametral entgegengesetzten.

Grunde liegenden Punkte beliebige ganze (aber dabei keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzende) Zahlen zugeschrieben werden, und nur dem vierten Punkt müssen die Indizes zukommen, welche den respektiven Summen der Indizes gleich sind. Dieser vierte Punkt kann mit keinem anderen Punktpaar auf einen Großkreisbogen fallen (sonst würde das geometrische Netz unbestimmt sein) und fällt speziell innerhalb desjenigen sphärischen Dreiecks, für dessen Eckpunkte seine Indizes die summarischen sind (weil sonst ein Widerspruch in der Bestimmung durch die Indizes entstehen würde).

Die Gesamtheit der Punkte eines Kreisbogens oder der in einem Punkte sich schneidenden Kreisbögen bilden ihrerseits die Teilkomplexe und können wieder durch Indizes in ganzen Zahlen zum Ausdruck kommen. Diese sind aber nur paarweise zu nehmen. Der Bestimmtheit wegen wollen wir dieselben als Zonenindizes (im Gegensatz zu gewöhnlichen Komplexindizes) bezeichnen.

Aus den vier Grundpunkten wollen wir zwei Punkte a und b besonders herausnehmen und als Ausgangspunkte (den Ausgangsflächen entsprechend) bezeichnen. Der Kreisbogen ab wird uns zur Ausgangszone dienen. Jeder dieser Punkte bestimmt seinerseits mit den beiden anderen c und d je eine Zone, und nun wollen wir die Lage dieser Zonen durch die Winkelgrößen bestimmen, welche diese Zonen mit der Ausgangszone bilden. Als Nullwinkel wird uns dabei derjenige dienen, welcher durch die Richtung ab für den Punkt a und durch die Richtung ba für den Punkt b bestimmt wird; ersetzen wir diese Richtung durch die entgegengesetzte, so ändert sich die Größe 0 in die Größe π.

Somit wird jeder der Punkte c und d durch je zwei Winkelgrößen als ihre sphärischen Koordinaten bestimmt, wenn dabei als die erste Konstante der Winkel ab gemeint wird. Diese fünf Konstanten sind nötig und zugleich hinreichend zur Bestimmung des Komplexes resp. des sphärischen Netzes. Bezeichnen wir die betreffenden Konstanten, außer ab, durch A, A_1, B, B_1, wobei sich der Buchstabe A auf Punkt a, der Buchstabe B

auf Punkt b bezieht und speziell die Konstanten A_1 und B_1 zu dem Punkte d gehören.

Zuletzt wollen wir zeigen, wie man sehr einfach die Koordinaten jedes beliebigen Punktes ermittelt, wenn derselbe durch die Indizes bestimmt wird.

Wollen wir, der Einfachheit wegen, dem Punkte a die Indizes (100), dem Punkte b — (010), dem Punkte c — (001) und dem Punkte d — (111) zuerteilen.

Dann erhalten wir für einen beliebigen Punkt, welchem die Indizes $(p_1 p_2 p_3)$ zukommen, die bestimmenden Werte $\begin{vmatrix} 100 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = [0 \bar{p}_3 p_2]$ in dem Punkte a und $\begin{vmatrix} 010 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = [p_3 0 \bar{p}_1]$ in dem Punkte b; suchen wir die diesen Werten entsprechenden Zonenindizes, wenn wir dem in Punkte a der Zone $ab = \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \end{vmatrix} = [001]$ die Indizes $|10|$ und der Zone $ac = \begin{vmatrix} 100 \\ 001 \end{vmatrix} = [0\bar{1}0]$ die Indizes $|01|$, also der Zone $\begin{vmatrix} 100 \\ 111 \end{vmatrix} = [0\bar{1}1] = [001] + [0\bar{1}0]$ die Indizes $|10| + |01| = |11|$, ebenso in dem Punkte b der Zone $ba = \begin{vmatrix} 010 \\ 100 \end{vmatrix} = [00\bar{1}]$ die Indizes $|10|$ und der Zone $bc = \begin{vmatrix} 010 \\ 001 \end{vmatrix} = [100]$ die Indizes $|01|$, also der Zone $\begin{vmatrix} 010 \\ 111 \end{vmatrix} = [10\bar{1}] = [00\bar{1}] + [100]$ die Indizes $|10| + |01| = |11|$ zukommen lassen.

Wir erhalten nämlich $[0 \bar{p}_3 p_2] = p_2 [001] - p_3 [010]$; also $p_2 |10| - p_3 |01| = |p_2 \bar{p}_3|$ in dem Punkte a und $[p_3 0 \bar{p}_1] = p_1 [00\bar{1}] + p_3 [100]$, also $p_1 |10| + p_3 |01| = |p_1 p_3|$ in dem Punkte b.

Und nun ist es leicht die Grundformel abzuleiten, mittelst welcher die Koordinaten des Punktes $(p_1 p_2 p_3)$ in dem Punkte a wie in dem Punkte b sich berechnen lassen.

Am einfachten entspringt diese Formel aus der Betrachtung der gnomonischen Projektion derjenigen Flächen, für welche die respektiven Punkte auf der Sphäre die Pole sind.

Also denken wir uns in dem Punkte O (Fig. 1) die gnomorische Projektion der Fläche a und eine Reihe der gnomorischen Projektionen anderer Flächen A, B, E, G . . ., welche (Projektionen) sich aber auf einer Geraden befinden (tautozonal sind) und von denen eine durch den Punkt A vertreten ist, welcher unendlich fern gedacht wird. Jede den Punkt O mit den übrigen Punkten verbindende Gerade vertritt eine Zone, von welchen die dem Punkte A entsprechende Zone als Ausgangszone angenommen und durch das Zonensymbol |10| bezeichnet wird; schreiben wir der Zone OB die Indizes |01| und der Zone OE die Indizes |11| zu.

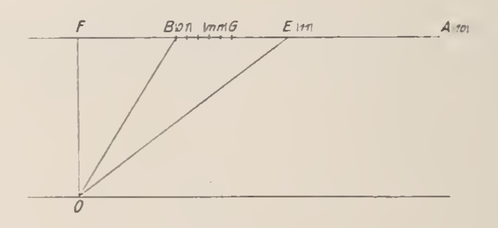


Fig. 1.

Die gnomonische Projektion setzt uns in den Stand, sofort die Zone zu ermitteln, welcher die Indizes $|mn|$ zukommen; dazu haben wir nur die Strecke BE in n gleiche Strecken zu teilen und von dem Punkte B an m solche Strecken zu einer zu verbinden; es sei dies der Punkt G. Außerdemne hmen wir F für den Fußpunkt des Perpendikels aus O.

Nun haben wir für die Strecken

$$BG = \frac{m}{n} BE$$

und natürlich auch

$$FB + BG = FG = FB + \frac{m}{n} BE.$$

$$= \frac{n-m}{n} FB + \frac{m}{n}(FB + BE) = \frac{n-m}{n} FB + \frac{m}{n} FE.$$

Also

$$nFG = (n - m)FB + mFE.$$

Nehmen wir den Abstand OF gleich eins, so haben wir in den Streckengrößen direkt die Tangenten der respektiven Winkel, wenn dieselben von dem Perpendikel OF respektive die Kotangenten der entsprechenden Winkel, wenn dieselben von OA aus abgelesen werden.

Folglich

$$n \operatorname{cotg} |mn| = (n - m) \operatorname{cotg} |01| + m \operatorname{cotg} |11|. \qquad 1)$$

Das ist die sehr wichtige gesuchte Formel[1]), und wir sehen jetzt ganz klar, wie mittelst derselben die Kotangenten der Koordinaten jedes beliebigen Punktes $|mn|$ in dem Punkte a wie in dem Punkte b zu ermitteln sind.

Für den speziellen Fall des zu $|11|$ harmonischen Punktes erhalten wir die Formel von Miller[2])

$$\operatorname{cotg} |11| = 2 \operatorname{cotg} |01| - \operatorname{cotg} |11|. \qquad 1a)$$

Diese Formel ist in der Tetragonometrie von ganz besonderer Wichtigkeit, da dieselbe, allein genommen, hinreicht, um die Koordinaten sämtlicher Punkte des tetragonometrischen sphärischen Netzes zu berechnen. Es scheint nur einen Ausnahmefall zu geben, indem dieselbe scheinbar nicht geeignet ist, die Koordinaten der Punkte der Ausgangszone zu bestimmen.

Aber sogar dieser Ausnahmefall ist nur ein scheinbarer, weil auch für ihn dieselbe Formel anwendbar ist, natürlich aber auf speziellem Wege, weil der Fall selbst ein spezieller ist.

In diesem Falle wären nämlich diese Koordinaten sämtlich gleich 0 oder π, wenn dieselben auf die gleiche Art wie die übrigen gezählt würden. Nun sind aber dieselben auf eine

---

[1]) Diese Formel findet sich schon in Elementarlehrbüchern der Kristallographie, wie z. B. in dem „Verkürzten Kursus der Kristallographie“ des Verfassers, Petersburg 1910.

[2]) Philosophical Magazine 1857, Febr. 98. Dieselbe wurde auch in der zweiten analytisch-kristallographischen Studie des Verfassers reproduziert (Kapitel III, Form. 8).

spezielle Art zu zählen und zwar durch die direkten Winkelabstände von den Punkten a und b.

In der Tat ist es nur nötig, einen einzigen Winkel in der Zone ab zu bestimmen, da, in Anbetracht des gegebenen Winkels ab, schon zwei Winkel in dieser Zone bekannt sind und dies schon ausreichend ist, um für alle übrigen Winkelgrößen die Formel 1) unmittelbar anwendbar zu machen.

Wählen wir für diesen Winkel denjenigen des Punktes e, welchem die Indizes zukommen, welche aus den Indizes von a und b sich einfach summieren lassen, also bei unserer Voraussetzung die Indizes (110).

Durch (110) und noch einen beliebigen Punkt wird eine Zone bestimmt, für deren sämtliche Punkte, mit einziger Ausnahme des Grenzpunktes e, die Formel 1) direkt anwendbar ist. Unter ihnen sind auch solche zum Punkte e außerordentlich angenäherte Punkte zu denken, daß, praktisch genommen, ihre Winkel mit a und b dieselben sind wie die des Punktes e. Im Limitfall wird dies mathematisch genau.

Da die gedachte Zone sonst eine beliebige ist resp. durch e und noch einen beliebig angenommenen Punkt bestimmt werden kann, so können wir für den letzteren auch z. B. den Punkt d (001) auswählen, und dann kann jeder Punkt dieser Zone durch die Indizes ausgedrückt werden, welche die Summe $x_1(110) + x_2(001)$ darstellt, also durch die Indizes (x_1, x_1, x_2).

Wir können sogleich die Zonenindizes bestimmen, welche der Zone $\begin{vmatrix} 100 \\ x_1 x_1 x_2 \end{vmatrix} = [0 \bar{x}_2 x_1]$ resp. $\begin{vmatrix} 010 \\ x_1 x_1 x_2 \end{vmatrix} = [x_2 0 \bar{x}_1]$ entsprechen; wenn wir die entsprechenden Indizes für die Punkte (110), (001) ermitteln und als $|10|$, $|01|$ bezeichnen.

Dieselben sind [001], [0$\bar{1}$0] in dem Punkte a und [00$\bar{1}$], [100] in dem Punkte b. Es ist leicht einzusehen, daß die gesuchten Zonenindizes $|x_1 x_2|$ für die beiden Punkte sind.

Also

$$x_2 \operatorname{cotg} |x_1 x_2| = [x_2 - x_1] \operatorname{cotg} |01| + x_1 \operatorname{cotg} |11|. \qquad \text{A)}$$

Steht der Punkt x dem Punkte e unendlich nahe, so haben

wir für das Dreieck abx — $\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin(abx)}{\sin(bax)}$, und zugleich nähert sich die letzte Größe unendlich der Größe $\frac{\operatorname{cotg}(bax)}{\operatorname{cotg}(abx)}$, da die beiden Werte von $\cos(abk)$ und $\cos(bak)$ sich unendlich der Einheit nähern.

Die Formel A) ist doppelt zu fassen, je nachdem dieselbe auf den Punkt a oder auf den Punkt b bezogen wird. Wollen wir den zweiten Fall durch Apostroph auszeichnen, so haben wir

$$\frac{\operatorname{cotg}|x_1 x_2|}{\operatorname{cotg}'|x_1 x_2|} = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{cotg}|A| + x_1 \operatorname{cotg}|A_1|}{(x_2 - x_1)\operatorname{cotg}|B| + x_1 \operatorname{cotg}|B_1|}$$

und im Limitfalle, sobald x_2 gleich 0 wird,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cotg}|x_1 x_2|}{\operatorname{cotg}'|x_1 x_2|} &= \frac{\sin'|x_1 x_2|}{\sin|x_1 x_2|} = \frac{\sin(ae)}{\sin(be)} \\ &= \frac{\operatorname{cotg}|A_1| - \operatorname{cotg}|A|}{\operatorname{cotg}|B_1| - \operatorname{cotg}|B|} = k \end{aligned} \qquad 2)$$

[1]).

Daraus läßt sich die Formel

$$\sin^2(be) = \frac{\sin^2(ab)}{k^2 + 2k\cos(ab) + 1} = \frac{\sin^2(ab)}{[k + \cos(ab)]^2 + \sin^2(ab)} \qquad 3)$$

resp.

---

[1]) Dieselbe Formel läßt sich auch aus den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie herleiten, und zwar aus den Formeln:

a) $\operatorname{cotg} de \cdot \sin ae = \operatorname{cotg} A_1 \sin(aed) + \cos ae \cos(aed)$

b) $\operatorname{cotg} de \cdot \sin be = \operatorname{cotg} B_1 \sin(bed) + \cos be \cos(bed)$

c) $\operatorname{cotg} ce \cdot \sin ae = \operatorname{cotg} A \sin(aec) + \cos ae \cos(aec)$

d) $\operatorname{cotg} ce \cdot \sin be = \operatorname{cotg} B \sin(bec) + \cos be \cos(bec)$,

wenn wir das Verhältnis der Differenzen a) und c) resp. b) und d) bestimmen und dabei in Betracht nehmen, daß

$$(aec) = (aed), \quad (bcc) = (bed) \quad \text{und} \quad \sin(bed) = \sin(aed).$$

Darauf hat mich Herr Professor Baumann aufmerksam gemacht. Die Formel wurde zuerst in den Annalen des Berg-Instituts IV, 65 abgeleitet.

$$\operatorname{cotg}(b\,e) = \frac{k + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)}$$

und 3 a)

$$\operatorname{cotg}(a\,e) = \frac{\frac{1}{k} + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)} = \frac{1 + k\cos(a\,b)}{k\sin(a\,b)}$$

herleiten.

Für den dem Punkte e harmonisch konjugierten Punkt e' erhalten wir ganz analog

$$\sin^2(b\,e') = \frac{\sin^2(a\,b)}{k^2 - 2k\cos(a\,b) + 1} = \frac{\sin^2(a\,b)}{[k - \cos(a\,b)]^2 + \sin^2(a\,b)} \qquad 3\,b)$$

resp.

$$\operatorname{cotg}(b\,e') = \frac{-k + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)}$$

und 3 c)

$$\operatorname{cotg}(a\,e') = \frac{\frac{1}{k} - \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)} = \frac{1 - k\cos(a\,b)}{k\sin(a\,b)},$$

wobei

$$2\operatorname{cotg}(a\,b) = \operatorname{cotg}(a\,e) - \operatorname{cotg}(a\,e') = \operatorname{cotg}(b\,e) + \operatorname{cotg}(b\,e').$$

Weiter erhalten wir noch

$$\operatorname{cotg}(e\,e') = \operatorname{cotg}(a\,e + a\,e') = \operatorname{cotg}(b\,e' - b\,e) = \frac{1 - k^2}{2\,k\sin(a\,b)}$$

und 4)

$$2\operatorname{cotg}(e\,e') = \operatorname{cotg}(a\,e) - \operatorname{cotg}(b\,e) = \frac{1 - k^2}{k\sin(a\,b)}.$$

Im besonderen, wenn $k = 1$, erhalten wir

$$\sin(a\,e) = \sin(b\,e) = \sin\frac{a\,b}{2},$$

und dann

aus 3) $$\sin^2\frac{a\,b}{2} = \frac{\sin^2(a\,b)}{2(1 + \cos a\,b)} = \frac{1 - \cos(a\,b)}{2}$$

aus 3 a) $$\operatorname{cotg}\frac{a\,b}{2} = \frac{1 + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)}$$

aus 4) $$\operatorname{cotg}(e\,e') = 0,$$

was übrigens selbstverständlich ist.

Jetzt gehen wir zur Ableitung der Formel für die Winkel zwischen den Ausgangspunkten a resp. b und den übrigen Punkten, z. B. dem Punkte c über.

Dafür dienen die bekannten Gleichungen

$$\operatorname{tang} \frac{ac + bc}{2} = \operatorname{tang} \frac{ab}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(B - A)}{\cos \frac{1}{2}(B + A)}$$

und

$$\operatorname{tang} \frac{ac - bc}{2} = \operatorname{tang} \frac{ab}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A)}{\sin \frac{1}{2}(B + A)}.$$

Außerdem haben wir noch

$$\operatorname{tang} \left\{ \frac{ac + bc}{2} + \frac{ac - bc}{2} \right\} = \operatorname{tang}(ac),$$

und noch

$$\cos \frac{1}{2}(B - A) = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}$$

$$\cos \frac{1}{2}(B + A) = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2}(B - A) = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2}(B + A) = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}$$

und endlich

$$\operatorname{tang}(M + N) = \frac{\operatorname{tang} M + \operatorname{tang} N}{1 - \operatorname{tang} M \cdot \operatorname{tang} N}.$$

Nach der Ausführung der nötigen Substitutionen und Reduktionen erhalten wir endgültig

$$\operatorname{cotg}(bc) = \operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \operatorname{cotg}(ab) \cos B \tag{5)}$$

und

$$\operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) \sin A + \operatorname{cotg}(ab) \cos A. \tag{5 a)}$$

Im besonderen, wenn $A = B$, erhalten wir

$$\operatorname{cotg}(bc) = \operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg} \frac{ab}{2} \cos A,$$

und wenn

$$A = B = \frac{\pi}{2}, \quad \text{so ist} \quad ac = bc = \frac{\pi}{2},$$

was selbstverständlich ist.

Die Formeln 5) würden direkt für alle Punkte des Netzes anwendbar sein, wenn wir für diese Punkte die respektiven Winkel A und B bestimmen, was aber, wie oben erklärt wurde, durch die Anwendung der Grundformel 1) geschieht.

Nebst der Grundformel 1) ist diese für die praktische Kristallographie die wichtigste, da bei der Justierung eines Kristalles nach Ausgangsflächen gerade 1. die Winkel zwischen Zonen und 2. zwischen allen Flächen überhaupt und der Ausgangsfläche zur direkten Beobachtung und Ablesung kommen. Dies sind gerade diejenigen sphärischen Koordinaten jeder Fläche, welche an den beiden Kreisen eines Universalgoniometers abgelesen werden (für die Zonenwinkel die sogenannten Koordinaten φ und für die Flächenwinkel die Koordinaten ϱ).

In einem Dreieck ace haben wir somit die Ausdrücke gefunden für zwei Seiten ae und ac, und der Winkel A zwischen ihnen ist die gegebene Konstante. Folglich haben wir die ausreichende Anzahl der Elemente für die Bestimmung der übrigen und speziell des Winkels E (im Punkte e).

Bezeichnen wir noch durch C den Winkel mit den Punkte c als Scheitelpunkt, so haben wir

$$\operatorname{cotg} \frac{E + C}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{ac + ae}{2}}{\cos \frac{ac - ae}{2}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{E - C}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{ac + ae}{2}}{\sin \frac{ac - ae}{2}}.$$

Außerdem haben wir noch

$$\operatorname{cotg} \left\{ \frac{E + C}{2} + \frac{E - C}{2} \right\} = \operatorname{cotg} E$$

und noch

$$\cos\frac{ac+ae}{2} = \cos\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} - \sin\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

$$\cos\frac{ac-ae}{2} = \cos\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} + \sin\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

$$\sin\frac{ac+ae}{2} = \sin\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} + \cos\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

$$\sin\frac{ac-ae}{2} = \sin\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} - \cos\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

und endlich

$$\operatorname{cotg}(M+N) = \frac{\operatorname{cotg} M \operatorname{cotg} N - 1}{\operatorname{cotg} M + \operatorname{cotg} N}.$$

Nach der Ausführung der nötigen Substitutionen und Reduktionen erhalten wir endgültig

$$\operatorname{cotg} E = \operatorname{cotg}(ac)\operatorname{cosec} A \sin(ae) - \operatorname{cotg} A \cos(ae). \qquad 6)$$

Es bleibt noch $\operatorname{cotg}(ac)$ durch den Wert 5a) zu substituieren und erhalten wir die Gleichung in der Form

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E = \{&\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\\ &+ \operatorname{cotg} A[\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(ae)]\}\sin(ae)\end{aligned} \qquad 6\,a)$$

und

$$\begin{aligned}-\operatorname{cotg} E = \{&\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab)\\ &+ \operatorname{cotg} B[\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(be)]\}\sin(be)\end{aligned}$$ [1].

Natürlich auch

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E' = \{&\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\\ &- \operatorname{cotg} A[\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(ae')]\}\sin(ae').\end{aligned} \qquad 7)$$

Mit Berücksichtigung der Formeln 3a) und 3b) können die Formeln 6a) und 7) noch verkürzt werden und zwar

$$\operatorname{cotg} E \sin(ab) = \left(\operatorname{cotg} B - \frac{\operatorname{cotg}}{k} A\right)\sin(ae)$$

und

$$-\operatorname{cotg} E \sin(ab) = (\operatorname{cotg} A - k \operatorname{cotg} B)\sin(be)$$

oder eigentlich

---

[1] Natürlich ist die Summe dieser beiden Ausdrücke gleich Null.

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E \sin (ab) &= (k \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A) \sin (be) \\ &= \operatorname{cotg} B \sin (ae) - \operatorname{cotg} A \sin (be).\end{aligned} \qquad 6\,\mathrm{a}')$$

Diese merkwürdige Formel, deren Elemente von den Konstanten A_1 und B_1 ganz unabhängig sind, besitzt somit allgemeine Bedeutung, indem der Punkt e auf der Ausgangszone ganz beliebig angenommen und durch einen unbestimmten Punkt x ersetzt werden kann, und dann läßt sich die allgemeine Formel

$$\operatorname{cotg} X \sin (ab) = \operatorname{cotg} B \sin (ax) - \operatorname{cotg} A \sin (bx) \qquad 8)$$

aufstellen.

Nehmen wir, im besonderen, den Punkt e', so erhalten wir

$$-\operatorname{cotg} E' \sin (ab) = \operatorname{cotg} B \sin (ae') - \operatorname{cotg} A \sin (be'). \qquad 8\,\mathrm{a})$$

Ersetzen wir den Punkt e durch den Punkt d, so erhalten wir

$$\operatorname{cotg} X_1 \sin (ab) = \operatorname{cotg} B_1 \sin (ax) - \operatorname{cotg} A_1 \sin (bx)^{1}). \qquad 8\,\mathrm{b})$$

Im besonderen, wenn $X_1 = \frac{\pi}{2}$, erhalten wir

$$\operatorname{cotg} A_1 \sin (bx) = \operatorname{cotg} B_1 \sin (ax). \qquad 8\,\mathrm{c})$$

Jetzt sind zwei Winkel X und X_1 in dem Punkte x bekannt, was uns in den Stand setzt, auch den letzten als Ausgangspunkt zu nehmen respektive einen der gegebenen durch denselben zu ersetzen.

Bei der Deutung der Formel 8) ist zu berücksichtigen, in welcher Richtung jeder Winkel abgezählt wird. Wir haben zwar für A und B die umgekehrten Richtungen angenommen, und für den Winkel x dieselbe, wie für B. Mit der Umkeh-

[1]) Aus 6 a') und 8 b) folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E \sin (ab) &= \operatorname{cotg} B \sin (ae) - \operatorname{cotg} A \sin (be) \\ &= \operatorname{cotg} B_1 \sin (ae) - \operatorname{cotg} A_1 \sin (be);\end{aligned}$$

also

$$\sin (ae) (\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B) = \sin (be) (\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} B_1)$$

respektive

$$\sin (ae) = k \sin (be),$$

was mit 2) identisch ist.

rung der Richtung des betreffenden Winkels ist zugleich in der Formel + und — gegenseitig zu ersetzen.

Bringen wir z. B. den Punkt x in die Lage a, so erhalten wir $\operatorname{cotg} X = -\operatorname{cotg} A$: bringen wir denselben Punkt in die Lage b, so finden wir $\operatorname{cotg} X = \operatorname{cotg} B$.

Das ist der Grund, warum in der Formel 8 a) dem $\operatorname{cotg} E'$ der negative Wert zugeschrieben worden ist, da dieser Winkel in derselben Richtung wie A abgezählt wird.

Durch die Formel 8) wird nicht nur die Aufgabe gelöst, die Winkel zu berechnen, deren Scheitelpunkte x der Ausgangszone angehören, sondern zugleich die Aufgabe der Berechnung des Winkels zwischen zwei beliebigen Punkten k und l des Netzes.

Zur Berechnung des Winkels ce sind nämlich in dem Dreieck ace die Seite ae und die beiden anliegenden Winkel A und E bekannt. Dasselbe gilt für die Seite de und das Dreieck ade, in welchem außer der Seite ae die beiden Winkel A_1 und E bekannt sind.

Nun können wir die beiden Punkte d und e durch beliebige zwei Punkte k und l ersetzen, wozu es nötig ist, zuerst die Koordinaten A_k, A_l, B_k und B_l zu berechnen; wie dies zu tun, wurde oben erklärt. Ist dies geschehen, so erhalten wir vermittelst der Formel 8) den Wert des Winkels axk, wo x der Schnittpunkt der Ausgangszone mit der Zone kl und dem Punkte e analog ist. Somit werden die Winkel xk und xl bestimmt, und der gesuchte Winkel ist die Differenz zwischen beiden.

Die Berechnung der Werte ce und de geschieht nach der Formel 5), indem der Punkt b durch den Punkt e ersetzt wird, was jetzt möglich ist, da der Winkel ae und die beiden Winkel A und E schon bekannt sind.

Somit sind fast alle Grundaufgaben der sphärischen Tetragonometrie gelöst. Es bleibt nur die Formel abzuleiten, welche den Wert des Winkels zwischen zwei beliebigen Zonen des Netzes ausdrückt.

Dies geschieht, wenn wir eigentlich die Formel für einen einzigen, z. B. für den Winkel C ermitteln. Es bleibt also übrig, den Beweis beizubringen, daß ein solcher Winkel durch eine bestimmte Formel wirklich zum Ausdruck kommen kann in den für das Netz charakteristischen Konstanten.

Wie wir aus der Formel 6) ersehen, werden bei der Substitution e durch c, also auch E durch C, in derselben die Funktionen $\sin(ac)$ und $\cos(ac)$ und nicht $\operatorname{cotg}(ac)$ angetroffen, und nur für die letzte hätten wir rationell mittelst 5 a) die Substitution direkt ausführen können. Es bleibt also nur der indirekte Weg übrig, welchem wir auch hier folgen werden.

Wir können nämlich dieselbe in der Form

$$\frac{\operatorname{cotg} C}{\sin(ac)} = \operatorname{cotg}(ae)\ \operatorname{cosec} A - \operatorname{cotg}(ac) \operatorname{cotg} A$$

darstellen. Der zweite Teil der Gleichung ist dadurch in die Form gebracht, welche ganz gut die rationelle Substitution zuläßt, aber in dem ersten bleibt noch der Faktor (ac) übrig, von welchem wir aber durch folgende Operationen uns befreien können, und zwar infolgedessen, daß die Verhältnisse wie $\sin(ac) : \operatorname{siu}(bc)$ durch das Verhältnis $\sin B : \sin A$ ersetzt werden können.

Somit wird es möglich, auch das Verhältnis zweier Kotangenten der Winkel in dem Punkte c rationell auszudrücken und mit Hilfe des Ausdrucks für die Kotangente der Summe solcher Winkel auch zum rationellen Ausdruck der Kotangenten selbst zu kommen.

Wenden wir diese Erwägungen für die folgenden Winkel an:

1) $$\frac{\operatorname{cotg} C_1}{\sin(ac)} = \operatorname{cotg}(ac) \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg}(ae') \operatorname{cosec} A$$

$$= \frac{1}{\sin A \sin(ab)} [\operatorname{cotg} B \cos(ab) \cos A \sin A + \cos^2 A$$

$$+ \operatorname{cotg}(ae') \sin(ab)].$$

$$2)\quad \frac{\operatorname{cotg}(C - C_1)}{\sin(ac)} = -\operatorname{cotg}(ac)\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}(ae)\operatorname{cosec}A$$

$$= \frac{1}{\sin A \sin(ab)}[-\operatorname{cotg}B\cos(ab)\cos A\sin A$$

$$-\cos^2 A + \operatorname{cotg}(ae)\sin(ab)]$$

$$3)\quad \frac{\operatorname{cotg}(C_{-1} - C)}{\sin(bc)} = -\operatorname{cotg}(bc)\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}(be)\operatorname{cosec}B$$

$$= \frac{1}{\sin B \sin(ab)}[-\operatorname{cotg}A\cos(ab)\cos B\sin B$$

$$-\cos^2 B + \operatorname{cotg}(bc)\sin(ab)]$$

und

$$4)\quad \frac{\operatorname{cotg}(-C_{-1})}{\sin(bc)} = \operatorname{cotg}(bc)\operatorname{cotg}B - \operatorname{cotg}(be')\operatorname{cosec}B$$

$$= \frac{1}{\sin B \sin(ab)}[\operatorname{cotg}A\cos(ab)\cos B\sin B$$

$$+\cos^2 B - \operatorname{cotg}(be')\sin(ab)].$$

Nehmen wir jetzt die Verhältnisse aller dieser Größen zu der ersten von ihnen und erhalten dann einige Verkürzungen infolge der Relationen $\sin(ac) : \sin(bc) = \sin B : \sin A$ und $\sin(ac) : \sin(ac) = 1$; somit werden sogleich die Größen $\sin(ac)$ und $\sin(bc)$ eliminiert.

Die Summe der genommenen Winkel ist Null, weil

$$C_1 + (C - C_1) + (C_{-1} - C) + (-C_{-1}) = 0.$$

Die Kotangente dieser Summe ist also gleich ∞.

Der Ausdruck für die Kotangente dieser Summe ist:

$$\operatorname{cotg}(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= \frac{M^{1)}}{\operatorname{ctg}1 + \operatorname{ctg}2 + (1 - \operatorname{ctg}1\operatorname{ctg}2)\operatorname{ctg}3 + [1 - \operatorname{ctg}1\operatorname{ctg}2 - (\operatorname{ctg}1 + \operatorname{cotg}2)\operatorname{ctg}3]\operatorname{ctg}4}.$$

Ist diese Summe gleich Null, so ist auch der Zähler dieses Bruches gleich Null.

---

[1]) Der Wert von M ist für das weitere unnötig.

Wollen wir, der Kürze wegen, die Relationen

$$\frac{\operatorname{cotg} 1}{\operatorname{cotg} 1}, \quad \frac{\operatorname{cotg} 2}{\operatorname{cotg} 1}, \quad \frac{\operatorname{cotg} 3}{\operatorname{cotg} 1} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{cotg} 4}{\operatorname{cotg} 1}$$

respektive durch (1), (2), (3), (4) besprechen, so erhalten wir daraus

$$\operatorname{tang}^2(1) = \frac{(2)\,(3) + (2)\,(4) + (3)\,(4) + (2)\,(3)\,(4)}{(1) + (2) + (3) + (4)}.$$

Also wird die Größe der Kotangente C_1 bestimmt (also die des Winkels ace'), wenn wir die betreffenden Substitutionen zur Ausführung bringen, und dann ist die Aufgabe wesentlich gelöst.

Falls wir respektive durch (1'), (2'), (3'), (4') diejenigen Trinome bezeichnen, welche in den obigen vier Formeln in Klammern enthalten sind, so finden wir

$$(2) = \frac{(2')}{(1')}; \qquad (3) = \frac{\sin A}{\sin B}\,\frac{(3')}{(1')}; \qquad (4) = \frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{(4')}{(1')}.$$

Infolgedessen nimmt der Zähler die Form

$$\frac{\sin B\,[(1') + (2')] + \sin A\,[(3') + (4')]}{\sin B\,(1')}$$

und der Nenner entwickelt sich in der Form

$$\frac{1}{(1')^3}\left\{\frac{\sin A}{\sin B}\,[(1')\,(2')\,(3') + (1')\,(2')\,(4')] + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}\,[(1')\,(3')\,(4') + (2')\,(3')\,(4')]\right\}$$

$$= \frac{(1')\,(2')\,(3')\,(4')\left\{\sin A \sin B\left[\frac{1}{(4')} + \frac{1}{(3')}\right] + \sin^2 A\left[\frac{1}{(2')} + \frac{1}{(1')}\right]\right\}}{\sin^2 B\,(1')^3}$$

$$= \frac{\sin^2 A\,[(1') + (2')]\,(3')\,(4') + \sin A \sin B\,[(3') + (4')]\,(1')\,(2')}{\sin^2 B\,(1')^3}.$$

Nun aber

$$(1') + (2') = \sin(a\,b)\,[\operatorname{cotg}(a\,e) + \operatorname{cotg}(a\,e')]$$

$$= \sin(a\,b)\,[2\operatorname{cotg}(a\,b) + 2\operatorname{cotg}(a\,e')] = \frac{2}{k}$$

und

$$(3') + (4') = \sin(ab)\,[\operatorname{cotg}(be) - \operatorname{cotg}(be')]$$
$$= \sin(ab)\,[2\operatorname{cotg}(ab) - 2\operatorname{cotg}(be')] = 2k$$

und noch

$$(1')(2') = -[\operatorname{cotg}B\cos(ab)\cos A\sin A + \cos^2 A]^2$$
$$+ [\operatorname{cotg}B\cos(ab)\cos A\sin A + \cos^2 A]\sin(ab)[\operatorname{cotg}(ae) - \operatorname{cotg}(ae')]$$
$$+ \operatorname{cotg}(ae)\operatorname{cotg}(ae')\sin^2(ab).$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen

$$\operatorname{cotg}(ae) - \operatorname{cotg}(ae') = 2\operatorname{cotg}(ab)$$

und

$$\operatorname{cotg}(ae)\operatorname{cotg}(ae')\sin^2(ab) = -\cos^2(ab) + \frac{1}{k^2},$$

so findet man

$$(1')(2') = -[\operatorname{cotg}B\cos(ab)\cos A\sin A + \cos^2 A - \cos(ab)]^2 + \frac{1}{k^2}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$(3')(4') = -(\operatorname{cotg}A\cos(ab)\cos B\sin B + \cos^2 B - \cos(ab)]^2 + k^2.$$

Somit, unter Bezeichnung durch K^2 des Bruches

$$\frac{1 + k^2\dfrac{\sin A}{\sin B}}{k^2 - [\operatorname{cotg}A\cos(ab)\cos B\sin B + \cos^2 B - \cos(ab)]^2 + \dfrac{\sin B}{\sin A}[\operatorname{cotg}B\cos(ab)\cos A\sin A + \cos^2 A - \cos(ab)]^2}$$

findet man endgültig

$$\operatorname{cotg}C_1 = \frac{\sin B}{\sin A}K(1'), \text{ und daraus } \operatorname{cotg}(C - C_1) = \frac{\sin B}{\sin A}K(2')$$
$$\operatorname{cotg}(C_{-1} - C) = \frac{\sin A}{\sin B}K(3') \qquad 9)$$
$$\operatorname{cotg}(-C_{-1}) = \frac{\sin A}{\sin B}K(4'),$$

wo

$$(1') = \operatorname{cotg} B \cos(ab) \cos A \sin A + \cos^2 A + \operatorname{cotg}(ae') \sin(ab)$$
$$= (\operatorname{cotg} B \cos A \sin A - 1) \cos(ab) + \cos^2 A + \frac{1}{k}$$

$$(2') = -\operatorname{cotg} B \cos(ab) \cos A \sin A - \cos^2 A + \operatorname{cotg}(ae) \sin(ab)$$
$$= (-\operatorname{cotg} B \cos A \sin A + 1) \cos(ab) - \cos^2 A + \frac{1}{k}$$

$$(3') = \operatorname{cotg} A \cos(ab) \cos B \sin B - \cos^2 B + \operatorname{cotg}(be) \sin(ab)$$
$$= (-\operatorname{cotg} A \cos B \sin B + 1) \cos(ab) - \cos^2 B + k$$

und

$$(4') = \operatorname{cotg} A \cos(ab) \cos B \sin B - \cos^2 B - \operatorname{cotg}(be') \sin(ab)$$
$$= (\operatorname{cotg} A \cos B \sin B - 1) \cos(ab) + \cos^2 B + k.$$

Der allgemeine Satz über den rationellen Ausdruck beliebiger Elemente des sphärischen tetragonometrischen Netzes ist somit bewiesen, da auch diese Formeln zu ermitteln gelungen ist.

Diese Formel ist aber keineswegs von solchem Grade der Einfachheit, daß die Berechnung mit Hilfe derselben empfehlenswert ist. Es scheint im Gegenteil vorteilhafter, die Berechnung in zwei Stadien zu verteilen, weil dann Formeln von größerem Grade der Einfachheit zur Anwendung gelangen.

Und gerade für die letzteren Berechnungen können sehr einfache Formeln zur Anwendung gebracht werden.

Wir können dabei von den allgemein bekannten Formeln ausgehen, welche dazu dienen, eine Seite zu berechnen, wenn alle diese Winkel des phärischen Dreiecks gegeben sind.

Bezeichnen wir dann $A + B + C - \pi$ durch $2P$[1]), so ist

$$N = \sin^2 \frac{ab}{2} \sin A \sin B = \sin P \sin(C - P)$$
$$= \sin\left(\frac{C}{2} + \frac{A+B-\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2} - \frac{A+B-\pi}{2}\right).$$

---

[1]) C bedeutet in diesen Formeln die Größe des Winkels ACB.

Entwickeln wir daraus die Sinusse der gegebenen Summen, so finden wir

$$N = \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A+B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A+B}{2} = \sin^2\frac{C}{2} - 1 + \sin^2\frac{A+B}{2}.$$

Also

$$\sin^2\frac{C}{2} = \sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} - \sin^2\frac{A+B}{2} + 1$$

und

$$\cos^2\frac{C}{2} = -\sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} + \sin^2\frac{A+B}{2}.$$

Folglich

$$\sin^2 C = \sin^2(A+B) - 4\left[\sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} + \frac{\cos(A+B)}{2}\right]^2 + \cos^2(A+B)$$

und

$$\cos^2 C = \left\{2\sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} + \cos(A+B)\right\}^2;$$

Was in Paranthesen steht, ist aber gleich

$$\sin A \sin B\left(2\sin^2\frac{ab}{2} - 1\right) + \cos A \cos B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos(ab).$$

Bei dem Übergang zur Quadratwurzel ist

$$\cos C = \sin A \sin B \cos(ab) - \cos A \cos B \qquad 10)$$

zu nehmen, da im Fall $A = \frac{\pi}{2}$ und $B = \frac{\pi}{2}$ $\cos C$ $\cos ab$ (und nicht $-\cos ab$) gleich sein muß.

Diese einfache Formel kann als allgemeine Lösung der Aufgabe betrachtet werden, da nicht nur für die Punkte a und b, sondern für beliebige Punkte der Ausgangszone, ebenso wie für einen beliebigen Punkt c nach der Formel 8) die Werte von A und B berechenbar sind, und (ab) läßt sich für beliebige Punkte der Ausgangszone unter Berücksichtigung der Gleichungen 2) und 3) und der Grundformel 1) berechnen.

Dies würde praktischer sein, als die betreffenden Winkel nach der Formel 9) zu berechnen.

Falls aber einige Winkel der Punkte des Netzes mit den Ausgangspunkten unterwegs bekannt geworden sind, zum Beispiel der Winkel $(a\,c)$, so ist empfehlenswert, noch die einfachere allgemein bekannte Formel $\frac{\sin C}{\sin (a\,b)} = \frac{\sin B}{\sin (a\,c)}$ zu benutzen.

Somit ist die Aufgabe der Auffindung der Grundformeln der sphärischen Tetragonometrie abgeschlossen.

Zum Schlusse wollen wir einige Worte der Anwendung dieser Formeln auf die Kristallographie widmen und mit tabellarischer Übersicht der einfachsten und wichtigsten derselben schließen.

Diejenigen Winkelgrößen, welche wir als Hauptkonstanten bezeichnet haben, lassen sich mittels des Universalgoniometers direkt ablesen, wenn man den betreffenden Kristall zweimal justiert, einmal nach der Fläche a und ein zweites Mal nach der Fläche b[1]). Wird die Messung mehrere Male wiederholt und der Mittelwert genommen, so haben wir nicht nur die den gegebenen Kristallkomplexen möglichst genau ermittelten charakteristischen Werte, sondern zugleich die Größen, deren Substitution in die Grundformel 1) uns auf möglichst einfache Weise die Werte der Koordinaten aller übrigen Flächen gibt, so daß es sich als leicht erweist, die beobachteten Werte mit den berechneten zu vergleichen.

Außerdem aber ergeben sich bei dieser Beobachtung die Winkelgrößen zwischen den Ausgangsflächen und den übrigen Flächen. Dieselben Werte können wir aber teils nach den Formeln 2) bis 4) (in Bezug auf die Flächen der Ausgangszone) teils nach der Formel 5) berechnen und somit wieder die beobachteten und berechneten Werte vergleichen.

[1]) In der Tat wird solche zweimalige Justierung nur selten nötig, da wir in den übrigen meisten Fällen in dem Komplexe wenigstens eine Symmetrieebene haben; sind aber a und b die symmetrischen Punkte, so sind zugleich die Winkel $A = B$ und $A_1 = B_1$.

In dem Falle, daß der Kristallkomplex eine Symmetrieebene besitzt, ist die zweimalige Justierung ganz unnötig, da wir für diesen Fall (a) gleich (b) nehmen können, das heißt, alle Mittelwerte, welche auf (a) Bezug haben, werden den symmetrischen Werten gleich, welche denselben Bezug auf (b) haben; im besonderen ist dies für A, A_1 der Fall, welche respektive B, B_1 gleich sein werden.

Aber sogar in dem Fall, wenn keine Symmetrie da ist, ist es leicht, von der zweiten Justierung abzusehen, indem man auf Grund der durch Messung am sichersten ermittelten Winkelwerte diejenigen von B und B_1 berechnet.

Die Berechnung hängt natürlich von der Art der gegebenen Größen ab.

Wollen wir solche Berechnungen für zwei wichtigste Fälle ausführen.

1. Es seien (außer (ab), A und A_1) die Winkel (ac) und (ad) gegeben. Dann erhalten wir, gemäß der Formel 5)

$$\operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) \sin A + \operatorname{cotg}(ab) \cos A;$$

folglich

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg}(ac) \sin(ab) - \cos(ab) \cos A}{\sin A} \tag{11}$$

$$= \operatorname{cotg}(ac) \sin(ab) \operatorname{cosec} A - \cos(ab) \operatorname{cotg} A$$

und

$$\operatorname{cotg} B_1 = \frac{\operatorname{cotg}(ad) \sin(ab) - \cos(ab) \cos A_1}{\sin A_1} \tag{11a}$$

$$= \operatorname{cotg}(ad) \sin(ab) \operatorname{cosec} A_1 - \cos(ab) \operatorname{cotg} A_1.$$

2. Es seien die Winkel (ag_1) und (ah_1) gegeben. Dann erhalten wir

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg}(ah_1) - \operatorname{cotg}(ab) \cos A_1}{\operatorname{cosec}(ab) \sin A_1} \tag{12}$$

$$= \operatorname{cotg}(ah_1) \sin(ab) \operatorname{cosec} A_1 - \cos(ab) \operatorname{cotg} A_1$$

und

$$\operatorname{cotg} B_1 = \frac{\operatorname{cotg}(ag_1) - \operatorname{cotg}(ab) \cos A}{\operatorname{cosec}(ab) \sin A} \tag{12a}$$

$$= \operatorname{cotg}(ag_1) \sin(ab) \operatorname{cosec} A - \cos(ab) \operatorname{cotg} A.$$

Daraus ersehen wir, daß, diesem Rechnungsgange gemäß, stets eine einzige Messung ausreichend ist, um alle Berechnungen auf hier dargelegte einfachste Art ausführen zu können.

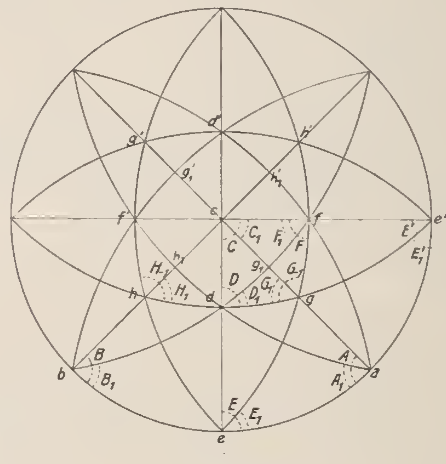


Fig. 2.

Überhaupt sind alle in der kristallographischen Praxis auftretenden Fälle in drei zu teilen; diesen drei Fällen entsprechend ist die beigegebene Tabelle der Formeln in drei Teile zerlegt.

Es wurde schon oben erwähnt, daß in allen Fällen eine einzige Justierung hinreichend ist, um daraus sehr einfach alle nötigen fünf Konstanten zu berechnen, indem zwei Flächen für die Ausgangsflächen von sphärischen bipolaren Koordinaten angenommen werden.

Im allgemeinen sind für alle Syngoniearten, außer der triklinen, diese beiden Ausgangsflächen die symmetrischen, so daß für die beiden die respektiven Konstanten die gleichen sind. Diese beiden Flächen liegen aber entweder 1. in der Hauptzone, oder 2. in der durch die Hauptfläche hindurchgehenden Zone, und in diesen beiden Fällen benutzen wir für die weiteren Berechnungen die beiden ersten Tabellen. Dies

ist nicht der Fall ausschließlich nur dann, wenn an dem gegebenen Kristall keine einzige Fläche der Hauptzone und auch die Hauptfläche nicht vertreten ist.

Der letzte Fall gehört aber zu den seltenen, und zwar fast ausschließlich zu den Komplexen der dodekaedrischen Hauptstruktur, wenn außerdem die vertretene Modalität die der I. (und nicht der II.) Art ist. In diesem Falle sind aber notwendig die Flächen }111{ vertreten, so daß für die Berechnung die Tabelle III geeignet ist, welcher aber die komplizierteren Formeln entsprechen. Ist die Modalität II. Art vertreten, so ist die Tabelle II geeignet, und zwar, im Falle der monoklinen Kristalle, durch die Kolonne $(F = F')$, wenn die beiden besten Flächen die symmetrischen sind, und durch die Kolonne $F = \frac{\pi}{2}$, $F' = \frac{\pi}{2}$, wenn sie zur Symmetrieebene senkrecht stehen.

Als besonderer Fall sind die stark bis extrem positiven Komplexe auszuzeichnen, welche durch die tafeligen Kristalle vertreten sind.

In diesen Fällen ist die einzige zur Justierung geeignete Fläche die tafelige, d. h. ein Pinakoid (Hauptfläche), welchem keine andere Fläche symmetrisch sein kann.

Ist außer demselben noch ein (von zwei) Pinakoid der Hauptzone vertreten, so haben wir keinen für die Berechnung besonders komplizierten Fall; dieser Fall (für monokline und rhombische Komplexe) kann nur nicht nach den Formeln der Kolonnen $(F = F')$ gerechnet werden.

Wenn aber ein Komplex der dodekaedrischen Hauptstruktur und der Modalität II. Art vertreten ist, so ist es leicht, nach beiden in der Symmetrieebene liegenden resp. zu derselben senkrechten Flächen den Winkel zwischen Hauptfläche und dem betreffenden Pinakoid zu berechnen und somit zwei Pinakoide als Ausgangsflächen auszuwählen (dies gilt natürlich auch für die Komplexe der triklinen Syngonie).

Der komplizierteste Fall ist also der der dodekaedrischen Hauptstruktur und der Modalität I. Art. Es seien ausschließlich die Formen {001} und }111{[1]) vertreten[1]).

Dann sind unmitttelbar aus der Beobachtung: 1. die beiden Winkel mit dem Scheitelpunkt (001) und 2. vier Winkel zwischen (001) und jeder Fläche }111{ bekannt.

Nun berechnen wir zuerst aus dem Dreieck (111) ∧ (001) ∧ (111) die Winkel mit den Scheitelpunkten (111) und (1$\bar{1}$1) und noch den Winkel (111) : (111); dann berechnen wir in dem Dreieck (111) ∧ (001) ∧ (111) den Winkel mit dem Scheitelpunkt (111) und in dem Dreieck (1$\bar{1}$1) ∧ (001) ∧ ($\bar{1}\bar{1}$1) den Winkel mit dem Scheitelpunkt (111). Diese Berechnungen sind für die Benutzung der angegebenen Tabellen zureichend, da bei der Annahme von Ausgangsflächen (111) und (1$\bar{1}$1) alle geforderten Konstanten schon bekannt sind; für weitere Berechnungen ist die Tabelle III geeignet.

Etwas einfacher gestalten sich die Berechnungen für einen trigonaloiden Komplex, wenn in dem betreffenden Kristall außer tafeliger Fläche (111) nur noch die übrigen Flächen von }111{ vertreten sind.

In diesem Falle sind sämtliche Winkel mit dem Scheitelpunkt (111) teils bekannt teils leicht berechenbar.

Nun berechnen wir in den Dreiecken (1$\bar{1}$1) ∧ (111) ∧ (11$\bar{1}$) und ($\bar{1}$11) ∧ (111) ∧ (11$\bar{1}$) die Winkel mit dem Scheitelpunkt (11$\bar{1}$). Für die Benutzung der Tabelle reicht dies schon zu, wenn (111) und (11$\bar{1}$) für die beiden Ausgangsflächen angenommen werden. Ist der Komplex monoklin, so lassen sich die übrigen Rechnungen nach den Formeln der II. Tabelle, Kolonne $F = \frac{\pi}{2}$, $F' = \frac{\pi}{2}$ ausführen.

1) }$p_1 p_2 p_3${ drückt die Gesamtheit der Flächen aus, deren Indizes durch die gleichen Zahlen (wenn auch mit verschiedenen Zeichen) vertreten sind. So z. B. drückt }111{ für einen rhombischen Komplex dieselben vier Flächen(paare) aus, wie {111}, und }110{ für einen kubischen Komplex dieselben sechs Flächen(paare), wie {110}.

II. Die Grundformeln der ebenen Tetragonometrie.

Es ist klar, daß die Formeln des I. Teils dieser Arbeit auch für diesen, als einen speziellen Fall anwendbar sind. Dieser spezielle Fall ist zugleich der einfachere. weil für denselben noch die spezielle Gleichung $A + B + C = \pi$ gilt resp. die Größe des sphärischen Überschusses gleich Null ist. Zugleich ist die Ebene als Speziallfall der Sphäre aufzufassen, für welche der Radius unendliche Größe erhält.

Diese Vereinfachung springt besonders in Bezug auf die Formel |10| in die Augen, weil wir hier für den Winkel C sogar keine spezielle Formeln aufsuchen müssen, da die Gleichung $C = \pi - (A + B)$ direkt aufgestellt werden kann. Also

$$\cos C = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \qquad 10)$$

Für diesen Fall haben wir also in der Formel 10) des I. Teils $(ab) = 0$, was direkt ersichtlich wird, wenn wir den Winkeln A und B die Werte $\frac{\pi}{2}$ zuerteilen, das heißt, aus C zwei Perpendikel auf a und b ziehen würden.

Wie in dem Grunde der sphärischen Tetragonometrie das sphärische, so steht hier das ebene oder eigentliche geometrische Netz von Möbius. Auch das letztere ist nur ein Speziallfall des ersteren.

Es bleibt also nur eine kurze Durchsicht der Formeln des I. Teils auszuführen, um zu entscheiden, auf welche Weise diese Formeln modifiziert werden müssen. Der spezielle Beweis aber der Rationalität der Ableitung ist schon deshalb überflüssig, weil gerade der Wert eines Zonenwinkels C, für welchen wir den komplizierten rationellen Ausdruck (Formel 9) erhalten haben, jetzt am einfachsten durch $c = \pi - (A + B)$ ausgedrückt wird.

In der Grundformel 1) werden die Kotangenten teilweise, in Anwendung auf die Winkelwerte der Zonen in einem Punkte, ungeändert geblieben, teils durch Strecken ersetzt sein.

Für den ersten Fall haben wir also

$$n \operatorname{cotg} |mn| = (n - m) \operatorname{cotg} |01| + m \operatorname{cotg} |11|. \qquad 1)$$

Für den zweiten Fall haben wir in der projektiven Geometrie die betreffende Formel, wenn wir die Doppelpunkte einer Involution durch $|10|$ und $|01|$ bezeichnen, und wenn wir daher unter dem Ausdruck $|mn|'$ die Strecke auszeichnen, welche durch den Punkt $|mn|$ und $|10|$ bestimmt wird; $|mn|$ würde aber die Strecke mit $|01|$ bezeichnen.

Also

$$\frac{|mn|}{|mn|'} = \frac{m\,|11|}{n\,|11|'} \quad \text{respektive} \quad |mn| = \frac{m\,|01| \cdot |11|}{m\,|11| + n\,|11|'}. \qquad 1\,\text{b)}$$

In dem speziellen Falle, wenn $|10|$ unendlich fern ist, haben wir

$$n\,|mn| = m\,|11|. \qquad 1\,\text{c)}$$

Der Spezialfall $|\bar{1}1| = -|11|$ ist selbstverständlich.

Für die Formel 2) erhalten wir jetzt

$$\frac{(ae)}{(be)} = \frac{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B_1 - \operatorname{cotg} B} = k. \qquad 2)$$

Daraus aber, mit Rücksicht auf die Formel

$$\frac{(ae)}{(be)} = \frac{(ae')}{(be')} \quad \text{und also} \quad (ae') = k(be')$$

folgt

$$(be) = \frac{(ab)}{1+k} \quad \text{und} \quad (ac) = \frac{k(ab)}{1+k},$$

auch 3 b)

$$(be') = \frac{(ab)}{k-1} \quad \text{und} \quad (ac') = \frac{k(ab)}{k-1},$$

also auch

$$(cc') = \frac{2(ab)}{k^2-1}. \qquad 4)$$

In dem Spezialfall $(ae) = (bc)$, also $k = 1$, haben wir den Punkt e' unendlich entfernt.

Entsprechend den Formeln 5), unter Berücksichtigung von 10), haben wir

$$(ac) = \frac{\sin B\,(ab)}{\sin(A+B)} \qquad 5)$$

und

$$(bc) = \frac{\sin A (ab)}{\sin (A + B)}. \tag{5a}$$

Die Formel 6) läßt sich herleiten aus den bekannten Formeln

$$\operatorname{tang} \frac{E - Ca}{2} = \frac{(ac) - (ae)}{(ac) + (ae)} \operatorname{tang} \frac{E + Ca}{2}, \quad \text{wo } E + Ca = \pi - A;$$

folglich

$$\operatorname{tang} \frac{E + Ca}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

und

$$\operatorname{cotg} E = \frac{(ae) - (ac)\cos A}{(ac)\sin A} = \frac{(be) - (bc)\cos B}{(bc)\sin B}. \tag{6}$$

und

$$\operatorname{cotg} E' = \frac{(ae') + (ac)\cos A}{(ac)\sin A} = \frac{(be') - (bc)\cos B}{(bc)\sin B}. \tag{6a}$$

Nun aber ist

$$\frac{(ae)}{(ac)\sin A} = \operatorname{cotg} E + \operatorname{cotg} A$$

und

$$\frac{(ae')}{(ac)\sin A} = \operatorname{cotg} E' - \operatorname{cotg} A$$

respektive

$$(ae)(\operatorname{cotg} E' - \operatorname{cotg} A) = (ae')(\operatorname{cotg} E + \operatorname{cotg} A);$$

folglich

$$\operatorname{cotg} A (ae + ae') = \operatorname{cotg} A (ee') = (ae) \operatorname{cotg} E' - (ae') \operatorname{cotg} E.$$

Es ist ganz klar, daß dieser Formel, wie der Formel 8) des I. Teiles allgemeine Bedeutung zukommt, so daß wir dieselbe in der Form

$$\operatorname{cotg} X (ab) = \operatorname{cotg} B (ax) - \operatorname{cotg} A (bx) \tag{8}$$

schreiben können.

Falls wir alle Winkel A, B, X in diesem Fall in einer

und derselben Richtung aufzählen würden, so müssen wir A durch $-A'$ ersetzen, und dann besteht

$$\operatorname{cotg} X(ab) = \operatorname{cotg} B(ax) + \operatorname{cotg} A'(bx). \qquad 8\,a)$$

Somit wäre die Ableitung der Grundformeln erschöpft.

Im allgemeinen sind zur Bestimmung des ebenen, ebenso wie des sphärischen Netzes fünf Konstanten notwendig.

In der Anwendung auf die Kristallographie wird das ebene Netz durch die gnomonische (wie das sphärische durch die gnomostereographische) Projektion des kristallographischen Komplexes vertreten. Aber für die Praxis der Kristallographie sind weder die Strecken noch die ebenen Winkel des Netzes nötig, da dieselben keine direkte Beziehung zu gemessenen Winkeln haben.

Die Werte aller dieser Elemente des Netzes können sich auf unendliche Weise ändern, je nachdem, wie die Projektionsebene ausgewählt wird. In der Praxis wird natürlich diejenige angenommen, welche zur maximalen Einfachheit in der Darstellung führt. Deshalb wird für die betreffende Ebene diejenige angenommen, in welcher die Punkte der Hauptzone (welche besonders empfehlenswert ist als Ausgangszone aufzufassen) in die Unendlichkeit hinausrücken.

Sind aber die beiden Ausgangspunkte unendlich ferne, so bilden alle durch dieselben bestimmte Zonengeraden das ebene (parallelogrammatische) Netz; dann verlieren die Strecken von beliebigen Punkten bis zu diesen Ausgangspunkten jede reelle Bedeutung. Besonders einfach wird aber dann die Auffindung der Netzpunkte durch die zugehörigeu Indizes der Symbole, weshalb gerade für diesen Zweck das Netz zur Anwendung kommt.

Für dasselbe Netz können wir natürlich auch beliebige zwei andere Punkte als Ausgangspunkte auswählen, aber gerade dann würden die Konstruktionen der Punkte nach gegebenen Indizes ihre Einfachheit verlieren.

Dualismus des sphärischen Netzes.

Bekanntlich gibt es auf der Sphäre zwei geometrische Netze, welche zueinander in dualistischem Verhältnis stehen, indem jeder Punkt eines derselben als der Pol eines bestimmten Großkreisbogens resp. der Zone des anderen ist. Dieser Dualismus kommt am deutlichsten durch die Indizes zum Ausdruck.

Für ein Netz haben wir vier Punkte a, b, c, d zu Grunde gelegt, und diesen Punkten die Indizes (100), (010), (001), (111) zuerteilt. Aber es gibt auch vier Zonen dieses Netzes, welchen dieselben Indizes zukommen, und die Pole dieser Zonen sind die Punkte des dualistischen Netzes; diese Zonen sind

$$\begin{vmatrix} 010 \\ 001 \end{vmatrix} = [100], \quad \begin{vmatrix} 001 \\ 100 \end{vmatrix} = [010], \quad \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \end{vmatrix} = [001] \text{ und } \begin{vmatrix} 0\bar{1}1 \\ 10\bar{1} \end{vmatrix} = [111].$$

Nun leuchtet ein, daß, wenn für die Bestimmung dieses anderen Netzes wir die analogen sphärischen Koordinaten annehmen wie für die Punkte a—d, so werden alle oben ermittelten Formeln direkt auch für dieses Netz anwendbar.

Die vollständige Berechnung desselben erfordert also nur die Angabe dieser fünf Koordinaten als die Konstanten desselben.

Vom mathematischen Standpunkte aus haben wir hier aber nur mit dem Übergange von einem System der sphärischen Dreiecke zu dem polaren zu tun, weil eben die Netze selbst in solchem polaren Verhältnis zueinander stehen.

Die erste Konstante des ersten Netzes ist der Winkel ab resp. (100) : (010). Die respektive Konstante des polaren Netzes ist der dem Winkel C' polare Winkel, welcher durch die Formel 10) bestimmt wird.

Also ist für das polare Netz die erste Konstante (ab) die Größe

$$\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \cos(ab). \qquad 1)$$

Die übrigen vier Konstanten des polaren Netzes sind gerade die den durch ein paar Punkte bestimmten Winkeln (den Dreiecksseiten des ersten Netzes) polaren.

Zwei von ihnen sind den Winkeln AC und BC polar, werden also durch die Formeln

für A

$$- \operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab) \sin B - \operatorname{cotg}(ab) \cos B, \qquad 2)$$

für B

$$- \operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) \sin A - \operatorname{cotg}(ab) \cos A \qquad 3)$$

ausgedrückt.

Was endlich die Konstanten A_1 und B_1 des polaren Netzes anbetrifft, so werden dieselben respektive durch die Winkelgrößen ch'_1 und cg'_1 oder $bh'_1 - bc$ und $ag'_1 - ac$ ausgedrückt.

Dieselben Formeln 5) ergeben aber

$$\operatorname{cotg} bh'_1 = \operatorname{cotg} A_{-1} \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \operatorname{cotg}(ab) \cos B$$

und

$$\operatorname{cotg} be = \operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \operatorname{cotg}(ab) \cos B,$$

und daraus ist schon leicht der Wert von $\operatorname{cotg}(bh'_1 - bc)$ zu bestimmen, und für die respektiven Konstanten folgende Werte zu ermitteln:

für A_1

$$\frac{[\cos(ab) \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} A_{-1}] \cos(ab) \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} A_{-1} + \sin^2(ab) \operatorname{cosec}^2 B}{\sin(ab) \operatorname{cosec} B (\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_1)} \qquad 4)$$

und für B_1

$$\frac{[\cos(ab) \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B_{-1}] \cos(ab) \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} B_{-1} + \sin^2(ab) \operatorname{cosec}^2 A}{\sin(ab) \operatorname{cosec} A (\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} B_1)} \qquad 5)$$

Das sind also die gesuchten Werte der Konstanten des polaren Netzes, vermittelst welcher jetzt auf bekanntem Wege alle Elemente dieses Netzes sich berechnen lassen.

Andererseits sind aber die Elemente der beiden Netze wesentlich dieselben (abgesehen von dem Ersatz der berechneten Werte durch die komplementären). Somit erhellt die Möglichkeit, dieselben Größen durch wesentlich verschiedene Formeln zu berechnen, folglich jedesmal die einfacheren zu ver-

wenden. Man kann z. B. die Berechnung mittelst der Formel 10), welche mit größerer Vorberechnung verbunden ist, durch die Berechnung mit Formel 5) ersetzen.

In der kristallographischen Praxis wird manchmal auch die Berechnung von Winkeln erfordert, welche sich auf die Elemente der beiden Netze beziehen.

Betrachten wir z. B. den Fall des Winkels zwischen zwei Punkten, von welchen der eine dem ersten und der zweite dem polaren Netze angehört. Zur Berechnung ersetzen wir den letzteren Punkt x durch den zugeordneten Großkreisbogen des ersten Netzes.

Es sei c der Punkt des ersten Netzes, und nehmen wir an, daß der zugeordnete Kreisbogen durch den Punkt a hindurchgeht und durch die Koordinate A_k bestimmt wird.

Nun haben wir ein rechtwinkliges, sphärisches Dreieck, dessen Hypothenuse ac und ein Winkel $A - A_k$; dann erhalten wir

$$\cos(cx) = \sin(ac)\sin(A - A_k). \qquad 6)$$

Speziell wenn der Pol x_0 in der Ausgangszone ist, also $A_k = 0$, haben wir

$$\cos(cx_0) = \sin(ac)\sin A = \sin(be)\sin B = \cos\varrho_c \qquad 6\text{a})$$

und für den Punkt d

$$\cos(dx_0) = \sin(ad)\sin A_1 = \sin(bd)\sin B_1 = \cos\varrho_d. \qquad 6\text{b})$$

Die Winkel cx_0, dx_0 u. dgl. sind gerade diejenigen, welche bei der Justierung nach der Ausgangszone als die Koordinaten ϱ direkt abgelesen werden.

Aus den gleichen rektangulären, sphärischen Dreiecken finden wir leicht auch die Ausdrücke für die Koordinaten φ, da dieselben der zweiten Kathete derselben gleich sind:

$$\operatorname{tang}\varphi_c = \operatorname{tang}(ac)\cos A; \quad \operatorname{tang}(ab - \varphi_c) = \operatorname{tang}(bc)\cos B \qquad 7\text{a})$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi_d = \operatorname{tang}(ad)\cos A_1; \quad \operatorname{tang}(ab - \varphi_d) = \operatorname{tang}(bd)\cos B_1. \qquad 7\text{b})$$

Natürlich sind aus diesen Formeln auch umgekehrt die Konstanten des Netzes als Funktionen der Koordinaten φ und ϱ zu ermitteln, und zwar

$$\sec^2 A = \operatorname{cotg}^2 \varrho_c \operatorname{cotg}^2 \varphi_c + \operatorname{cosec}^2 \varrho_c \qquad \text{8 a)}$$

$$\sec^2 B = \operatorname{cotg}^2 \varrho_c \operatorname{cotg}^2 (a\,b - \varphi_c) + \operatorname{cosec}^2 \varrho_c \qquad \text{8 b)}$$

$$\sec^2 A_1 = \operatorname{cotg}^2 \varrho^d \operatorname{cotg}^2 \varphi_d + \operatorname{cosec}^2 \varrho_d \qquad \text{8 c)}$$

und

$$\sec^2 B_1 = \operatorname{cotg}^2 \varrho_d \operatorname{cotg}^2 (a\,b - \varphi_d) + \operatorname{cosec}^2 \varrho_d . \qquad \text{8 d)}$$

Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte.

Von **Georg Faber** in Straßburg i. E.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. November 1913.

Man hat sich neuerdings vielfach mit den sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerten beschäftigt, dieselben lassen sich bekanntlich folgendermaßen einführen: Gegeben ist die für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, a_{\nu} x^{\nu} \tag{1}$$

(daß hier in $\mathfrak{P}(x)$ das Absolutglied a_0 fehlt, ist unwesentlich, bewirkt aber eine kleine Vereinfachung)

und es existiere der Grenzwert

$$g = \lim_{x=1} \mathfrak{P}(x), \tag{2}$$

wobei man sich x etwa reelle Werte durchlaufend denke. Die Koeffizienten der Potenzreihe für $\mathfrak{P}(x) \cdot (1-x)^{-(n+1)}$, wo n eine positive ganze Zahl ist, seien $b_{\nu}^{(n)}$:

$$\mathfrak{P}(x)(1-x)^{-(n+1)} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, b_{\nu}^{(n)} x^{\nu} \tag{3}$$

und $n!\, b_{\nu}^{(n)} \cdot \nu^{-n}$ werde mit $S_{\nu}^{(n)}$ bezeichnet[1]). Der n^{te} Cesàrosche Grenzwert $S^{(n)}$ ist dann definiert durch

$$S^{(n)} = \lim_{\nu=\infty} S_{\nu}^{(n)}, \tag{4}$$

falls dieser Limes existiert; es ist dann immer $S^{(n)} = g$.

Die Hölderschen Grenzwerte $s^{(n)}$ sind in rekurrenter Weise definiert durch die Gleichungen:

---

[1]) Diese Bezeichnung weicht von der üblichen ab; sonst wird gewöhnlich unter $S_{\nu}^{(n)}$ die von mir mit $b_{\nu}^{(n)}$ bezeichnete Größe verstanden.

$$s_\nu^{(0)} = a_1 + \cdots + a_\nu \tag{5}$$

$$s_\nu^{(n)} = \frac{s_1^{(n-1)} + \cdots + s_\nu^{(n-1)}}{\nu} \quad \text{für} \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{6}$$

$$s^{(n)} = \lim_{\nu=\infty} s_\nu^{(n)}, \tag{7}$$

immer vorausgesetzt, daß der Limes auf der rechten Seite von (7) existiert.

Nachdem Herr Knopp[1]) gezeigt hatte, daß die Existenz des n^{ten} Hölderschen Grenzwerts stets diejenige des n^{ten} Cesàroschen nach sich zieht, gelang Herrn Schnee[2]) auch die Umkehrung dieses Satzes. Ich bewundere diesen Beweis des Herrn Schnee als eine Kraftprobe analytischen Scharfsinns, finde ihn aber gleichzeitig so verwickelt, daß es mir einfacher erschien, die Sätze der Herren Knopp und Schnee auf ganz anderem Wege neu abzuleiten, als mich vollständig in die Beweisführung des Herrn Schnee einzuarbeiten[3]). Ich bin bei dieser Gelegenheit zu einem bedeutend allgemeineren Grenzwertsatze gelangt, dessen sehr einfachen Beweis ich hier auseinandersetzen will. Bei allem Verständnis für das Streben nach Reinheit der Methode erblicke ich in der Benutzung funktionentheoretischer Hilfsmittel bei dem vorliegenden Problem keinen Schönheitsfehler, ist doch die ganze Fragestellung auf funktionentheoretischem Boden erwachsen.

Um mich später leichter ausdrücken zu können, schicke ich die Erklärung einiger Bezeichnungen, sowie ein paar Hilfssätze voraus:

---

[1]) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation. Berlin 1907.

[2]) Math. Ann. 67 (1909), S. 110—125; daselbst auch weitere Literaturangaben.

[3]) Ein mir erst nachträglich bekannt gewordener Beweis von Ford (Am. Journ. of Math., Bd. 32 (1910), S. 315—326) ist ebenso kompliziert oder noch komplizierter. — Während der Drucklegung meines hier vorliegenden Beweises erschien ein anderer von I. Schur (Math. Ann., Bd. 74, S. 447); ebenfalls sehr einfach, jedoch ganz anders angelegt und ohne die von mir angegebene weitreichende Verallgemeinerung.

Ich sage, die Koeffizienten a_ν der Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ sind von geringerer Größenordnung als ν^k, in Zeichen $a_\nu \prec \nu^k$, wo k jede reelle Zahl sein kann, wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu \nu^{-k} = 0$ ist; dagegen heißen die a_ν von der Größenordnung $\gamma \nu^k$ in Zeichen $a_\nu \sim \gamma \nu^k$ wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu \nu^{-k}$ existiert und gleich der von Null verschiedenen Zahl γ ist.

I. Hilfssatz: Die Koeffizienten $(-1)^\nu \binom{-k}{\nu}$ der Potenzreihe für $(1-x)^{-k}$ sind, falls k weder eine negative ganze Zahl noch Null ist, von der Größenordnung $\frac{\nu^{k-1}}{\Gamma(k)}$. Dieser Satz bedarf keines Beweises; er ist nichts anderes als die Definition der Γ-Funktion.

Ich definiere ferner zwei auf Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ anzuwendende Operationen: $\mathrm{Div}^\alpha \mathfrak{P}(x)$ und $\mathrm{Int}^\alpha \mathfrak{P}(x)$, wo der Index α jede reelle Zahl sein kann:

(8) $\mathrm{Div}^\alpha \mathfrak{P}(x)$ ist die Potenzreihe $\sum_1^\infty{}^\nu b_\nu^{(\alpha)} x^\nu$ für $\mathfrak{P}(x) \cdot (1-x)^{-\alpha}$, so daß also

$$b_\nu^{(\alpha)} = \sum_1^\nu{}^\mu a_\mu \cdot \binom{-\alpha}{\nu-\mu} \cdot (-1)^{\nu-\mu} \text{ ist.} \tag{9}$$

$$\mathrm{Int}^\alpha \mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \nu^{-\alpha} x^\nu; \tag{10}$$

für $\alpha = 1$ ist also

$$\mathrm{Int}^1 \mathfrak{P}(x) \text{ soviel wie } \int_0^x \frac{\mathfrak{P}(x)}{x} dx. \tag{10'}$$

Für positive α gilt noch die später zu benutzende Darstellung

$$\mathrm{Int}^\alpha \mathfrak{P}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(tx) \frac{dt}{t}. \tag{10''}$$

Die folgenden, ohne weiteres einleuchtenden Formeln bezeichne ich als den

II. Hilfssatz:

(11) $$\mathrm{Div}^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}(x) = \mathrm{Div}^{\beta}(\mathrm{Div}^{\alpha}\mathfrak{P}(x))$$

(12) $$\mathrm{Int}^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}(x) = \mathrm{Int}^{\beta}(\mathrm{Int}^{\alpha}\mathfrak{P}(x)).$$

Weiter gilt der

III. Hilfssatz: Sind die Koeffizienten a_ν in $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu$ von geringerer Größenordnung als ν^k, so sind die Koeffizienten b_ν^α (9) der Potenzreihe $\mathrm{Div}^\alpha \mathfrak{P}(x)$ von geringerer Größenordnung als $\nu^{k+\alpha}$, vorausgesetzt, daß k und α beide > 0 sind.

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl μ_ε der Art, daß für $\mu > \mu_\varepsilon$: $\frac{|a_\mu|}{\mu^k} < \varepsilon$ und erst recht

(13) $$|a_\mu| < \varepsilon \cdot \nu^k \text{ wird, wenn } \nu > \mu > \mu_\varepsilon \text{ ist.}$$

Für alle μ dagegen gilt

(14) $$|a_\mu| < G\mu^k,$$

wo die obere Schranke G von μ unabhängig ist.

Andererseits ist nach dem I. Hifssatze

(15) $$\left|\binom{-\alpha}{\mu}\right| < g\,\mu^{\alpha-1}$$

für alle positiven Zahlen μ; g hängt nur von α ab. Durch Einsetzen von (13), (14), (15) in (9) ergibt sich

(16) $$\begin{aligned} |b_\nu^\alpha| &< \varepsilon\,\nu^k \sum_0^{\nu-\mu_\varepsilon} {}_\mu\, g\cdot\mu^{\alpha-1} + G\,\nu^k \sum_{\nu-\mu_\varepsilon+1}^{\nu} {}_\mu\, g\,\mu^{\alpha-1} \\ &< \varepsilon\,\nu^k g \int_0^{\nu+1} \mu^{\alpha-1}\,d\mu + G\,\nu^k g \int_{\nu-\mu_\varepsilon}^{\nu+1} \mu^{\alpha-1}\,d\mu \\ &< \frac{\varepsilon\cdot g}{\alpha}(\nu+1)^{k+\alpha} + \frac{G\cdot g\left[1-\left(1-\frac{\mu_\varepsilon-1}{\nu+1}\right)^\alpha\right]}{\alpha}(\nu+1)^{k+\alpha} \\ &< \frac{2\,\varepsilon g}{\alpha}(\nu+1)^{k+\alpha} \text{ bei hinreichend großem } \nu; \end{aligned}$$

dies heißt aber: $b_\nu^\alpha \prec \nu^{k+\alpha}$, w. z. b. w.

IV. Hilfssatz: Haben die Potenzreihen $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ und $\sum_0^\infty{}_\nu b_\nu x^\nu$ Koeffizienten von den Größenordnungen $a \cdot \nu^\alpha$ und $b \cdot \nu^\beta$:

$$(17) \qquad a_\nu \sim a \cdot \nu^\alpha, \qquad b_\nu \sim b\,\nu^\beta,$$

und ist sowohl α als $\beta > 0$, so sind die Koeffizienten c_ν der Potenzreihe für

$$\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu \cdot \sum_0^\infty{}_\nu b_\nu x^\nu$$

von der Größenordnung $\dfrac{a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,\nu^{\alpha+\beta+1}$

$$(18) \qquad c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b_0 \sim \frac{a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2}\,\nu^{\alpha+\beta+1}.$$

Nach dem ersten Hilfssatze kann man nämlich schreiben

$$(19) \qquad \begin{aligned} a_\nu &= a \cdot \Gamma(\alpha+1)(-1)^\nu \binom{-\alpha-1}{\nu}(1+\varepsilon_\nu); \\ b_\nu &= b\,\Gamma(\beta+1)(-1)^\nu \binom{-\beta-1}{\nu}(1+\varepsilon'_\nu) \end{aligned}$$

mit

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu=\infty} \varepsilon'_\nu = 0.$$

Setzt man die Ausdrücke (19) in die rechte Seite von (21) ein, so folgt

$$(21) \qquad \begin{aligned} &[a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)(-1)^\nu]^{-1}\,c_\nu \\ &= \sum_0^\nu{}_\mu \binom{-\alpha-1}{\mu}\binom{-\beta-1}{\nu-\mu} \\ &+ \sum_0^\nu{}_\mu \binom{-\alpha-1}{\mu}\left[\varepsilon'_{\nu-\mu}\binom{-\beta-1}{\nu-\mu}\right] \\ &+ \sum_0^\nu{}_\mu \binom{-\beta-1}{\mu}\left[\varepsilon_{\nu-\mu}\binom{-\alpha-1}{\nu-\mu}\right] \\ &+ \sum_0^\nu{}_\mu\, \varepsilon_\mu\, \varepsilon'_{\nu-\mu} \binom{-\alpha-1}{\mu}\binom{-\beta-1}{\nu-\mu}. \end{aligned}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist gleich

$$\binom{-\alpha-\beta-2}{\nu},$$

also nach dem ersten Hilfssatze

$$\sim \frac{\nu^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

die letzte Summe ist dem absoluten Betrage nach offenbar kleiner als die erste mal η_ν, wenn η_ν das größte der $\nu+1$ Produkte

$$|\varepsilon_\mu \varepsilon'_{\nu-\mu}| \, (\mu = 0, 1 \ldots \nu)$$

bedeutet; wegen (20) ist $\lim\limits_{\nu-\infty} \eta_\nu = 0$, die letzte Summe ist also von geringerer Größenordnung als die erste; die zweite Summe stellt den Koeffizienten von x^ν in der Potenzreihe für

$$(1-x)^{-\alpha-1} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \varepsilon'_\nu \binom{-\beta-1}{\nu} (-1)^\nu x^\nu$$

dar; er ist nach dem dritten Hilfssatze (für unendlich wachsendes ν) von geringerer Größenordnung als $\nu^{\alpha+\beta+1}$, da die mit $(1-x)^{-\alpha-1}$ multiplizierte Potenzreihe Koeffizienten $\prec \nu^\beta$ hat (wegen des ersten Hilfssatzes und wegen (20)); genau so ergibt sich, daß auch die dritte Summe auf der rechten Seite von (21) von geringerer Größenordnung als die erste ist; diese gibt daher den Ausschlag und es ergibt sich, wie behauptet,

$$c_\nu \sim \frac{a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,\nu^{\alpha+\beta+1}.$$

Endlich beweise ich den folgenden

V. Hilfssatz: Hat $\Phi(x)$ die Form

$$(1-x)^l \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu,$$

wo $l > 0$, $a_\nu \prec \nu^k$ und $k \geqq l$ ist, so kann man $\mathrm{Int}^\alpha \Phi(x)$ auf die Form $(1-x)^l \mathfrak{P}_1(x)$ bringen, wo die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_1(x) \prec \nu^{k-\alpha}$ sind; α darf jede reelle Zahl $\leqq k-l$ sein.

Es sei zunächst $\alpha = -1$; die Operation Int^{-1} besteht in Differentiation und nachträglicher Multiplikation mit x; es ist also

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\mathrm{Int}^{-1}(1-x)^l \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \\ &= -l x (1-x)^{l-1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu + (1-x)^l \sum_1^\infty{}^\nu \nu a_\nu x^\nu;\end{aligned}$$

der zweite Summand auf der rechten Seite von (22) hat die gewünschte Form, der erste aber läßt sich so schreiben:

$$(1-x)^l \frac{-l x \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu}{1-x};$$

entwickelt man aber

$$\frac{-l x \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu}{1-x}$$

nach Potenzen von x und wendet man auf die so erhaltene Reihe den dritten Hilfssatz an, so sieht man, daß auch der erste Summand und mithin die ganze rechte Seite von (22) Koeffizienten $\prec \nu^{k+1}$ besitzt.

Damit ist wegen der Funktionalgleichung (12) zugleich der Fall erledigt, daß α irgend eine negative ganze Zahl ist; es genügt noch der Fall $0 < \alpha \leqq 1$ zu beweisen, da dann wieder die Funktionalgleichung (12) den Beweis auf alle möglichen α erstreckt.

Es sei also zweitens $0 < \alpha \leqq 1$[1]); dann folgt aus (10''):

$$(23)\qquad \Gamma(\alpha)\,\mathrm{Int}^\alpha((1-x)^l\,\mathfrak{P}(x)) = \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} (1-tx)^l\,\mathfrak{P}(tx)\,\frac{dt}{t}$$

und durch partielle Integration

---

[1]) Will man nur die Identität der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte nachweisen, so genügt es hier $\alpha = 1$ anzunehmen; dann vereinfachen sich die folgenden Ausführungen ein wenig, da man statt Formel (10') die einfachere (10'') benutzen kann.

$$= (1-x)^l \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(t x)\,\frac{d t}{t}$$

$$+\, x l \int_0^1 (1-t x)^{l-1} \int_0^t \left(\lg\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\tau x)\,\frac{d\tau}{\tau}\,\frac{d t}{t}.$$

Hier hat der erste Summand der rechten Seite, der ja $= (1-x)^l\,\Gamma(\alpha)\,\mathrm{Int}^\alpha\,\mathfrak{P}(x)$ ist, die gewünschte Form; im zweiten Summanden liefert die innere Integration nach τ eine Potenzreihe, die ich so schreibe:

$$\sum_1^\infty{}_\nu\, b_\nu \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{t^\nu}{\nu}\, x^\nu = \mathfrak{P}_t(x);$$

die Koeffizienten b_ν hängen zwar noch von t ab, doch ist unabhängig von t: $|b_\nu| < |a_\nu|$; denn

$$\int_0^t \left(\lg\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1} \tau^\nu\,\frac{d\tau}{\tau} < \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \int_0^t \tau^{\nu-1}\,d\tau = \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{t^\nu}{\nu};$$

ist nun $l-1 \leq 0$, so sind (die noch von t abhängenden Koeffizienten) c_ν in der Potenzreihe

$$\sum c_\nu \cdot \left(\lg\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} t^{\nu-1} x^\nu \qquad \text{für} \qquad \frac{1}{t}\,(1-t x)^{l-1}\cdot\mathfrak{P}_t(x)$$

offenbar $\prec \nu^{k-1+1-l}$ gleichmäßig für alle t zwischen Null und 1; integriert man nach t zwischen Null und 1, so hat die resultierende Potenzreihe Koeffizienten $\prec \nu^{k-l-\alpha}$ und wenn man mit $\frac{x l}{(1-x)^l}$ multipliziert, ergeben sich nach dem dritten Hilfssatze Koeffizienten $\prec \nu^{k-\alpha}$; also läßt sich auch der zweite Summand in der Form $(1-x)^l\,\mathfrak{Q}(x)$ darstellen, wo $\mathfrak{Q}(x)$ Koeffizienten $\prec \nu^{k-\alpha}$ hat.

Ist $l-1 > 0$, dagegen $l-2 \leq 0$, so wird der zweite Summand nochmals partieller Integration unterworfen, wodurch er sich folgendermaßen umformt:

$$\int_0^1 (1-tx)^{l-1} \int_0^t \left(\lg \frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \frac{dt}{t}$$

$$(24) \qquad = (1-x)^{l-1} \int_0^1 \int_0^t \left(\lg \left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \frac{dt}{t}$$

$$+ (l-1)x \int_0^1 (1-tx)^{l-2} \int_0^t \int_0^\tau \left(\lg \frac{1}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\sigma x) \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{d\tau}{\tau} \frac{dt}{t}$$

und man sieht genau, wie soeben geschehen, daß die beiden Summanden die gewünschte Form haben und zugleich auch, daß man durch fortgesetzte partielle Integration ganz allgemein zum Ziele kommt.

Nach diesen Vorbereitungen denke man sich wieder die Potenzreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

gegeben und unterwerfe sie der Operation:

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1} \mathrm{Int}^{\beta_1} \mathrm{Div}^{\alpha_2} \mathrm{Int}^{\beta_2} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_n} \mathrm{Int}^{\beta_n},$$ [1]

die ich kurz Op_1 nennen will:

$$(25) \qquad \begin{aligned} Op_1 \mathfrak{P}(x) &= \mathrm{Div}^{1+\alpha_1} \mathrm{Int}^{\beta_1} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_n} \mathrm{Int}^{\beta_n} \mathfrak{P}(x) \\ &= \sum_1^\infty {}_\nu\, b_\nu^{(1)} x^\nu; \end{aligned}$$

ebenso unterwerfe man $\mathfrak{P}(x)$ der Operation Op_2, die soviel als

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1'} \mathrm{Int}^{\beta_1'} \mathrm{Div}^{\alpha_2'} \mathrm{Int}^{\beta_2'} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_m'} \mathrm{Int}^{\beta_m'}$$

sei:

$$(26) \qquad \begin{aligned} Op_2 \mathfrak{P}(x) &= \mathrm{Div}^{1+\alpha_1'} \mathrm{Int}^{\beta_1'} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_m'} \mathrm{Int}^{\beta_m'} \mathfrak{P}(x) \\ &= \sum_1^\infty {}_\nu\, b_\nu^{(2)} x^\nu. \end{aligned}$$

[1]) Es soll zuerst $\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}$, dann Int^{β_1} usw. ausgeführt werden.

α_ν, β_ν, α'_μ, β'_μ seien lauter positive Zahlen, die folgende Relationen befriedigen:

$$(27)\quad \begin{aligned} &\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\cdots+\beta_n \\ &=\alpha'_1+\cdots+\alpha'_m=\beta'_1+\cdots+\beta'_m=\sigma \end{aligned}$$

$$(28)\quad \alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_\nu \geqq \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu \quad \text{für} \quad \nu<n$$

$$(29)\quad \alpha'_1+\alpha'_2\cdots+\alpha'_\mu \geqq \beta'_1+\beta'_2+\cdots+\beta'_\mu \quad \text{für} \quad \mu<m.$$

Dann besteht der folgende Satz, dessen Ableitung das Ziel der vorliegenden Note ist:

Existiert der Grenzwert

$$(30)\quad \begin{aligned} S=&\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2+1)}\cdots \\ &\frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2\ldots-\beta_{n-1}+\alpha_n+1)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2\cdots+\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+1)}\lim_{\nu=\infty} b_\nu^{(1)}, \end{aligned}$$

so existiert auch der Grenzwert

$$(31)\quad \begin{aligned} S'=&\frac{\Gamma(\alpha'_1+1)}{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2+1)}{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2-\beta'_2+1)}\cdots \\ &\frac{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2-\beta'_2\ldots-\beta'_{m-1}+\alpha'_m+1)}{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2-\beta'_2\cdots+\alpha'_{m-1}-\beta'_{m-1}+1)}\lim_{\nu=\infty} b_\nu^{(2)} \end{aligned}$$

und umgekehrt; und es ist stets

$$(31')\quad S=S'.$$

Ein ganz spezieller Fall dieses Satzes liegt vor, wenn

$$32)\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\beta_1=\beta_2=\ldots\beta_n=1,\ \alpha'_1=\beta'_1=n$$

ist. Dann besagt der Satz offenbar nichts anderes als die Identität des Cesàroschen und des Hölderschen Grenzwerts n^{ter} Ordnung.

Zunächst bemerke man, daß der Satz richtig ist, wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ sich auf ein Glied $a_1 x$ reduziert, und daß dann $S=S'=a_1$ ist. Es ist nämlich

(33)

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}(a_1 x)$$

eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$\sim a_1 \cdot \nu^{\alpha_1-\beta_1} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)} \text{ (I. Hilfssatz)},$$

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}(a_1 x)$$

eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$\sim a_1\, \nu^{\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2} \frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)(\Gamma\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+1)} \text{ (I. u. IV. Hilfssatz)},$$

usw.; schließlich

$$Op_1\, a_1 x$$

eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$\sim a_1 \nu^0 \frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+1)\ldots\Gamma(\alpha_1-\beta_1\cdots+\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)\cdot\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_1-\beta_1\ldots-\beta_{n-1}+\alpha_n+1)}.$$

Auf Grund dieser Bemerkung genügt es, den obigen Satz in folgender, viel speziellerer Fassung zu beweisen:

Exisiert der Grenzwert S und ist er gleich Null, so existiert auch S' und ist ebenfalls gleich Null.

Wenn nämlich S existiert, aber von Null verschieden ist, so wird durch bloße Abänderung des Koeffizienten a_1 erreicht, daß der neue Grenzwert $\overline{S}$ zu Null wird; m. a. W.

$$Op_1(-S\cdot x+\mathfrak{P}(x)) = Op_1(-Sx) + Op_1\mathfrak{P}(x)$$

liefert einen Grenzwert $\overline{S}=0$; ist aber bewiesen, daß dann auch der aus $Op_2(-Sx+\mathfrak{P}(x))$ resultierende Grenzwert $\overline{S}=0$ ist, so folgt aus dem distributiven Charakter der Funktionen Op_1 und Op_2, daß $Op_1(\mathfrak{P}(x))$ und $Op_2(\mathfrak{P}(x))$ den gleichen Grenzwert liefern müssen, wie $Op_1(Sx)$ und $Op_2(Sx)$, nämlich S.

Die spezielle Fassung unseres Satzes für $S=0$, die einzig noch zu beweisen bleibt, ist eine unmittelbare Folge des folgenden Satzes:

Die Koeffizienten von x^ν in der Potenzreihe für

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}\ldots\mathrm{Div}^{\alpha_n}\,\mathrm{Int}^{\beta_n}\,\mathfrak{P}(x),$$

wo wieder

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \sigma$$

ist und (28) befriedigt ist, konvergieren dann und nur dann mit wachsendem ν gegen Null, wenn die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x) = (1-x)^{-1-\sigma}\,\mathfrak{P}(x) \tag{34}$$

$\prec \nu^\sigma$ ausfallen.

Da nämlich in dieser Bedingung nur die Summe der α und β vorkommt, gilt sie gleichzeitig für Op_1 und Op_2.

Die Bedingung (34) ist erstens hinreichend. Denn wenn $\mathfrak{P}(x)$ die verlangte Form

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x)^{\sigma+1}\,\mathfrak{P}_1(x) \tag{34'}$$

hat, so findet man unter steter Benutzung des fünften Hilfssatzes;

(35)
$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathfrak{P}(x) = (1-x)^{\sigma-\alpha_1}\,\mathfrak{P}_2(x),$$
wo die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_2(x) \prec \nu^{\sigma-\beta_1}$ sind;
$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}\,\mathfrak{P}(x) = (1-x)^{\sigma-\alpha_1-\alpha_2}\,\mathfrak{P}_3(x),$$
wo die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_3(x) \prec \nu^{\sigma-\beta_1-\beta_2}$ sind;

. . . .

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}\ldots\mathrm{Div}^{\alpha_n}\,\mathrm{Int}^{\beta_n}\,\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_{n+1}(x),$$
wo die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_{n+1}(x) \prec \nu^0$ sind, w. z. b. w.

Die Bedingung (34) ist zweitens notwendig. Geht man nämlich von irgend einer gegebenen Potenzreihe $\mathfrak{Q}_{n+1}(x)$ mit Koeffizienten $\prec \nu^0$ aus, so erhält man wieder auf Grund des fünften Hilfssatzes:

$$\mathrm{Int}^{-\beta_n}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_n}\,\mathfrak{Q}_{n+1}(x) = (1-x)^{\alpha_n}\,\mathfrak{Q}_n(x),$$

wo die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_n(x) \prec \nu^{\beta_n}$ sind;

$$\mathrm{Int}^{-\beta_n}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_n}\,\mathrm{Int}^{-\beta_{n-1}}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_{n-1}}\,\mathfrak{Q}_{n+1}(x) = (1-x)^{\alpha_n+\alpha_{n-1}}\,\mathfrak{Q}_{n-1}(x),$$

wo die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_{n-1}(x) \prec \nu^{\beta_n+\beta_{n-1}}$ sind;

. . . .

$$\mathrm{Int}^{-\beta_n}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_n}\ldots\mathrm{Int}^{-\beta_1}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_1-1}\,\mathfrak{Q}_{n+1}(x) = (1-x)^{\sigma+1}\,\mathfrak{Q}_1(x),$$

wo die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_1(x) < \nu^\sigma$ sind.

Umgekehrt ist

$$Op_1(1-x)^{1+\sigma}\,\mathfrak{Q}_1(x) = \mathfrak{Q}_{n+1}(x);$$

jede Funktion, aus der durch die Operation Op_1 eine Potenzreihe mit Koeffizienten $\prec \nu^0$ wird, muß daher die Form

$$(1-x)^{1+\sigma}\,\mathfrak{Q}_1(x),$$

d. h. die durch (34) verlangte haben.

Ich wollte die vorstehenden Entwickelungen lieber möglichst einfach als möglichst allgemein gestalten; sonst hätte ich neben den Operationen Div und Int noch andere, z. B.

$$\mathrm{div}^\alpha\,\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x)\,(\lg(1-x))^\alpha, \qquad \mathrm{int}^\alpha\,\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{(\lg\nu+1)^\alpha}\,x^\nu$$

sowie weitere mit iterierten Logarithmen einführen und damit viel allgemeinere Grenzwertsätze ableiten können.

Die Tabelle der Formeln der sphärischen Tetragonometrie in Anwendung auf die Kristallographie.

Der erste Fall. Die Grundfläche a und die komplementäre Fläche b als die Ausgangsflächen. Die Konstanten: Der Winkel (ab) in der Hauptzone und die Winkel A, A_1, B und B_1.

Trikline Syngonie	$(A = B)$	Monokline Syngonie $(ab) = \frac{\pi}{2};\ A = \frac{\pi}{2}$	$(ab) = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$	$A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$	Rhombische Syngonie $(A = B);\ A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$	$(ab) = \frac{\pi}{2};\ A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$
$k = \frac{\mathrm{cotg}\,A_1 - \mathrm{cotg}\,A}{\mathrm{cotg}\,B_1 - \mathrm{cotg}\,B}$	1	$\frac{\mathrm{cotg}\,A_1}{\mathrm{cotg}\,B_1 - \mathrm{cotg}\,B}$	$\frac{\mathrm{cotg}\,A_1 - \mathrm{cotg}\,A}{\mathrm{cotg}\,B_1}$	$\frac{\mathrm{cotg}\,A_1}{\mathrm{cotg}\,B_1}$	1	$\frac{\mathrm{cotg}\,A_1}{\mathrm{cotg}\,B_1}$
$\sin(bc) = \frac{\sin(ac)}{k}$	$\sin(ac)$	$\frac{\sin(ac)}{k}$	$\frac{\sin(ac)}{k}$	$\frac{\sin(ac)}{k}$	$\sin(ac)$	$\frac{\sin(ac)}{k}$
$\mathrm{cotg}(ac) = \frac{1 + k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 + k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cotg}(bc) = \frac{k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}$	k	k	$\frac{k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}$	k
$\mathrm{cotg}(ac') = \frac{1 - k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\mathrm{tang}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 - k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\mathrm{tang}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cotg}(bc') = \frac{-k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$-\mathrm{tang}\frac{ab}{2}$	$-k$	$-k$	$\frac{-k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$\mathrm{tang}\frac{ab}{2}$	$-k$
$\mathrm{cotg}(cc') = \frac{1 - k^2}{2k\sin(ab)}$	0	$\frac{1-k^2}{2k}$	$\frac{1-k^2}{2k}$	$\frac{1-k^2}{2k\sin(ab)}$	0	$\frac{1-k^2}{2k}$
$\mathrm{cotg}\,A_{-1}$[1] $= 2\,\mathrm{cotg}\,A - \mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A - \mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A - \mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,A_1$
$\mathrm{cotg}\,B_{-1} = 2\,\mathrm{cotg}\,B - \mathrm{cotg}\,B_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A - \mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,B - \mathrm{cotg}\,B_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1$	$-\mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1$
$\mathrm{cotg}\,A_2 = -\mathrm{cotg}\,A + 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,A + 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,A + 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$
$\mathrm{cotg}\,A_{-2} = 3\,\mathrm{cotg}\,A - 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$3\,\mathrm{cotg}\,A - 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$3\,\mathrm{cotg}\,A - 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$
$\mathrm{cotg}\,B_2 = -\mathrm{cotg}\,B + 2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$-\mathrm{cotg}\,A + 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$-\mathrm{cotg}\,B + 2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$2\,\mathrm{cotg}\,B_1$
$\mathrm{cotg}\,B_{-2} = 3\,\mathrm{cotg}\,B - 2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$3\,\mathrm{cotg}\,A - 2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$3\,\mathrm{cotg}\,B - 2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\,B_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\,B_1$
$\mathrm{cotg}(ac) = \mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A + \mathrm{cotg}(ab)\cos A$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}\cos A$	$\mathrm{cotg}\,B$	0	0	0	0
$\mathrm{cotg}(ad) = \mathrm{cotg}\,B_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_1 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$	$\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$	$\mathrm{cotg}(ac)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$
$\mathrm{cotg}(ad') = \mathrm{cotg}\,B_{-1}\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\,B_{-1}\sin A_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_{-1}$	$-\mathrm{cotg}(ac)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$
$\mathrm{cotg}(af) = \mathrm{cotg}\,B_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$	$\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_{-1}$	$\mathrm{cotg}(ac')\cos A_1$	$\mathrm{tang}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$
$\mathrm{cotg}(af') = \mathrm{cotg}\,B_{-1}\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_1 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,A_{-1}\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_1 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,B_{-1}\sin A_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$	$-\mathrm{cotg}(ac')\cos A_1$	$-\mathrm{tang}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$-\mathrm{cotg}\,B_1\sin A_1$
$\mathrm{cotg}(ag_1) = \mathrm{cotg}\,B_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A + \mathrm{cotg}(ab)\cos A$	$\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A + \mathrm{cotg}(ab)\cos A$	$\mathrm{cotg}\,B_1$	$\mathrm{cotg}\,B_1\sin A$	$\mathrm{cotg}\,B_1\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\mathrm{cotg}\,B_1$
$\mathrm{cotg}(ag_1') = \mathrm{cotg}\,B_{-1}\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A + \mathrm{cotg}(ab)\cos A$	$\mathrm{cotg}\,A_{-1}\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A + \mathrm{cotg}(ab)\cos A$	$\mathrm{cotg}\,B_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\,B_1\sin A$	$\mathrm{cotg}\,B_1\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)$	$-\mathrm{cotg}\,B_1$
$\mathrm{cotg}(ag) = 2\,\mathrm{cotg}(ag_1) - \mathrm{cotg}(ac)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1) - \mathrm{cotg}(ac)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1) - \mathrm{cotg}(ac)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$
$\mathrm{cotg}(ag') = -2\,\mathrm{cotg}(ag_1) + 3\,\mathrm{cotg}(ac)$	$-2\,\mathrm{cotg}(ag_1) + 3\,\mathrm{cotg}(ac)$	$-2\,\mathrm{cotg}(ag_1) + 3\,\mathrm{cotg}(ac)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$	$-2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$	$2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$	$-2\,\mathrm{cotg}(ag_1)$
$\mathrm{cotg}(ah) = \mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_2 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_2$	$\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_2 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_2$	$\mathrm{cotg}\,B\sin A_2$	0	$\mathrm{cotg}(ab)\cos A_2$	$\mathrm{cotg}(ab)\cos A_2$	0
$\mathrm{cotg}(ah') = \mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-2} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-2}$	$\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-2} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-2}$	$\mathrm{cotg}\,B\sin A_{-2}$	0	$-\mathrm{cotg}(ab)\cos A_2$	$-\mathrm{cotg}(ab)\cos A_2$	0
$\mathrm{cotg}(ah_1) = \mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_1 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_1 + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}\,B\sin A_1$	0	$\mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$\mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	0
$\mathrm{cotg}(ah_1') = \mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \mathrm{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\mathrm{cotg}\,B\sin A_{-1}$	0	$-\mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	$-\mathrm{cotg}(ab)\cos A_1$	0
$\mathrm{cotg}\,E = [\mathrm{cotg}\,B\sin(ac) - \mathrm{cotg}\,A\sin(bc)]\,\mathrm{cosec}(ab)$	0	$\mathrm{cotg}\,B\sin(ac)$	$-\mathrm{cotg}\,A\cos(ac)$	0	0	0
$\mathrm{cotg}\,E_1 = [\mathrm{cotg}\,B_1\sin(ac) - \mathrm{cotg}\,A_{-1}\sin(bc)]\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\,A - \mathrm{cotg}\,A_{-1})\sec\frac{ab}{2}$	$\mathrm{cotg}\,B_2\sin(ac)$	$-\mathrm{cotg}\,A_2\cos(ac)$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin(bc)$	$\mathrm{cotg}\,A_1\sec\frac{ab}{2}$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1\cos(ac)$
$\mathrm{cotg}\,E_{-1} = [\mathrm{cotg}\,B_{-1}\sin(ac) - \mathrm{cotg}\,A_1\sin(bc)]\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\,A_{-1} - \mathrm{cotg}\,A)\sec\frac{ab}{2}$	$\mathrm{cotg}\,B_{-2}\sin(ac)$	$\mathrm{cotg}\,A_2\cos(ac)$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin(bc)$	$-\mathrm{cotg}\,A_1\sec\frac{ab}{2}$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1\cos(ac)$
$\mathrm{cotg}\,E' = [\mathrm{cotg}\,B\sin(ac) + \mathrm{cotg}\,A\sin(bc')]\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\mathrm{cot}\,A\,\mathrm{cosec}\frac{ab}{2}$	$\mathrm{cotg}\,B\sin(ac)$	$\mathrm{cotg}\,A\cos(ac)$	0	0	0
$\mathrm{cotg}\,E_1' = [\mathrm{cotg}\,B_1\sin(ac') + \mathrm{cotg}\,A_1\sin(bc')]\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}\frac{ab}{2}$	$\mathrm{cotg}\,B_2\sin(ac)$	$\mathrm{cotg}\,A_2\cos(ac)$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin(bc')$	$\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}\frac{ab}{2}$	$2\,\mathrm{cotg}\,A_1\cos(ac)$
$\mathrm{cotg}\,E_{-1}' = [\mathrm{cotg}\,B_{-1}\sin(ac) + \mathrm{cotg}\,A_{-1}\sin(bc')]\,\mathrm{cosec}(ab)$	$\mathrm{cotg}\,A_{-1}\,\mathrm{cosec}\frac{ab}{2}$	$\mathrm{cotg}\,B_{-2}\sin(ac)$	$\mathrm{cotg}\,A_{-3}\cos(ac)$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}(ab)\sin(bc')$	$-\mathrm{cotg}\,A_1\,\mathrm{cosec}\frac{ab}{2}$	$-2\,\mathrm{cotg}\,A_1\cos(ac)$

[1] In diesen Tabellen werden die Bezeichnungen der Winkel in der regulären Entwicklung durch Unterdrücken der zweiten unteren Zahl verkürzt. Also z. B. anstatt A_{10}, A_{21}, A_{11}, A_{12}, A_{01}, A_{-12}, A_{-11}, A_{-21} heißt es 0, A_2, A_1, A_1, A, A_{-1}, A_{-1}, A_{-2} usw.

Die Tabelle der Formeln der sphärischen Tetragonometrie in Anwendung auf die Kristallographie.

Der zweite Fall. Die Grundfläche f und die komplementäre Fläche f' als die Ausgangsflächen. Die Konstanten: Der Winkel ff' nicht in der Hauptzone und die Winkel F, F_1, F' und F'_1.

Trikline Syngonie			Monokline Syngonie		Rhombische Syngonie	
	$(F = F')$	$(ff') = \frac{\pi}{2};\ F = \frac{\pi}{2}$	$(ff') = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$	$F = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$	$(F = F');\ F = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$	$(ff') = \frac{\pi}{2};\ F = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$
$k = \frac{\mathrm{cotg}\, F_1 - \mathrm{cotg}\, F}{\mathrm{cotg}\, F'_1 - \mathrm{cotg}\, F'}$	1	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1}{\mathrm{cotg}\, F'_1 - \mathrm{cotg}\, F'}$	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1 - \mathrm{cotg}\, F}{\mathrm{cotg}\, F_1}$	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1}{\mathrm{cotg}\, F'_1}$	1	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1}{\mathrm{cotg}\, F'_1}$
$\sin(f'c) = \sin(fc)/k$	$\sin\frac{ff'}{2}$	$\sin(fc)/k$	$\sin(fc)/k$	$\sin(fc)/k$	$\sin\frac{ff'}{2}$	$\sin(fc)/k$
$\mathrm{cotg}(f'c) = \frac{k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}$	k	k	$\frac{k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}$	k
$\mathrm{cotg}(fc) = \frac{1 + k\cos(ff')}{k\sin(ff')}$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 + k\cos(ff')}{k\sin(ff')}$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cotg}(f'c') = \frac{-k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$-\mathrm{tang}\frac{ff'}{2}$	$-k$	$-k$	$\frac{-k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$-\mathrm{tang}\frac{ff'}{2}$	$-k$
$\mathrm{cotg}(fc') = \frac{1 - k\cos(ff')}{k\sin(ff')}$	$\mathrm{tang}\frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 - k\cos(ff')}{k\sin(ff')}$	$\mathrm{tang}\frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cotg}(cc') = \frac{1 - k^2}{2k\sin(ff')}$	0	$\frac{1-k^2}{2k}$	$\frac{1-k^2}{2k}$	$\frac{1-k^2}{2k\sin(ff')}$	0	$\frac{1-k^2}{2k}$
$\mathrm{cotg}\, F_{-1} = 2\,\mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F'_{-1} = 2\,\mathrm{cotg}\, F' - \mathrm{cotg}\, F'_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F' - \mathrm{cotg}\, F'_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1$
$\mathrm{cotg}\, F_2 = -\mathrm{cotg}\, F + 2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F + 2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F + 2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F_{-2} = 3\,\mathrm{cotg}\, F - 2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F - 2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F - 2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F_3 = -2\,\mathrm{cotg}\, F + 3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F + 3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F + 3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F_{-3} = 4\,\mathrm{cotg}\, F - 3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$4\,\mathrm{cotg}\, F - 3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$4\,\mathrm{cotg}\, F - 3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\,\mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\,\mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}(fe) = \mathrm{cotg}\, F'\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F + \mathrm{cotg}(ff')\cos F'$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}\cos F$	$\mathrm{cotg}\, F'$	0	0	0	0
$\mathrm{cotg}(fd) = \mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fd') = -\mathrm{cotg}\, F'_{-1}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-1} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}\cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\frac{ff'}{2}\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fa) = \mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-1} + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-1} + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{tang}\frac{ff'}{2}\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fb) = \mathrm{cotg}\, F'_{-1}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F_{-1}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$-\mathrm{tang}\frac{ff'}{2}\cos F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fg) = \mathrm{cotg}\, F'_2\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F + \mathrm{cotg}(ff')\cos F$	$\mathrm{cotg}\, F_2\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F + \mathrm{cotg}(ff')\cos F$	$\mathrm{cotg}\, F'_2$	$2\,\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F$	$2\,\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')$	$2\,\mathrm{cotg}\, F'_1$
$\mathrm{cotg}(fh') = -\mathrm{cotg}\, F'_{-2}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F + \mathrm{cotg}(ff')\cos F$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-2}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F + \mathrm{cotg}(ff')\cos F$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-2}$	$2\,\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F$	$2\,\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')$	$2\,\mathrm{cotg}\, F'_1$
$\mathrm{cotg}(fh) = \mathrm{cotg}\, F'\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_2 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_2$	$\mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_2 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_2$	$\mathrm{cotg}\, F' \sin F_2$	0	$\mathrm{cotg}(ff')\cos F_2$	$\mathrm{cotg}(ff')\cos F_2$	0
$\mathrm{cotg}(fg') = \mathrm{cotg}\, F'\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-2} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-2}$	$-\mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-2} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-2}$	$-\mathrm{cotg}\, F' \sin F_2$	0	$\mathrm{cotg}(ff')\cos F_2$	$\mathrm{cotg}(ff')\cos F_2$	0
$\mathrm{cotg}(fg_1) = \mathrm{cotg}\, F'_3\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F_3\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_3 \sin F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$[3\,\mathrm{cosec}(ff') + \mathrm{cotg}(ff')]\cos F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fh'_1) = -\mathrm{cotg}\, F'_{-3}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-1} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-3}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-1} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_3 \sin F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-1}$	$3\,\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_1$	$[3\,\mathrm{cosec}(ff') + \mathrm{cotg}(ff')]\cos F_1$	$3\,\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fh_1) = \mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$
$\mathrm{cotg}(fg'_1) = -\mathrm{cotg}\, F'_{-1}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-3} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-3}$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-1}\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_{-3} - \mathrm{cotg}(ff')\cos F_{-3}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-3}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff')\cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$
$\mathrm{cotg}\, C = [\mathrm{cotg}\, F' \sin(cf) - \mathrm{cotg}\, F \sin(cf')]\,\mathrm{cosec}(ff')$	0	$\mathrm{cotg}\, F' \sin(cf)$	$-\mathrm{cotg}\, F \cos(cf)$	0	0	0
$\mathrm{cotg}\, C_1 = [\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin(cf) - \mathrm{cotg}\, F_{-1} \sin(cf')]\,\mathrm{cosec}(ff')$	$\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\, F_1 - \mathrm{cotg}\, F_{-1})\sec\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F'_2 \sin(cf)$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-2} \cos(cf)$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin(cf')$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \sec\frac{ff'}{2}$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}\, C_{-1} = [\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin(cf) - \mathrm{cotg}\, F_1 \sin(cf')]\,\mathrm{cosec}(ff')$	$\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\, F_{-1} - \mathrm{cotg}\, F_1)\sec\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F'_{-2} \sin(cf)$	$-\mathrm{cotg}\, F_2 \cos(cf)$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin(cf')$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec\frac{ff'}{2}$	$-2\,\mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}\, E' = [\mathrm{cotg}\, F' \sin(e'f) + \mathrm{cotg}\, F \sin(e'f')]\,\mathrm{cosec}(ff')$	$\mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F' \sin(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F \cos(cf)$	0	0	0
$\mathrm{cotg}(E' - E'_1) = [\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin(e'f) + \mathrm{cotg}\, F_{-1} \sin(e'f')]\,\mathrm{cosec}(ff')$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F'_2 \sin(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F_2 \cos(cf)$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin(c'f')$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}(E'_{-1} - E') = [\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin(e'f) + \mathrm{cotg}\, F_{-1} \sin(e'f')]\,\mathrm{cosec}(ff')$	$\mathrm{cotg}\, F_{-1}\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-2} \sin(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F_2 \cos(cf)$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(ff')\sin(e'f')$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$2\,\mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}(ce) = \mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}(fc)\sin C + \mathrm{cotg}(fc)\cos C$	$\mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}(cf)\cos C$	$\mathrm{cotg}(cf)\cos C$	0	0	0
$\mathrm{cotg}(cd) = \mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}(fc)\sin C + \mathrm{cotg}(fc)\cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(cf)\sin C + \mathrm{cotg}(cf)\cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(cf)\sin C + \mathrm{cotg}(cf)\cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(cf)$
$\mathrm{cotg}(ee') = -\mathrm{cotg}\, F\,\mathrm{cosec}(fe')\sin E' + \mathrm{cotg}(fe')\cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F \sec\frac{(ff')}{2}\sin E' + \mathrm{tang}\frac{(ff')}{2}\cos E'$	$\mathrm{cotg}(cf)\cos C$	$\mathrm{cotg}(cf)\cos C$	0	0	0
$\mathrm{cotg}(ae') = -\mathrm{cotg}\, F_{-1}\,\mathrm{cosec}(fe')\sin E' + \mathrm{cotg}(fe')\cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-1} \sec\frac{(ff')}{2}\sin E' + \mathrm{tang}\frac{(ff')}{2}\cos E'$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(cf)\sin C + \mathrm{cotg}(cf)\cos C$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-1}\,\mathrm{cosec}(fc)\sin C + \mathrm{cotg}(fc)\cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(e'f)$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \sec\frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \sec(fc)$
$\mathrm{cotg}(be') = -\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(fe')\sin E' + \mathrm{cotg}(fe')\cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec\frac{(ff')}{2}\sin E' + \mathrm{tang}\frac{(ff')}{2}\cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(cf)\sin C + \mathrm{cotg}(cf)\cos C$	$-\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(fc)\sin C + \mathrm{cotg}(fc)\cos C$	$-\mathrm{cotg}\, F_1\,\mathrm{cosec}(e'f)$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec\frac{ff'}{2}$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec(cf)$
$\sin(E - E_1) = \sin(fc)\sin F \cdot \mathrm{cosec}(ce)$	$\sin\frac{(ff')}{2}\sin F\,\mathrm{cosec}(ce)$	$\sin(fc)\cdot\mathrm{cosec}(ce)$	$\sin(fc)\sin F\,\mathrm{cosec}(ce)$	$\sin(fc)$	$\sin\frac{(ff')}{2}$	$\sin(fc)$
$\sin(E_{-1} - E) = \sin(f'c)\sin F'\,\mathrm{cosec}(cc)$	$\sin\frac{(ff')}{2}\sin F \cdot \mathrm{cosec}(ce)$	$\cos(fc)\sin F'\,\mathrm{cosec}(cc)$	$\cos(fc)\,\mathrm{cosec}(ce)$	$\cos(fc)$	$\sin\frac{(ff')}{2}$	$\cos(fc)$

Die Tabelle der Formeln der sphärischen Tetragonometrie in Anwendung auf die Kristallographie.

Der dritte Fall. Die Grundfläche g und die komplementäre h.

Die Konstanten: Der Winkel (hg) und die Winkel G, G_1, H und H_1.

Trikline Syngonie	Monokline Syngonie $(G = H)$; $D = \frac{\pi}{2}$	Rhombische Syngonie $(G = H)$; $D = \frac{\pi}{2}$; $E = \frac{\pi}{2}$
$k = \frac{\operatorname{cotg} G_1 - \operatorname{cotg} G}{\operatorname{cotg} H_1 - \operatorname{cotg} H}$	1	1
$\sin(hd) = \sin(gd)/k$	$\sin(gd)$	$\sin(gd)$
$\operatorname{cotg}(hd) = \frac{k + \cos(gh)}{\sin(gh)}$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2}$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(gd) = \frac{1 + k \cos(gh)}{k \sin(gh)}$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2}$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(hc') = \frac{-k + \cos(gh)}{\sin(gh)}$	$-\operatorname{tang} \frac{gh}{2}$	$-\operatorname{tang} \frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(gc') = \frac{1 - k \cos(gh)}{k \sin(gh)}$	$\operatorname{tang} \frac{gh}{2}$	$\operatorname{tang} \frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(dc') = \frac{1 - k^2}{2k \sin(gh)}$	0	0
$\operatorname{cotg} G_{-1} = 2 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$	$2 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$	$2 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} G_3 = -2 \operatorname{cotg} G + 3 \operatorname{cotg} G_1$	$-2 \operatorname{cotg} G + 3 \operatorname{cotg} G_1$	$-2 \operatorname{cotg} G + 3 \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} G_{-3} = 4 \operatorname{cotg} G - 3 \operatorname{cotg} G_1$	$4 \operatorname{cotg} G - 3 \operatorname{cotg} G_1$	$4 \operatorname{cotg} G - 3 \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} G_{13} = \frac{1}{3}(4 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$	$\frac{1}{3}(4 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$	$\frac{1}{3}(4 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$
$\operatorname{cotg} G_5 = -4 \operatorname{cotg} G + 5 \operatorname{cotg} G_1$	$-4 \operatorname{cotg} G + 5 \operatorname{cotg} G_1$	$-4 \operatorname{cotg} G + 5 \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_{-1} = 2 \operatorname{cotg} H - \operatorname{cotg} H_1$	$2 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$	$2 \operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_3 = -2 \operatorname{cotg} H + 3 \operatorname{cotg} H_1$	$-2 \operatorname{cotg} G + 3 \operatorname{cotg} G_1$	$-2 \operatorname{cotg} G + 3 \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_3 = 4 \operatorname{cotg} H - 3 \operatorname{cotg} H_1$	$4 \operatorname{cotg} G - 3 \operatorname{cotg} G_1$	$4 \operatorname{cotg} G - 3 \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_5 = -4 \operatorname{cotg} H + 5 \operatorname{cotg} H_1$	$-4 \operatorname{cotg} G + 5 \operatorname{cotg} G_1$	$-4 \operatorname{cotg} G + 5 \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg}(ga) = -\operatorname{cotg} H_{-3} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_1 - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_1$	$-\operatorname{cotg} G_{-3} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_1 - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_1$	$-\operatorname{cotg} G_{-3} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_1 - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_1$
$\operatorname{cotg}(gb) = -\operatorname{cotg} H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-3} - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-3}$	$-\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-3} - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-3}$	$-\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-3} - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-3}$
$\operatorname{cotg}(gc) = \operatorname{cotg} H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_1 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_1$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2} \cos G_1$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2} \cos G_1$
$\operatorname{cotg}(gd') = \operatorname{cotg} H \operatorname{cosec}(gh) \sin G + \operatorname{cotg}(gh) \cos G$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2} \cos G$	$\operatorname{cotg} \frac{gh}{2} \cos G$
$\operatorname{cotg}(ge) = -\operatorname{cotg} H_{-1} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} - \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$	$-\operatorname{cotg} \frac{gh}{2} \cos G_{-1}$	$-\operatorname{cotg} \frac{gh}{2} \cos G_{-1}$
$\operatorname{cotg}(gf) = \operatorname{cotg} H_3 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_3 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_3 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$
$\operatorname{cotg}(gf') = \operatorname{cotg} H_{-1} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_3 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_3$	$\operatorname{cotg} G_{-1} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_3 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_3$	$\operatorname{cotg} G_{-1} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_3 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_3$
$\operatorname{cotg}(gg') = \frac{1}{2}[\operatorname{cotg}(ge) - \operatorname{cotg}(ga)]$	$\frac{1}{2}[\operatorname{cotg}(ge) - \operatorname{cotg}(ga)]$	$\operatorname{cotg}(2gc)$
$\operatorname{cotg}(gg_1) = 3 \operatorname{cotg}(ge) - 2 \operatorname{cotg}(gg')$	$3 \operatorname{cotg}(gc) - 2 \operatorname{cotg}(gg')$	$3 \operatorname{cotg}(gc) - 2 \operatorname{cotg}(gg')$
$\operatorname{cotg}(gg'_1) = \frac{1}{3}[\operatorname{cotg}(gc) + 2 \operatorname{cotg}(gg')]$	$\frac{1}{3}[\operatorname{cotg}(gc) + 2 \operatorname{cotg}(gg')]$	$\frac{1}{3}[\operatorname{cotg}(gc) + 2 \operatorname{cotg}(gg')]$
$\operatorname{cotg}(gh') = \operatorname{cotg} H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{-1}$
$\operatorname{cotg}(gh'_1) = \operatorname{cotg} H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{13} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{13}$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{13} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{13}$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{13} + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_{11}$
$\operatorname{cotg}(gh_1) = \operatorname{cotg} H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_5 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_5$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_5 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_5$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_5 + \operatorname{cotg}(gh) \cos G_5$
$\operatorname{cotg} D = [\operatorname{cotg} H_1 \sin(gd) - \operatorname{cotg} G_1 \sin(hd)] \operatorname{cosec}(gh)$	0	0
$\operatorname{cotg} D_1 = [\operatorname{cotg} H_5 \sin(gd) - \operatorname{cotg} G_1 \sin(hd)] \operatorname{cosec}(gh)$	$2(-\operatorname{cotg} G + \operatorname{cotg} G_1) \sec \frac{gh}{2}$	$2(-\operatorname{cotg} G + \operatorname{cotg} G_1)$
$\operatorname{cotg} D_{-1} = [\operatorname{cotg} H_1 \sin(gd) - \operatorname{cotg} G_5 \sin(hd)] \operatorname{cosec}(gh)$	$2(\operatorname{cotg} G \quad \operatorname{cotg} G_1) \sec \frac{gh}{2}$	$2(\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$
$\operatorname{cotg} E'_1 = -\operatorname{cotg} H_{-1} \sin(gc') - \operatorname{cotg} G_{-1} \sin(hc')] \operatorname{cosec}(gh)$	$-\operatorname{cotg} G_{-1} \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$	$-\operatorname{cotg} G_{-1} \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(E' - E'_1) = [\operatorname{cotg} H_1 \sin(gc') + \operatorname{cotg} G_1 \sin(hc')] \operatorname{cosec}(gh)$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$	$\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$
$\sin(E - E_1) = \sin(gd) \sin G_{-1} \operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1} \sin \frac{gh}{2} \operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1} \sin \frac{gh}{2} \operatorname{cosec}(de)$
$\sin(E_{-1} - E) = \sin(hd) \sin H_{-1} \operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1} \sin \frac{gh}{2} \operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1} \sin \frac{gh}{2} \operatorname{cosec}(de)$
$\operatorname{cotg}(c'a) = \operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(c'g) \sin E'_1 + \operatorname{cotg}(c'g) \cos E'_1$	$\operatorname{cotg} G_1 \sec \frac{gh}{2} \sin E'_1 + \operatorname{tang} \frac{gh}{2} \cos E'_1$	$\operatorname{cotg} G_1 \sec \frac{gh}{2} \sin E'_1 + \operatorname{tang} \frac{gh}{2} \cos E'_1$
$\operatorname{cotg}(c'c) = \operatorname{cotg} G_{-1} \operatorname{cosec}(c'g) \sin E'_1 + \operatorname{cotg}(c'g) \cos E'_1$	0	0
$\operatorname{cotg}(c'b) = 2 \operatorname{cotg}(c'c) - \operatorname{cotg}(c'a)$	$-\operatorname{cotg}(c'a)$	$-\operatorname{cotg}(c'a)$
$\operatorname{cotg}(de) = -\operatorname{cotg} G_{-1} \operatorname{cosec}(gd) \sin D - \operatorname{cotg}(gd) \cos D$	$\operatorname{cotg} E'_1$	$\operatorname{cotg} E'_1$
$\operatorname{cotg}(dc) = \operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gd) \sin D + \operatorname{cotg}(gd) \cos D$	$\operatorname{cotg}(E' - E'_1)$	$\operatorname{cotg}(E' - E'_1)$
$\operatorname{cotg}(dd') = \operatorname{cotg} G \operatorname{cosec}(gd) \sin D + \operatorname{cotg}(gd) \cos D$	$\operatorname{cotg}(E'_{-1} - E'_1)$	$\operatorname{cotg}(E'_{-1} - E'_1)$
$\operatorname{cotg}(c'c) = -\operatorname{cotg} G_1 \operatorname{cosec}(gc') \sin(E' - E'_1) + \operatorname{cotg}(gc') \cos(E' - E'_1)$	0	0

Über arithmetische Eigenschaften gewisser ganzer Funktionen.

Von **Georg Faber** in Straßburg i. E.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. November 1913.

Zu den folgenden Untersuchungen wurde ich durch eine Vorlesung geführt, die ich im Sommersemester 1912 „über klassische Probleme der Elementargeometrie“ hielt. Ich versuchte damals meinen Hörern die Transzendenz von π möglichst systematisch und ohne Kunstgriff zu beweisen. Von den üblichen Darstellungen befriedigte mich keine in dieser Hinsicht vollständig; ich lasse dahingestellt, inwieweit der Beweis, den ich im ersten Paragraphen mitteile und den man natürlich in einer Vorlesung anders auseinandersetzen wird, als es hier geschieht, jener Forderung entspricht. Jedenfalls hat er den Vorzug, daß die benützte Methode sich zur zahlentheoretischen Erforschung sehr vieler ganzer Funktionen verwerten läßt. Ich hatte dies damals an den Besselschen Funktionen als Beispiel näher ausgeführt und merkte erst nachträglich, daß Herr Stridsberg im 33. Bande der Acta mathematica 1910 auf anderem Wege zu den nämlichen und zu weiteren in der gleichen Richtung liegenden Ergebnissen gelangt war. Da aber mein Beweisverfahren viel einfacher und durchsichtiger, zugleich aber mindestens ebenso weittragend ist als das des Herrn Stridsberg, so dürfte die neue Herleitung der Stridsbergschen Sätze, die ich im zweiten und dritten Paragraphen gebe, vielen Mathematikern willkommen sein. Dabei verdanke ich gewisse Vereinfachungen in Einzelheiten meines ursprüng-

lichen Beweises dem nachträglichen Studium der Stridsbergschen Abhandlung.

Um die weitere Anwendbarkeit meiner Methoden darzutun, betrachte ich endlich in einem vierten Paragraphen über Herrn Stridsberg hinausgehend eine Klasse ganzer Funktionen, die schon Herr Perron[1]) auf ihre arithmetischen Eigenschaften hin untersucht hat; meine Ergebnisse sind viel allgemeiner als die des Herrn Perron.

§ 1.

Die Transzendenz von π.

Die algebraische Gleichung

(1) $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen sind, besitze die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Angenommen, eine dieser Wurzeln sei gleich π, dann wäre

(2) $$(1 + \cos x_1)(1 + \cos x_2) \cdots (1 + \cos x_n) = 0.$$

Die Unmöglichkeit dieser Gleichung soll nachgewiesen werden.

Ich denke mir die Produkte in (2) ausgeführt, so daß aus (2) die folgende Summe wird:

(3) $$1 + \Sigma \cos x_1 + \Sigma \cos x_1 \cos x_2 + \Sigma \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 + \cdots + \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_n = 0.$$

Die Σ bedeuten symmetrische Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alle cos-Produkte verwandle ich in Summen unter Bewahrung der Symmetrie in den $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z. B.:

(4) $$\cos x_1 \cos x_2 = \tfrac{1}{4}[\cos(x_1 + x_2) + \cos(-x_1 - x_2) + \cos(x_1 - x_2) + \cos(x_2 - x_1)]$$

$$\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 = \tfrac{1}{8}[\cos(x_1 + x_2 + x_3) + \cos(-x_1 - x_2 - x_3) + \cos(-x_1 + x_2 + x_3) + \cos(x_1 - x_2 - x_3) + \cos(x_1 - x_2 + x_3) + \cos(-x_1 + x_2 - x_3) + \cos(x_1 + x_2 - x_3) + \cos(-x_1 - x_2 + x_3)] \text{ usw.}$$

[1]) Math. Ann., Bd. 66 (1909), S. 482.

Auch schreibe ich $\Sigma \frac{1}{2} \cos x_1 + \Sigma \frac{1}{2} \cos(-x_1)$ statt $\Sigma \cos x_1$; multipliziert man dann noch (2) mit 2^n, so erhält man:

$$C_0 + \cos \zeta_1 + \cos \zeta_2 + \cdots + \cos \zeta_m = 0; \tag{5}$$

C_0 ist eine positive ganze Zahl, die ζ sind Aggregate der Form $\pm x_i \pm x_k \cdots \pm x_l$, sie sind selbstverständlich nicht alle voneinander verschieden; jede symmetrische Funktion von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ ist offenbar auch eine solche von $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ferner wurde durch die Umformung (4) erreicht, daß in (5) neben ζ_i und ebenso oft $-\zeta_i$ vorkommt. Die ζ sind daher Nullstellen einer geraden Funktion:

$$\varphi(\zeta) = A_0 \zeta^{2m} + A_1 \zeta^{2m-2} + \cdots + A_m \tag{6}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Man darf voraussetzen, daß keine dieser Nullstellen gleich Null ist; sonst hätte man nämlich in (5) alle Summanden $\cos \zeta_i$ mit Argumenten $\zeta_i = 0$ vorher mit der ganzen Zahl C_0 vereinigen können, die darnach mindestens gleich 2^n ist.

Es handelt sich nun darum, für $\cos \zeta_1, \cos \zeta_2, \ldots, \cos \zeta_m$ geeignete Näherungswerte zu finden. Ist $g(\zeta)$ irgend ein nur gerade Potenzen enthaltendes Polynom

$$g(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta^2 + c_2 \zeta^4 + \cdots, \tag{7}$$

so verstehe man unter $\overline{g}(\zeta)$ die Majorante

$$|c_0| + |c_1| \zeta^2 + |c_2| \zeta^4 + \cdots \tag{8}$$

und unter $G(\zeta)$ das Polynom

$$g(\zeta) - g''(\zeta) + g^{(\mathrm{IV})}(\zeta) - g^{(\mathrm{VI})}(\zeta) + - \cdots, \tag{9}$$

bis diese Reihe von selbst abbricht. Dann ist

$$G(0) \cos \zeta = G(\zeta) + \Theta \cdot \overline{g}(\zeta). \tag{10}$$

Unter Θ wird hier, wie stets im folgenden, eine Zahl verstanden (nicht jedesmal die nämliche), deren absoluter Betrag für alle $|\zeta| < k$ kleiner als e^k bleibt, also:

$$|\Theta| < e^k \quad \text{für} \quad |\zeta| < k. \tag{10'}$$

Für $g(\zeta) = \zeta^{2h}$ ist Gleichung (10) unmittelbar klar; denn $G(\zeta)$ ist dann

$$= (-1)^h (2h)! \left(1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + - \cdots + (-1)^h \frac{\zeta^{2h}}{(2h)!}\right);$$

da aber die Operation, durch die $G(\zeta)$ aus $g(\zeta)$ gebildet wird, dem distributiven Gesetze gehorcht, wonach aus

$$g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta) \quad \text{auch} \quad G(\zeta) = G_1(\zeta) + G_2(\zeta)$$

folgt, gilt (10) allgemein.

Man wähle für $g(\zeta)$ das folgende Polynom:

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^{2\lambda} (\varphi(\zeta))^{2\lambda+1} \cdot A_0^{2\lambda m + m - 1}}{(2\lambda)!}, \tag{11}$$

multipliziere (5) mit $G(0)$ und ersetze vermöge (10)

$$G(0) \cos(\zeta_i) \quad \text{durch} \quad G(\zeta_i) + \Theta \bar{g}(\zeta_i):$$

so erhält man

$$C_0 G(0) + \sum_1^m{}^i G(\zeta_i) + \Theta \sum_1^m{}^i \bar{g}(\zeta_i) = 0, \tag{12}$$

wo

$$|\Theta| < e^k, \tag{12'}$$

falls k die größte der Zahlen $|\zeta_i|$ ist.

Die folgenden Schlüsse sind einfach und bekannt: Es sind offenbar sowohl $C_0 G(0)$ als auch $\sum_1^m{}^i G(\zeta_i)$ ganze Zahlen, $\Theta \sum_1^m{}^i \bar{g}(\zeta_i)$ wird mit wachsendem λ beliebig klein, mithin Null; $\sum_1^m{}^i G(\zeta_i)$ ist durch $2\lambda + 1$ teilbar, $C_0 G(0)$ ist (mod $2\lambda + 1$)

$$\equiv (-1)^\lambda (\varphi(0))^{2\lambda+1} A_0^{2\lambda m + m - 1},$$

also bei passender Wahl von λ nicht durch $(2\lambda + 1)$ teilbar: die Gleichung (12) und somit die angenommene Gleichung (1) für π sind unmöglich.

§ 2.

Arithmetische Eigenschaften der Besselschen und verwandter ganzer Funktionen.

Es sei jetzt die Differentialgleichung

$$(13)\quad b_m x^m \frac{d^{m+1} y}{d x^{m+1}} + b_{m-1} x^{m-1} \frac{d^m y}{d x^m} + \cdots + b_0 \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (b_m \neq 0)$$

vorgelegt, von der die der Besselschen Funktionen ein ganz spezieller Fall ist. Versteht man unter $f(\nu)$ das Polynom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(14)\quad f(\nu) = b_0 \nu + b_1 \nu (\nu - 1) + \cdots + b_m \nu (\nu - 1) \ldots (\nu - m)$$

und setzt man voraus, daß $f(\nu)$ keine positiven ganzzahligen Nullstellen besitzt, so genügt der Differentialgleichung (13) offenbar die ganze transzendente Funktion

$V(x)$ oder ausführlicher geschrieben

$$(15)\quad \begin{aligned} V(x, b_0, b_1, \ldots, b_m) = 1 + \frac{x}{f(1)} + \frac{x^2}{f(1) f(2)} + \cdots \\ + \frac{x^\nu}{f(1) \cdot f(2) \ldots f(\nu)} + \cdots. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß $b_0, b_1, \ldots, b_m, x_0, x_1, \ldots, x_n$, ferner $C_0, C_1, \ldots, C_n$ rationale Zahlen sind, soll eine Beziehung der Form

$$(16)\quad C_0 V(x_0) + C_1 V(x_1) + \cdots + C_n V(x_n) = 0$$

als unmöglich nachgewiesen werden, es sei denn daß $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ ist.

Wegen der Funktionalgleichung

$$(17)\quad V(a x, a b_0, a b_1, \ldots, a b_m) = V(x, b_0, b_1, \ldots, b_m)$$

genügt es beim Beweise, die b, x als ganze Zahlen vorauszusetzen; die C können selbstverständlich ebenso gut ganzzahlig wie rational vorausgesetzt werden; ich verstehe daher im folgenden unter den b, x, C stets ganze Zahlen.

Ist $g(x)$ irgend ein Polynom

$$g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

so verstehe man unter $\bar{g}(x)$ die Majorante

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \cdots$$

und unter $Op\,g(x)$ das Polynom, das durch die folgende Differentialoperation aus $g(x)$ hervorgeht[1]):

$$(18) \quad Op\,g(x) = b_0 g'(x) + b_1 x g''(x) + \cdots + b_m x^m g^{(m+1)}(x).$$

Statt $Op(Op\,g(x))$ schreibe ich kürzer $Op^2 g(x)$ usf.; ferner setze ich

$$(19) \quad G(x) = g(x) + Op\,g(x) + Op^2 g(x) + Op^3 g(x) + \cdots,$$

bis die Reihe von selbst abbricht. Dann gilt entsprechend der Gleichung (10) des vorigen Paragraphen mit genau der nämlichen Begründung wie dort:

$$(20) \qquad G(0)V(x) = G(x) + \Theta \bar{g}(x).$$

Man wähle speziell für $g(x)$ das Polynom

$$(21) \qquad g_{\lambda p}(x) = \frac{(x - x_0)^\lambda \prod_1^n{}^i (x - x_i)^p}{\lambda!},$$

wo $x_0 \neq 0$, p eine Primzahl und λ eine der $(m + 1)$ Zahlen $p-1, p-2, \ldots, p-m-1$ sein soll. Man bilde nach (19) die zugehörige Funktion $G_{\lambda p}(x)$; multipliziert man dann (16) mit $G_{\lambda p}(0)$ und ersetzt man $G_{\lambda p}(0) \cdot V(x_k)$ durch $G_{\lambda p}(x_k) + \Theta \bar{g}_{\lambda p}(x_k)$, so werden alle Summanden $C_k G_{\lambda p}(x_k)$ ganze Zahlen und für $k = 1, 2, \ldots, n$ durch p teilbar, während das Restglied

$$\Theta \sum_1^n{}^k \bar{g}_{\lambda p}(x_k)$$

bei hinreichend großem p beliebig klein, also Null wird. Um die Unmöglichkeit der Beziehung (16) nachzuweisen, genügt

[1]) Im vorigen Paragraphen war $Op\,g(x)$ einfach $-g''(x)$.

es also zu zeigen, daß $C_0 G_{\lambda p}(x_0)$ für mindestens einen der obigen Werte λ nicht durch p teilbar ist.

Ich setze zur Abkürzung noch $(x - x_0)^\lambda = g_\lambda(x)$; wäre nun $C_0 G_{\lambda p}(x_0)$ durch p teilbar für $\lambda = p-1, p-2, p-m-1$, so wäre offenbar auch, falls nur $p > |C_0(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)|$ gewählt wurde:

$$(22) \quad G_\lambda(x_0) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p) \text{ für } \lambda = p-1,\ p-2, \dots, p-m-1;$$
$$(\lambda \text{ sei} \geqq m+1).$$

Nun ist nach (18) und (19), wenn man noch auf der rechten Seite von (18) die Faktoren $x, x^2, \dots, x^m$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt denkt,

$$(23) \quad O p g_\lambda(x) = c_1 g_{\lambda-1}(x) + c_2 g_{\lambda-2}(x) + \cdots + c_{m+1} g_{\lambda-m-1}(x),$$

also

$$(23') \quad G_\lambda(x) = g_\lambda(x) + c_1 G_{\lambda-1}(x) + c_2 G_{\lambda-2}(x) \cdots + c_{m+1} G_{\lambda-m-1}(x)$$

und

$$(24) \quad G_\lambda(x_0) = c_1 G_{\lambda-1}(x_0) + c_2 G_{\lambda-2}(x_0) + \cdots + c_{m+1} G_{\lambda-m-1}(x_0),$$

wo die $c_1, \dots, c_{m+1}$ ganze Zahlen sind und insbesondere

$$c_{m+1} = b_m x_0^m \lambda(\lambda-1), \dots, (\lambda - m) \qquad \text{ist.}$$

Wenn also für $m+1$ aufeinanderfolgende und unterhalb p liegende Werte

$$\mu = \lambda,\ \lambda - 1, \dots, \lambda - m$$

$G_\mu(x_0) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ ausfällt, so geht auch $G_{\lambda-m-1}(x_0)$ durch p auf, sobald nur p so groß gewählt ist, daß weder b_m noch x_0 durch p teilbar ist; hieraus und aus der Voraussetzung (22) schließt man nacheinander

$$(25) \quad G_{p-m-2}(x_0) \equiv 0,\ G_{p-m-3}(x_0) \equiv 0, \dots, G_0(x_0) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p).$$

Die letzte dieser Kongruenzen ist widersinnig, da $G_0(x)$ identisch $= 1$ ist.

Damit ist Gleichung (16) als unmöglich nachgewiesen.

Ohne die geringste weitere Schwierigkeit beweist man diejenige allgemeinere Beziehung, die aus (16) hervorgeht, wenn

man (für $k=1, 2, \ldots, n$) $V(x_k)$ durch $V(x_{k1}) + V(x_{k2}) + \cdots + V(x_{kl_k})$ ersetzt, wobei $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kl_k}$ die l_k Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten bedeuten.

Eine zweite Verallgemeinerung ist ebenfalls leicht anzubringen, auch kombiniert mit der soeben angegebenen; sie besteht darin, den Summanden $C_k V(x_k)$ durch die Summe

$$W_k = C_{k0} V(x_k) + C_{k1} V'(x_k) + C_{k2} V''(x_k) + \cdots + C_{k\,m+1} V^{(m+1)}(x_k)$$

zu ersetzen; die Behauptung lautet dann erstens, daß eine derartige Summe $\sum_1^n {}^k W_k$ nur dann gleich Null sein kann, wenn jeder einzelne Summand W_k gleich Null ist und zweitens[1]), daß für $x_k \neq 0$ dies nur möglich ist, wenn $C_{k\,l+1} = -b_k x_k^l C_{k0}$ ist für $l = 0, 1, \ldots, m$, m. a. W., wenn die Gleichung $W_k = 0$ nichts anderes aussagt als die Differentialgleichung selbst für $x = x_k$, während für $x_k = 0$ selbstverständlich die Bedingung

$$C_{k0} + \frac{C_{k1}}{f(1)} + \frac{2!\,C_{k2}}{f(1)f(2)} + \cdots \frac{(m+1)!\,C_{k\,m+1}}{f(1)f(2)\ldots f(m+1)} = 0$$

notwendig und hinreichend ist.

Setzt man nämlich wieder

$$y_{\lambda p}(x) = \frac{(x-x_0)^\lambda \prod_1^n {}^i (x-x_i)^p}{\lambda!},$$

---

[1]) Dieser Teil des Satzes war schon vor dem Erscheinen der Stridsbergschen Abhandlung von Herrn Perron bewiesen worden (Math. Ann., Bd. 66 (1909), S. 484; vgl. auch § 4 der vorliegenden Arbeit). Herr Perron gibt dem Satze folgende abweichende, aber völlig gleichwertige Formulierung: Eine Relation $C_0 V(x_0) + C_1 V'(x_0) \cdots + C_m V^{(m)}(x_0)$ ist bei rationalem x_0 nur dann möglich, wenn $C_0 = C_1 = \ldots C_m = 0$ ist. Nach der im Text befolgten Methode beweist man die Perronsche Fassung des Satzes fast noch einfacher als die Stridsbergsche: da C_{m+1} von vornherein gleich Null angenommen ist, ergibt sich die Richtigkeit der Gleichung (26) $\Gamma_\lambda(x_0) = 0$ auch für $\lambda = 0$. $\Gamma_0(x_0) = 0$ besagt aber $C_0 = 0$, sodann folgt aus $\Gamma_1(x_0) = 0$, daß $C_1 = 0$ ist usw.

so sieht man ohne weiteres ein, daß nicht nur $G(0)V(x)$ durch $G(x)$, sondern auch die Ableitungen $G(0)V^{(\mu)}(x)$ durch $G^{(\mu)}(x)$ — $\mu \leq m+1$ — mit der für die Zwecke des vorliegenden Beweises genügenden Annäherung approximiert werden, ferner daß

$$C_{k0}G_{\lambda p}(x_k) + C_{k1}G'_{\lambda p}(x_k) + \cdots + C_{k\,m+1}G^{(m+1)}_{\lambda p}(x_k)$$

für $k > 0$ eine durch p teilbare ganze Zahl ist. Man schließt wieder, daß dann auch

$$C_{00}G_{\lambda p}(x_0) + C_{01}G'_{\lambda p}(x_0) + \cdots + C_{0\,m+1}G^{(m+1)}_{\lambda p}(x_0)$$

durch p teilbar wäre für

$$\lambda = p-1,\ p-2, \ldots, p-m-1;$$

bezeichnet man mit $\Gamma_\lambda(x)$, was aus

$$C_{00}G(x) + C_{01}G'(x) + \cdots + C_{0\,m+1}G^{(m+1)}(x)$$

wird, wenn man $g(x) = (x-x_0)^\lambda$ zu Grunde legt, so folgt aus den Rekursionsformeln (23) und (24), die ebenso für $\Gamma_\lambda(x)$ wie für $G_\lambda(x)$ gelten, daß $\Gamma_\lambda(x_0)$, wenn $\lambda > 1$ ist, durch p teilbar ist und da p noch unendlich viele Werte annehmen kann, muß

(26) $$\Gamma_\lambda(x_0) = 0 \text{ sein für } \lambda > 1;$$

insbesondere sind $\Gamma_1(x_0) = 0$, $\Gamma_2(x_0) = 0 \ldots \Gamma_{m+1}(x_0) = 0$ $m+1$ lineare homogene Gleichungen zur Bestimmung der $m+1$ Verhältnisse $C_{kl} : C_{k0}$ $(l = 1, 2, \ldots, m+1)$, die dadurch vollständig bestimmt sind; denn die erste dieser Gleichungen enthält nur C_{00}, C_{01}, die zweite nur C_{00}, C_{01}, C_{02} usw.; das sich durch Auflösung jener Gleichungen eindeutig ergebende Lösungssystem muß also mit dem von vornherein bekannten System $C_{0\,l+1} = -b_l x_0^l C_{00}$ identisch sein. (Man kann dies natürlich unschwer durch explizite Aufstellung und Auflösung der Gleichungen (26) verifizieren; man verfährt zu dem Zwecke am einfachsten so: wenn man $g_\lambda(x) = x^\lambda$ statt $= (x-x_0)^\lambda$ setzt, so folgt aus (26) für die neuen Funktionen $\Gamma_\lambda(x)$

(26) $$\Gamma_\lambda(x_0) = C_{00}x_0^\lambda.$$

Die Rekursionsformel (23') lautet für $x_0 = 0$ einfach

$$G_\lambda(x) = x^\lambda + f(\lambda)\, G_{\lambda-1}(x)$$

und ihr entspricht nun die folgende aus ihr hervorgehende Formel für $\Gamma_\lambda(x)$ — $\lambda \geq 1$ —

$$(27)\quad \begin{aligned} \Gamma_\lambda(x) &= C_{00}\, x^\lambda + C_{01}\, \lambda\, x^{\lambda-1} + \cdots \\ &+ C_{0\,m+1}\, \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m)\, x^{\lambda-m} + f(\lambda)\, \Gamma_{\lambda-1}(x). \end{aligned}$$

Auf Grund von (26) folgt daraus:

$$C_{01}\, x_0^{\lambda-1}\, \lambda + \cdots C_{0\,m+1}\, x_0^{\lambda-m}\, \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m) = -C_{00}\, f(\lambda)\, x_0^{\lambda-1}.$$

Und hieraus ergibt sich zunächst für $\lambda = 1$

$$C_{01} = -b_0\, C_{00},$$

sodann durch den Schluß von λ auf $\lambda+1$

$$C_{0\,\lambda+1} = -b_\lambda\, x_0^\lambda\, C_{00}.)$$

§ 3.

Ausdehnung der Ergebnisse auf eine andere Klasse ganzer Funktionen.

In diesem Paragraphen betrachte ich nach dem Vorgang des Herrn Stridsberg noch eine andere Klasse ganzer Funktionen: unter $f(\nu)$ verstehe ich wieder die Funktion (24) und setze:

$$(28)\quad \begin{aligned} U(x) &= 1 + \frac{x}{f(1)+a} + \cdots \\ &+ \frac{x^\nu}{(f(1)+a)(f(2)+a)\ldots(f(\nu)+a)} + \cdots. \end{aligned}$$

a ist eine von Null verschiedene ganze Zahl; die Funktion $f(\nu) + a$ soll keine positive ganzzahlige Nullstelle, dagegen einen Faktor $c\nu + b$ besitzen, wo c und b teilerfremde ganze Zahlen sind. Dadurch wird erreicht — und dies ist der einzige Zweck dieser Voraussetzung —, daß

$$(29)\qquad c^\nu (f(1)+a)(f(2)+a)\ldots(f(\nu)+a)$$

durch $\nu!$ teilbar ist.

Die Funktion $U(x)$ genügt der Differentialgleichung

(29)
$$b_m x^m \frac{d^{(m+1)} y}{d x^{m+1}} + b_{m-1} x^{m-1} \frac{d^m y}{d x^m} + \cdots + b_{00} \frac{d y}{d x} + a \frac{y-1}{x} - y = 0 .$$

Setzt man jetzt, wenn wieder $g(x)$ irgend ein Polynom ist,

(30)
$$Op\, g(x) = b_0 g'(x) + b_1 x g''(x) + \cdots + b_m x^m g^{(m+1)}(x) + a \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

und

(31)
$$G(x) = g(x) + Op\, g(x) + Op'\, g(x) + \cdots,$$

so wird

(32)
$$G(0) \cdot U(x) = G(x) + \Theta g(x).$$

Wie $G(x)$ aus $g(x)$, so entsteht $\Gamma(x)$ aus dem Polynome $\gamma(x)$ usw. Setzt man

(33)
$$\gamma_{\lambda\mu}(x) = x^\lambda (x - x_0)^\mu - \lambda \geqq 0, \quad \mu \geqq 0, \quad x_0 \neq 0 -,$$

so ist nach (30):

(34)
$$Op\, \gamma_{\lambda\mu}(x) = (f(\lambda) + a)\, \gamma_{\lambda-1\, \mu}(x) + \sum_1^{m+1}{}^{\nu} c_\nu\, \gamma_{\lambda-1+\nu\, \mu-\nu}(x)$$

(die c_0 sind ganze Zahlen, speziell $c_{m+1} = b_m \mu(\mu-1)\ldots(\mu-m)$ und $c_\nu = 0$ für alle $\nu > \mu$), ferner

(35)
$$\Gamma_{\lambda\mu}(x) = \gamma_{\lambda\mu}(x) + (f(\lambda) + a)\, \Gamma_{\lambda-1\, \mu}(x) + \sum_1^{m+1}{}^{\nu} c_\nu\, \Gamma_{\lambda-1+\nu\, \mu-\nu}(x),$$

endlich

(36)
$$\Gamma_{\lambda\mu}(x_0) = (f(\lambda) + a)\, \Gamma_{\lambda-1\, \mu}(x_0) + \sum_1^{m+1}{}^{\nu} c_\nu\, \Gamma_{\lambda-1+\nu\, \mu-\nu}(x_0).$$

$\Gamma_{\lambda\mu}(x)$ setzt sich mithin linear mit ganzzahligen Koeffizienten aus den Funktionen

(37)
$$\Gamma_{\lambda-1+\nu\, \mu-\nu}(x_0)\, (\nu = 0, 1, \ldots, m+1)$$

zusammen.

Die Summe der Indizes der Funktionen (37) ist $\lambda + \mu - 1$; der Koeffizient c_ν in (36) hat den Teiler $\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)$

herrührend von der $(\mu-\nu)$-maligen Differentiation des Faktors $(x-x_0)^\mu$ von $\gamma_{\lambda\mu}(x)$; führt man die Funktionen (37) in gleicher Weise auf solche mit einer Indizessumme $=\lambda+\mu-2$ usw. zurück, so erhält man für die ursprüngliche Funktion $\Gamma_{\lambda\mu}(x_0)$ lineare Ausdrücke der folgenden Art:

(38) $$\Gamma_{\lambda\mu}(x_0)=\Sigma c_{\lambda'\mu'}\Gamma_{\lambda'\mu'}(x_0), \text{ wo } \lambda'+\mu'=\lambda+\mu-k \text{ ist } \quad (k=1,2,\ldots).$$

Im Verlauf des Verfahrens wird es eintreten, daß einer der Indizes λ', μ' zu Null wird, während der andere noch >0 ist; wird zuerst $\lambda'=0$, so hat $\Gamma_{0\mu'}(x_0)$ in (38) einen Koeffizienten $c_{0\mu'}$, der offenbar durch

$$(f(\lambda)+a)\cdot(f(\lambda-1)+a)\ldots(f(1)+a)$$

teilbar ist; wird aber zuerst $\mu'=0$, so hat der zugehörige Koeffizient $c_{\lambda'0}$ nach dem vorhin Bemerkten den Teiler $\mu!$, herrührend von der μ-maligen Differentiation des Faktors $(x-x_0)^\mu$; daraus folgt mit Beachtung von (29) der

Hilfssatz: Ist ν sowohl $\leqq\lambda$ als auch $\leqq\mu$, so ist $c^\lambda\Gamma_{\lambda\mu}(x_0)$ durch $\nu!$ teilbar.

Angenommen nun, es existiere eine Relation

(39) $$C_0U(x_0)+C_1U(x_1)+\cdots+C_nU(x_n)=0 \text{ mit ganzen Zahlen } C_0,\ldots,C_n,\ x_0,\ldots,x_n;$$

dann setze man

$$g_{p\lambda}(x)=\frac{c^p(x-x_0)^\lambda x^p\prod_1^n{}^i(x-x_i)^p}{\lambda!}$$

(40) $$(x_0\neq 0;\ \lambda=p-1,\ p-2,\ldots,\ p-m-1;$$

$$p \text{ Primzahl } > |c\cdot C_0\cdot b_m\cdot x_0\cdot\prod_1^n{}^i(x_0-x_i)|).$$

Es folgt wie bisher, daß auch

(41) $$C_0G_{p\lambda}(x_0)+C_1G_{p\lambda}(x_1)+\cdots+C_nG_{p\lambda}(x_n)=0$$

sein müßte, und da

(42) $G_{p\lambda}(x_i) \equiv 0 \mod p$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n$

(für $x_i \neq 0$ nach dem Hilfssatze und für $x_i = 0$ wegen (29)), so müßte auch

(43) $G_{p\lambda}(x_0)$ durch p teilbar sein für $\lambda = p-1, p-2, \ldots, p-m-1$,

woraus folgt:

(44) $\Gamma_{p\mu}(x_0) \equiv 0 \mod p \quad$ für $\quad \mu > p-m-1$.

Da identisch

(45) $$\gamma_{p\,\mu+1}(x) = \gamma_{p+1\,\mu}(x) - x_0\gamma_{p\mu}(x),$$

also auch

(46) $$\Gamma_{p\,\mu+1}(x) = \Gamma_{p+1\,\mu}(x) - x_0\Gamma_{p\mu}(x),$$

so ergibt sich weiter

(47) $$\Gamma_{p+1\,\mu}(x_0) \equiv 0 \mod p \quad \text{für} \quad \mu > \mu',$$

falls für $\mu > \mu'$ $\Gamma_{p\mu}(x_0) \equiv 0 \mod p$ ist.

Wendet man nun auf die rechte Seite von (34) für $\lambda = p+1$ die Identität

(48) $$\gamma_{p+\nu\,\mu-\nu}(x) = x^\nu \gamma_{p\,\mu-\nu}(x)$$

an und entwickelt man hier den Faktor x^ν nach Potenzen von $(x-x_0)$, so gehen (34) und (36) in folgende Gleichungen über:

(49) $$Op\,\gamma_{p+1\,\mu}(x) = \sum_0^{m+1}{}^{\nu} d_\nu \gamma_{p\,\mu-\nu}(x)$$

$$(\mu > 0;\ d_\nu = 0 \text{ für } \nu > \mu),$$

(50) $$\Gamma_{p+1\,\mu}(x_0) = \sum_0^{m+1}{}^{\nu} d_\nu \Gamma_{p\,\mu-\nu}(x_0)$$

wo die Koeffizienten d_ν ganze Zahlen sind und insbesondere

(51) $$d_{m+1} = x_0^{m+1} b_m\, \mu(\mu-1)\ldots(\mu-m)$$

ist.

Da $\Gamma_{p+1\,\mu}(x_0)$ und $\Gamma_{p\mu}(x_0)$ für $\mu > p-m-1$ durch p teilbar wird, so folgt aus (50) für $\mu = p-1$, daß auch

(52) $$\Gamma_{p\,p-m-2}(x_0) \equiv 0 \mod p$$

und wegen (47)

(53) $$\Gamma_{p+1\,p-m-2}(x_0) \equiv 0 \bmod p$$

ist.

Dann aber ergibt sich aus (50) für $\mu = p - 2$

(54) $$\Gamma_{p\,p-m-3}(x_0) \equiv 0, \quad \Gamma_{p+1\,p-m-3}(x_0) \equiv 0 \bmod p;$$

usf., schließlich

(55) $$\Gamma_{p\,0}(x_0) \equiv 0. \quad \Gamma_{p+1\,0}(x_0) \equiv 0 \bmod p.$$

Nun ist aber nach Definition (vgl. (30), (31))

(56) $$\Gamma_{p+1\,0}(x) = x_0^{p+1} + (f(p+1) + a)\Gamma_{p\,0}(x_0);$$

aus (55) würde somit folgen

(57) $x_0^{p+1} \equiv 0 \bmod p$ entgegen der Voraussetzung $p > |x_0|$.

Damit ist die Unmöglichkeit einer Relation wie (39) dargetan.

Auch hier lassen sich die Verallgemeinerungen, von denen am Ende des zweiten Paragraphen die Rede war, ohne neue Schwierigkeit anbringen.

§ 4.

Weitere Verallgemeinerungen.

In diesem letzten Paragraphen betrachte ich die Differentialgleichung

(58) $$y = Q_0(x)y' + Q_1(x)y'' + \cdots + Q_m(x)y^{(m+1)},$$

wo $Q_i(x)$ ein Polynom höchstens i^{ten} Grades ist, nur $Q_m(x)$ soll genau vom m^{ten} Grade sein:

(59) $$Q_m^{(m)}(0) \neq 0.$$

Die ganz spezielle Annahme $Q_i(x) = b_i x^i$ führt zu der Differentialgleichung (13) des zweiten Paragraphen zurück. Die Koeffizienten der Polynome $Q_i(x)$ werden wieder rational vorausgesetzt; ich beweise dann folgenden Satz:

Erstens: Es gibt eine bis auf einen Faktor bestimmte ganze transzendente Funktion $V(x)$, die der Differentialgleichung (58) genügt.

Zweitens: Sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$; $C_{00}, C_{01}, \ldots, C_{0\,m+1}, \ldots, C_{n\,0}, C_{n\,1}, \ldots, C_{n\,m+1}$ rationale Zahlen und ist außerdem $Q_m(x_i) \neq 0 \; (i = 0, 1, \ldots, n)$, so ist eine Relation der Form

(60) $$\sum_1^n {}^k\, W_k = 0,$$

wo W_k soviel bedeutet wie

$$C_{k\,0}\, V(x_k) + C_{k\,1}\, V'(x_k) \ldots + C_{k\,m+1}\, V^{(m+1)}(x_k),$$

nur dann möglich, wenn jeder einzelne Summand

(61) $$W_k = 0$$

ist ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Drittens: Die Gleichung $W_k = 0$ erfordert, daß alle Koeffizienten $C_{k0}, C_{k1}, \ldots C_{k\,m+1}$ entweder gleich Null sind, oder daß sie die Proportion

(62) $$\begin{aligned} &C_{k\,0} : C_{k1} : C_{k\,2} : \ldots : C_{k\,m+1} \\ &= -1 : Q_1(x_k) : Q_2(x_k) : \ldots : Q_m(x_k) \end{aligned}$$

erfüllen; m. a. W.: die Relation $W_k = 0$ ist nur möglich, wenn sie sich aus der Differentialgleichung (58) für $x = x_k$ von selbst ergibt.

Den ersten und dritten dieser Sätze hat schon Herr Perron[1]) bewiesen; ich könnte mich für meinen allgemeineren Satz auf diese Resultate des Herrn Perron oder wenigstens auf die von ihm begründete Theorie der Jacobi-Ketten stützen, die bei ihm die Grundlage der weiteren Entwicklungen bildet. Ich ziehe es aber vor, den ganzen obigen Satz neu zu beweisen, einerseits weil dies kürzer und für den Leser bequemer ist als fortgesetzte Verweisungen, andererseits weil mir mein Verfahren auch für andere Probleme verwertbar erscheint.

---

[1]) A. a. O.: Math. Ann. Bd. 66 (1909), p. 482.

Im ganzen wird meine Methode wieder dieselbe sein wie in den vorhergehenden Paragraphen; nur an einer Stelle bedarf sie einer Ergänzung. Da sonst alle Schlüsse die nämlichen bleiben wie im zweiten Paragraphen, führe ich nur den Teil des Beweises näher aus, der neu hinzukommt, und dies ist einzig und allein der Nachweis, daß jene Funktion $V(x)$ existiert und daß sie in ähnlicher Weise wie die im zweiten Paragraphen so genannte Funktion durch Polynome approximiert werden kann.

Ich darf zur Vereinfachung der Bezeichnung annehmen, daß die Null nicht zu den Wurzeln der Gleichung $Q_m(x) = 0$ gehört; sonst ließe sich dies leicht durch die Substitution $x - x_0 | x$ mit rationalem x_0 erreichen, wobei die Form der Differentialgleichung (58) völlig ungeändert bleibt. Dies vorausgesetzt, vervollständige ich die Definition von $V(x)$ durch die Nebenbedingung $V(0) = 1$, die sich als möglich erweisen wird. (Für den zu beweisenden Satz an sich ist diese Vervollständigung der Definition von $V(x)$ offenbar unnötig; sie vereinfacht nur den Beweis.)

Auch setze ich die Koeffizienten der $Q_i(x)$ zunächst als ganze Zahlen voraus; hinterher läßt sich der Beweis sehr leicht auf den Fall rationaler Koeffizienten ausdehnen.

Wenn $g(x)$ irgend ein Polynom ist, verstehe ich unter $Op\,g(x)$ sowie unter $G(x)$ jetzt folgendes:

$$(63)\quad Op\,g(x) = Q_0(x)g'(x) + Q_1(x)g''(x) + \cdots + Q_m(x)g^{(m+1)}(x)$$

$$(64)\quad G(x) = g(x) + Op\,g(x) + Op^2 g(x) + \cdots,$$

bis die Reihe von selbst abbricht.

$G(x)$ genügt offenbar der Differentialgleichung

$$G(x) = g(x) + Op\,G(x)$$

oder anders geschrieben:

$$(65)\quad y - Q_0(x)y' - Q_1(x)y'' - \cdots - Q_m(x)y^{m+1} = g(x).$$

Unter $g_\nu(x)$ verstehe man soviel wie x^ν; es ergibt sich

$$(66)\qquad Opg_\nu(x) =$$

$$x^{\nu-1}\left(Q_0\nu + \frac{Q_1'(0)}{1}\nu(\nu-1) + \frac{Q_2''(0)}{2!}\nu(\nu-1)(\nu-2) + \cdots \frac{Q_m^{(m)}(0)}{m!}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m)\right)$$
$$+ x^{\nu-2}\left(Q_1(0)\nu(\nu-1) + \frac{Q_2'(0)}{1}\nu(\nu-1)(\nu-2) + \cdots + \frac{Q_m^{(m-1)}(0)}{m!}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m)\right)$$
$$+ \cdots + x^{\nu-m-1}Q_m(0)\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m),$$

was ich kürzer so schreibe:

$$(67)\qquad Opg_\nu(x) = x^{\nu-1}h_1(\nu) + x^{\nu-2}h_2(x) + \cdots + x^{\nu-m-1}h_{m+1}(\nu);$$

die Polynome $h_1(\nu)$ und $h_{m+1}(\nu)$ sind vom $(m+1)^{\text{ten}}$, die übrigen $h_i(\nu)$ höchstens vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade.

Aus (64) und (67) folgt

$$(68)\qquad \begin{aligned} G_\nu(x) = x^\nu + h_1(\nu)G_{\nu-1}(x) + h_2(\nu)G_{\nu-2}(x) + \cdots \\ + h_{m+1}(\nu)G_{\nu-m-1}(x). \end{aligned}$$

Bezeichnet man daher mit $B_k^{(\nu)}$ den Koeffizienten von x^k in $G_\nu(x)$, der eine ganze Zahl ist, so gilt für $k < \nu - 1$ die folgende von k unabhängige Rekursionsformel

$$(69)\qquad B_k^{(\nu)} = h_1(\nu)B_k^{(\nu-1)} + h_2(\nu)B_k^{(\nu-2)} + \cdots + h_{m+1}(\nu)B_k^{(\nu-m-1)}.$$

Man bemerke zunächst, daß $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\,|H^{-\nu}B_k^{(\nu)}| = \infty$ ist, bei beliebigem, aber konstant gehaltenem k und für jede noch so große von ν unabhängige Zahl H; denn einerseits sind die Zahlen $B_k^{(\nu)}$, wie ein Blick auf das Bildungsgesetz der Koeffizienten $h_l(\nu)$ lehrt, durch $\frac{\nu!}{k!}$ teilbar, andererseits können nicht $B_k^{(\nu)}, B_k^{(\nu-1)}, \ldots, B_k^{(\nu-m)}$ gleichzeitig Null sein, da sonst auch $B_k^{(\nu-m-1)}$ und schließlich $B_k^{(k)}$ Null wäre, während tatsächlich $B_k^{(k)} = 1$ ist. Somit ist es möglich zu jeder gegebenen positiven Zahl H Zahlen ν auf unendlich viele Weisen so zu wählen, daß

$$(70)\qquad |B_k^{(\nu)}H^{-\nu}| > |B_k^{(\nu-l)}H^{-\nu+l}|$$

ausfällt für $l = 1, 2, \ldots, \nu$.

Dann folgt aber aus (69)

$$(71)\quad \begin{aligned} &|B_k^{(\nu+1)} H^{-\nu-1}| \\ &> |B_k^{(\nu)} H^{-\nu}| \cdot |H^{-1} h_1(\nu+1)| \left[1 - \left|\frac{h_2(\nu+1)}{h_1(\nu+1)}\right| \frac{1}{H} - \cdots - \left|\frac{h_{m+1}(\nu+1)}{h_1(\nu+1)}\right| \frac{1}{H^m}\right]. \end{aligned}$$

Man kann sich von vornherein H so groß denken, daß für den gewählten Wert von ν und für alle größeren die eckige Klammer auf der rechten Seite von (71) $> \frac{1}{2}$ wird; zugleich darf man annehmen, daß für das gewählte ν und alle größeren $H^{-1} \cdot |h_1(\nu + 1)| \cdot \frac{1}{2} > 1$ ist.

Dann folgt aus (70) und (71) für $\lambda = 0, 1, 2 \ldots$

$$(72)\quad |B_k^{(\nu+\lambda+1)} H^{-\nu-\lambda-1}| > |B_k^{(\nu+\lambda)} H^{-\nu-\lambda}| \cdot \left|\frac{h_1(\nu + \lambda + 1)}{2H}\right|.$$

Multipliziert man die Ungleichungen (72) für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l = 1$ miteinander, so findet man

$$(73)\quad \begin{aligned} &|B_k^{(\nu+l)} H^{-\nu-l}| \\ &> |B_k^{(\nu)} H^{-\nu}| \frac{1}{(2H)^l} \cdot |h_1(\nu + 1) h_1(\nu + 2) \ldots h_1(\nu + l)|. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Ungleichung läßt sich auch so aussprechen:

Es gibt eine positive von Null verschiedene Zahl m der Art, daß für genügend großes λ

$$(74)\quad B_k^{(\lambda)} > m^\lambda h_1(r + 1) h_1(r + 2) \ldots h_1(\lambda)$$

ist; r hat hier nur konstant ganzzahlig > 0 und mindestens so groß zu sein, daß keiner der Faktoren $h_1(r+1)$, $h_1(r+2)$ usw. Null wird.

Die Ungleichung (74) läßt sich leicht zu dem viel präziseren Satze ausgestalten, daß der Grenzwert

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{B_k^{(\lambda)}}{h_1(r + 1) h_1(r + 2) \ldots h_1(\lambda)}$$

existiert und von Null verschieden ist.

Aus (74) folgt nämlich, da $h_1(\lambda)$ von der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung in λ ist, daß mit $0 < \varepsilon < 1$

(75)
$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{|B_k^{(\lambda)}|}{(\lambda!)^{1+\varepsilon}} = \infty$$
ist.

Es gibt also unendlich viele ν, für die

(76)
$$\frac{|B_k^{(\nu)}|}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} > \frac{|B_k^{(\nu-l)}|}{((\nu-l)!)^{1+\varepsilon}}$$
ist. $(l = 1, 2, \ldots\ldots \nu.)$

Dann folgt aber aus der Rekursionsformel (69)

(77)
$$\frac{B_k^{(\nu+1)}}{((\nu+1)!)^{1+\varepsilon}} = \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_1(\nu+1)}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}} (1+\varepsilon_\nu).$$

Hier ist:

(78)
$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu = & \frac{B_k^{(\nu-1)}}{((\nu-1)!)^{1+\varepsilon}} : \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{h_2(\nu+1)}{\nu^{1+\varepsilon} h_1(\nu+1)} \\ & + \frac{B_k^{(\nu-2)}}{((\nu-2)!)^{1+\varepsilon}} : \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_3(\nu+1)}{(\nu(\nu-1))^{1+\varepsilon} h_1(\nu+1)} + \cdots \\ & + \frac{B_k^{(\nu-m)}}{((\nu-m)!)^{1+\varepsilon}} : \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_{m+1}(\nu+1)}{(\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1))^{1+\varepsilon} h_1(\nu+1)} \end{aligned}$$

und man sieht wegen (76) leicht ein, daß eine Zahl $K > 0$ existiert derart, daß für den ins Auge gefaßten Wert k und für hinreichend große ν

(79)
$$|\varepsilon_\nu| < \frac{K}{\nu^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{2}$$
ist.

Gleichzeitig kann man sich in (77) ν so groß denken, daß $\frac{|h_1(\nu+1)|}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}} > 2$ ausfällt. Dann aber gilt für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

(80)
$$\frac{B_k^{(\nu+\lambda+1)}}{((\nu+\lambda+1)!)^{1+\varepsilon}} = \frac{B_k^{(\nu+\lambda)}}{((\nu+\lambda)!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_1(\nu+\lambda+1)}{(\nu+\lambda+1)^{1+\varepsilon}} (1+\varepsilon_{\nu+\lambda})$$
mit

(81)
$$|\varepsilon_{\nu+\lambda}| < \frac{K}{(\nu+\lambda)^{+\varepsilon 1}} < \frac{1}{2}.$$

Multipliziert man die Gleichungen (80) für $\lambda = 0, 1, \ldots, l-1$ miteinander, so folgt

$$(82) \qquad B_k^{(\nu+l)} = B_k^{(\nu)} h_1(\nu+1) h_2(\nu+2) \ldots h_1(\nu+l) \cdot (1+\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1}) \ldots (1+\varepsilon_{\nu+l-1}).$$

Da das unendliche Produkt $(1+\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1}) \ldots$ absolut konvergiert — sein Grenzwert heiße P —, so besagt (82) die behauptete Existenz des von Null verschiedenen Grenzwerts

$$(83) \qquad \lim_{l=\infty} \frac{B_k^{(\nu+l)}}{h_1(\nu+1) \ldots h_1(\nu+l)} = B_k^{(\nu)} \cdot P.$$

Wenn also i und k zwei beliebige, aber feste natürliche Zahlen sind, dann existiert der Grenzwert

$$(84) \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{B_k^{(\lambda)}}{B_i^{(\lambda)}}$$

und ist von Null verschieden.

Ich betrachte insbesondere die m Grenzwerte

$$(85) \qquad \beta_k = \lim_{\lambda=\infty} \frac{B_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}} \qquad - k = 1, 2, \ldots, m -$$

und beweise: es existiert eine positive Zahl L' derart, daß für $L > L'$

$$(86) \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{\beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}}{L^\lambda} = 0$$

wird. ($k = 1, 2, \ldots, m$.)

Da $B_0^{(\lambda)}$ nach (83) von der Größenordnung $(\lambda!)^{m+1}$ ist, besagt (86) natürlich viel mehr wie (85).

Wäre (86) nicht richtig, so wäre für jede positive Zahl G

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{\beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}}{G^\lambda} = \infty.$$

Da aber die Zahlen $D_k^{(\lambda)} = \beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}$ ganz wie die B_k^λ dem Rekursionsgesetze (69) gehorchen, könnte man die Relationen (74), (83) für $D_k^{(\lambda)}$ an Stelle von $B_k^{(\lambda)}$ genau so ableiten

wie es vorhin geschehen ist, und man käme zu dem Resultate, daß ein endlicher von Null verschiedener Grenzwert

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{D_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}} = \beta_k - \frac{B_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}}$$

existiert, während tatsächlich dieser Grenzwert (s. (85)) gleich Null ist.

Man kann, indem man falls nötig die obige Zahl L' vergrößert, (86) auch so formulieren:

Es existiert eine von λ unabhängige Zahl L' derart, daß für $L > L'$

(87) $$|\beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}| < L^\lambda$$

wird für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, m$.

Es wird behauptet: Die Ungleichung (87) gilt auch für $k = m+1, m+2, \ldots, \lambda$ unter dem Vorbehalt einer abermaligen (von λ unabhängigen) Vergrößerung der Zahl L'.

Die Differentialgleichung

$$y = x^\nu + Q_0 y' + Q_1(x) y'' + \cdots + Q_m(x) y^{(m+1)},$$

der $G_\nu(x)$ genügt, liefert folgende Rekursionsformeln für die Koeffizienten $B_k^{(\nu)}$:

(88) $$B_k^{(\nu)} = \frac{-1}{h_{m+1}(k)} [B_{k-1}^{(\nu)} h_m(k-1) + B_{k-2}^{(\nu)} h_{m-1}(k-2) + \cdots + B_{k-m}^{(\nu)} h_1(k-m) - B_{k-m-1}^{(\nu)}] \qquad (m+1 < k < \nu);$$

für $k = \nu$ liefert diese Formel nicht $B_\nu^{(\nu)}$, sondern $B_\nu^{(\nu)} - 1$.

Die Koeffizienten der rechten Seite von (88), nämlich

$$\frac{h_{m-i}(k-i-1)}{h_{m+1}(k)} \, (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1) \quad \text{und} \quad \frac{-1}{h_{m+1}(k)}$$

bleiben ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke S, die von k und ν unabhängig ist.

Die Zahlen β_k als Grenzwerte der $\dfrac{B_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}}$ genügen ebenfalls den Rekursionsformeln (88):

$$(89)\qquad \beta_k = \frac{-1}{h_{m+1}(k)}\left[\beta_{k-1}\, h_m(k-1) + \beta_{k-2}\, h_{m-1}(k-2) + \cdots + \beta_{k-m}\, h_1(k-m) - \beta_{k-m-1}\right].$$

Wenn man hier auf der rechten Seite für jedes β_{k-i} den Näherungsausdruck $\frac{B^{(\nu)}_{k-i}}{B^{(\nu)}_0}$ einsetzt, und wenn man mit η_k das Maximum der Differenzen

$$\left|\beta_{k-i} - \frac{B^{(\nu)}_{k-i}}{B^{(\nu)}_0}\right| \quad - i = 1, 2, \ldots k -$$

bezeichnet, so wird der Fehler der linken Seite, d. h. die Differenz

$$(90)\qquad \left|\beta_k - \frac{B^{(\nu)}_k}{B^{(\nu)}_0}\right| < \eta_k (m+1) S,$$

also jedenfalls

$$\leqq \eta_k \cdot R,$$

wenn R sowohl $> (m+1) S$, als auch > 1 ist.

η_m ist, wie bewiesen, $< \frac{L^\nu}{|B^{(\nu)}_0|}$, also

$$(91)\qquad \begin{gathered} \eta_{m+1} < \frac{R \cdot L^\nu}{|B^{(\nu)}_0|}, \quad \eta_{m+2} < \frac{R^2 L^\nu}{|B^\nu_0|} \cdots, \text{ endlich} \\ \eta_{\nu-1} < \frac{R^{\nu-m-1} L^\nu}{|B^{(\nu)}_0|} \quad \text{und} \quad \eta_\nu < \frac{R^{\nu-m} L^\nu + 1}{|B^{(\nu)}_0|}, \end{gathered}$$

d. h. aber: sämtliche Differenzen $\left|\beta_k - \frac{B^{(\nu)}_k}{B^{(\nu)}_0}\right|$ bleiben für $k = 1, 2, \ldots, \nu$ kleiner $\frac{(L')^\nu}{|B^{(\nu)}_0|}$, wo L' von ν unabhängig ist, w. z. b. w.

Insbesondere ist $|\beta_\nu| < \frac{(L')^\nu + 1}{|B^{(\nu)}_0|}$; denn $B^{(\nu)}_\nu$ ist $= 1$: erinnert man sich noch, daß $B^{(\nu)}_0$ von der Größenordnung $\frac{1}{(\nu!)^{m+1}}$ ist, so sieht man, daß die β_ν Koeffizienten einer ganzen

transzendenten Funktion sind. Da die β_ν sich außerdem durch die Rekursionsformeln (89) bestimmen, genügt diese Funktion der Differentialgleichung (58).

Die Existenz von $V(x)$ ist somit bewiesen. Ersetzt man $V(x)$ durch das Polynom $1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\nu x^\nu$, so begeht man nach dem soeben bewiesenen einen Fehler, der seinem absoluten Betrage nach $< \frac{T^\nu}{B_0^{(\nu)}} |x|^\nu e^{|x|}$ ist, wo jetzt unter T eine (zugleich im Hinblick auf das Folgende) passend gewählte, von ν unabhängige positive Zahl verstanden wird; andererseits ist die Differenz zwischen diesem Polynom und $\frac{1}{B_0^{(\nu)}} G_\nu(x)$ dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{T^\nu}{B_0^{(\nu)}}(1 + |x| + |x^2| + \cdots + |x^\nu|) < \frac{T^\nu(\nu+1)(|x|+1)^\nu}{B_0^\nu};$$

kurz man sieht, es gibt eine positive von ν unabhängige Zahl M derart, daß

$$(92) \qquad |G_\nu(0) V(x) - G_\nu(x)| < M^\nu(|x|+1)^\nu e^{|x|}$$

wird.

Ist endlich wieder $g(x)$ irgend ein Polynom und $G(x)$ das aus ihm durch die Operation (64) entstehende Polynom, so folgt wieder aus dem distributivem Gesetz, nach welchem $g(x) = g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x)$ auch $G(x) = G^{(1)}(x) + G^{(2)}(x)$ nach sich zieht, allgemein

$$(93) \qquad |G(0) V(x) - G(x)| < e^{|x|} g(M(|x|+1))$$

oder

$$(93') \qquad G(0) V(x) = G(x) + \Theta g(M(|x|+1)).$$

Diese Gleichung entspricht Gleichung (20) des zweiten Paragraphen und erfüllt für den Beweis genau den nämlichen Zweck, wiewohl jetzt die Annäherung von $G(x)$ an $G(0) \cdot V(x)$ oder wenigstens die Abschätzung dieser Annäherung eine etwas schlechtere ist.

Der zahlentheoretische Teil des Beweises kann sodann fast wörtlich wie im zweiten Paragraphen zu Ende geführt werden.

Da die Fassung der bewiesenen Sätze eine sehr allgemeine ist, erscheint es nicht überflüssig, spezielle Fälle besonders zu formulieren, z. B.: Wenn x_0 und x_1 irgend welche nicht notwendig voneinander verschiedene rationale Zahlen, aber keine Nullstellen von $Q_m(x)$ sind und wenn ferner μ, ν irgend welche positive Differentiationsindizes bedeuten (einschließlich der Null), dann ist der Quotient $\frac{V^{(\mu)}(x_0)}{V^{(\nu)}(x_1)}$ irrational (selbstverständlich abgesehen von der Kombination $\mu = \nu$, $x_0 = x_1$); auch Zähler und Nenner dieses Bruches sind einzeln irrational mit der einzigen Ausnahme, daß nach Definition $V(0) = 1$ ist.

Ein Satz über Dirichletsche Reihen.

Von **Harald Bohr.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. November 1913.

In der vorliegenden Abhandlung werde ich einen Satz über den funktionentheoretischen Charakter der durch eine Dirichletsche Reihe dargestellten Funktion beweisen. Dieser Satz, welcher sich auf den allgemeinen Typus Dirichletscher Reihen bezieht, d. h. auf die Reihe

$$f(s) = f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

wo

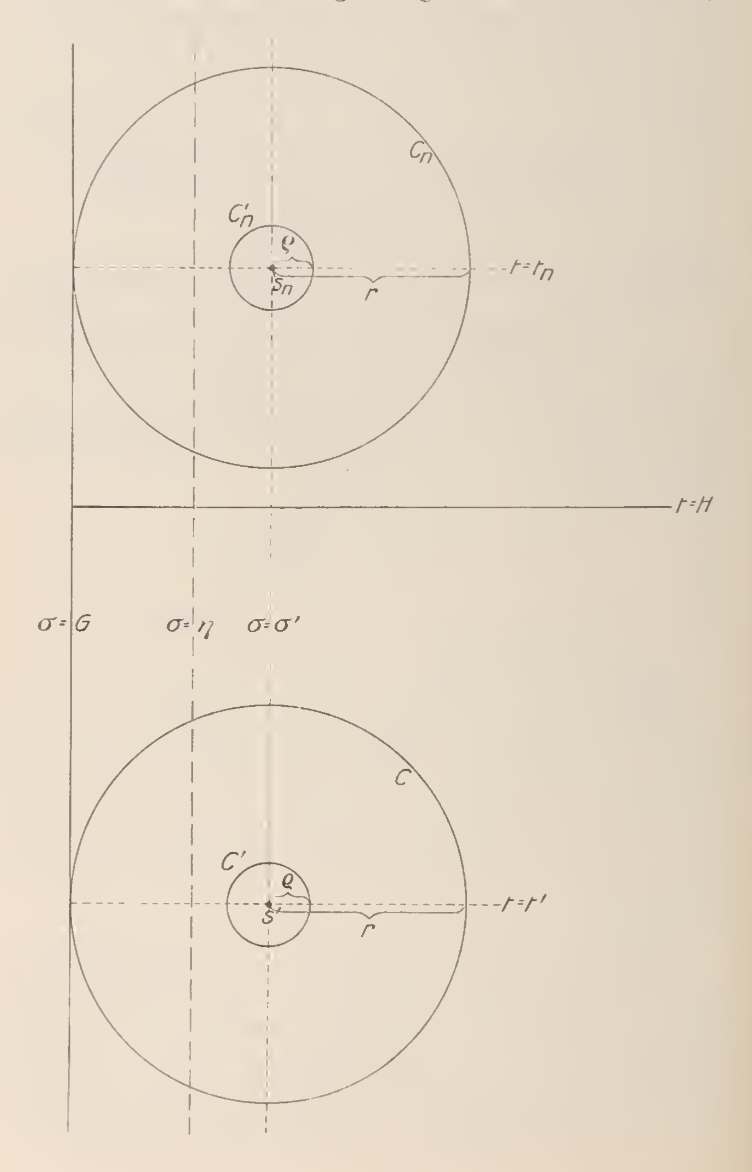
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim \lambda_n = \infty$$

ist, lautet folgendermaßen:

Satz: Es sei die Dirichletsche Reihe (1) in einer gewissen Halbebene absolut konvergent. Zwei reelle Zahlen G und H seien so beschaffen, daß die durch die Reihe (1) definierte Funktion $f(s)$ in der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ regulär und beschränkt ist. Dann ist $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > G$ regulär und beschränkt.

Beweis: Nach Voraussetzung ist ein η so vorhanden, daß (1) für $\sigma > \eta$ absolut konvergiert und somit für $\sigma > \eta$ eine reguläre beschränkte Funktion $f(s)$ darstellt. Ferner ist nach Voraussetzung $f(s)$ in der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ (wo G offenbar $< \eta$ angenommen werden darf, da der Satz im Falle $G \geq \eta$ trivial ist) regulär und dem Betrage nach $\leq K$, wo K

eine positive Konstante bezeichnet. Die Behauptung lautet: die Funktion $f(s)$ ist in der ganzen Halbebene $\sigma > G$ regulär und beschränkt: ich werde sogar zeigen, daß, für $\sigma > G$, $f(s)$



regulär und dem Betrage nach $\leqq K$ ist, wo K die obige Konstante bedeutet. Dies ist offenbar bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe, daß bei festen $\sigma' > \eta$, $t' < H$ die für $\sigma > \eta$ durch (1) definierte Funktion $f(s)$ innerhalb des (teilweise der Halbebene $\sigma > \eta$ angehörigen) Kreises C (siehe Figur) mit dem Mittelpunkte $s' = \sigma' + it'$ und dem Radius $r = \sigma' - G$ regulär und dem Betrage nach $\leqq K$ ist; denn zu jedem gegebenen Punkte s der Viertelebene $\sigma > G$, $t \leqq H$ können σ' und t' so gewählt werden, daß der Punkt s im Innern von C liegt. Es bezeichne C' den mit C konzentrischen Kreis, dessen Radius $\varrho = \frac{1}{2}(\sigma' - \eta)$ ist, und der somit ganz der Halbebene $\sigma > \eta$ angehört.

Ich werde zunächst die Existenz einer reellen Zahlenfolge $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ mit den beiden folgenden Eigenschaften beweisen:

1. Es ist für jedes $n \geqq 1$

$$t_n > H + r$$

(woraus folgt, daß das Innere des Kreises C_n mit dem Mittelpunkte $s_n = \sigma' + i t_n$ und dem Radius r ganz der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ angehört).

2. Wenn für jedes $n = 1, 2, \ldots$

$$f(s + i(t_n - t')) = f_n(s)$$

gesetzt wird, ist gleichmäßig innerhalb C', d. h. für $|s - s'| < \varrho$,

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

(Mit anderen Worten, es strebt die Differenz der Werte, welche $f(s)$ in zwei „entsprechenden" Punkten der Kreise C' und C_n' (siehe Figur) annimmt, gleichmäßig gegen 0 für ins Unendliche wachsendes n.)

Um die Existenz einer derartigen Zahlenfolge $t_1, t_2, \ldots$ zu beweisen, genügt es offenbar zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Zahl $T > H + r$ so zu beweisen, daß innerhalb C'

$$|f(s) - f(s + i(T - t'))| < \varepsilon,$$

d. h. (da ja für $|s-s'| < \varrho$ die beiden Punkte s und $s+i(T-t')$ der Halbebene $\sigma > \eta$ angehören)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (s+i(T-t'))}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\left(1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right)\right| < \varepsilon$$

ist.

Wegen $\sigma' - \varrho > \eta$ läßt sich zunächst ein $N = N(\varepsilon)$ derart bestimmen, daß für alle T und $|s-s'| < \varrho$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|a_n e^{-\lambda_n s}\left(1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right)\right| < \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n (\sigma'-\varrho)} \cdot 2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Es erübrigt die Existenz eines $T > H + r$ so zu beweisen, daß innerhalb C'

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}\left(1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, oder, was offenbar mehr aussagt, so daß

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \, e^{-\lambda_n (\sigma'-\varrho)} \left|1-e^{-\lambda_n i(T-t')}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

ist. Die Existenz eines $T > H + r$, das (2) befriedigt, ist unmittelbar folgendermaßen festzustellen: Weil die Summe auf der linken Seite von (2) nur eine endliche Anzahl Glieder enthält, gibt es offenbar ein $\varepsilon' > 0$, so daß (2) erfüllt ist, wenn für alle $n = 1, 2, \ldots, N$ die Zahl $\lambda_n (T - t')$ auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet absolut genommen kleiner als ε' ist, d. h. wenn $\frac{\lambda_n}{2\pi}(T-t')$, modulo 1 betrachtet, absolut genommen kleiner als $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon'}{2\pi}$ ist. Daß diese letzte Forderung aber für gewisse beliebig große T (also speziell für ein $T > H + r$) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus einem der allereinfachsten — und unmittelbar zu beweisenden — Sätze in der Theorie der Diophantischen Approximationen, welcher aussagt: Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_N$ beliebige reelle Zahlen; dann kommt im N-dimensionalen Raume der Punkt

$(tx_1, tx_2, \ldots, tx_N)$, wenn jede Koordinate tx_n modulo 1 reduziert wird, immer wieder einmal (für ins Unendliche wachsendes t) innerhalb eine beliebig vorgegebene Umgebung des Anfangspunktes $(0, 0, \ldots, 0)$ des N-dimensionalen Raumes.

Nachdem somit die Existenz einer Zahlenfolge $t_1, t_2, \ldots$ mit den beiden obigen Eigenschaften festgestellt ist, läßt sich nunmehr auf Grund des folgenden bekannten Stieltjesschen Lemmas der Beweis unseres Satzes in wenigen Worten vollenden.

Lemma[1]): Es seien C und C' zwei konzentrische Kreise in der komplexen s-Ebene, mit Radien r und $\varrho < r$. Es möge für alle $n = 1, 2, \ldots$ die Funktion $f_n(s)$ innerhalb C regulär und dem Betrage nach $\leqq K$ sein, wo K eine von n und s unabhängige positive Zahl bedeutet, und es sei gleichmäßig innerhalb des kleineren Kreises C'

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

Dann existiert die Funktion $f(s)$ (die selbstverständlich innerhalb C' regulär ist) innerhalb des ganzen Kreises C als eine reguläre analytische Funktion, und es ist innerhalb C

$$f(s) = \lim_{n=\infty} f_n(s).$$

Dies Lemma ist unmittelbar auf unsere Funktionen $f(s)$ und $f_n(s) (n = 1, 2, \ldots)$ und die beiden Kreise C und C' anzuwenden. Wir berücksichtigen:

1. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ ist $f_n(s) = f(s + i(t_n - t'))$ innerhalb C regulär und absolut genommen $< K$ (weil ja für s innerhalb C der Punkt $s + i(t_n - t')$ dem Kreise C_n und somit a fortiori der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ angehört).

---

[1]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Paris 1905, Bd. II, S. 369–370. [Der Satz ist seitdem in hohem Grade verallgemeinert worden. Vgl. Carathéodory und Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. Berliner Sitzungsberichte, 1911, S. 587–613.]

2. Innerhalb des kleineren Kreises C' ist, wie oben festgestellt, gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

Das Stieltjessche Lemma ergibt daher, daß die Funktion $f(s)$ im ganzen Kreise C als reguläre analytische Funktion existiert, und daß daselbst

$$f(s) = \lim_{n=\infty} f_n(s)$$

ist, also a fortiori (wegen $|f_n(s)| < K$), daß $f(s)$ innerhalb C regulär und absolut genommen $\leq K$ ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

Zum Turbulenzproblem.

Von **O. Blumenthal** in Aachen.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Dezember 1913.

In diesen Akademieberichten hat kürzlich Herr Fritz Noether[1]) einen neuen Weg zur Behandlung des Turbulenzproblems angegeben. Es handelt sich bei dieser Frage bekanntlich um den Nachweis, daß eine kritische Geschwindigkeit existiert, oberhalb deren die zweidimensionale, laminare Strömung einer reibenden Flüssigkeit in einem geraden Kanal instabil ist. Das Neuartige von Noethers Ansatz besteht darin, daß er endliche Störungen der Laminarströmung in Betracht ziehen will und dazu den Weg einschlägt. die Frage für nichtstationäre laminare Strömungen zu stellen und sie hier mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen zu entscheiden, nachdem v. Mises und Haupt[2]) gezeigt haben, daß die stationäre Laminarströmung (Couette-Strömung) kleinen Schwingungen gegenüber bei allen Geschwindigkeiten stabil ist.

Als Beispiel wählt Herr Noether diejenige nichtstationäre Bewegung, die entsteht, wenn zur Ausgangszeit die Geschwindigkeiten über den Querschnitt nach einer kubischen Parabel

[1]) F. Noether, Über die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung. Sitzungsb. Akad. München, math.-phys. Klasse, Mai 1913.

[2]) R. v. Mises, Beitrag zum Oszillationsproblem, Festschrift Heinrich Weber (Leipzig, Teubner, 1912); O. Haupt, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems. Sitzungsb. Akad. München. math.-phys. Klasse, 1912. — Einen anderen Beweis derselben Tatsache hat im Winter 1912/13 L. Hopf in einem hydrodynamischen Seminar in Aachen vorgetragen.

verteilt sind. Er glaubt zu finden, daß diese Strömung bei genügend großer Geschwindigkeit instabil ist, indem sie sehr langwellige Störungsbewegungen von bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit zuläßt. Ich werde im folgenden nachweisen, daß dieses Resultat irrig ist. Es ist also immer noch kein Fall bekannt, in dem eine laminare Strömung in eine turbulente übergehen kann. Ich möchte aber ausdrücklich bemerken, daß ich aus diesem negativen Resultate kein abfälliges Urteil über F. Noethers allgemeine Methode herleiten möchte, die möglicherweise bei anderen Anwendungen zu den erstrebten Ergebnissen führen kann.

Ich habe mit besonderem Danke zu erwähnen, daß ich die erste Anregung zur Nachprüfung der Noetherschen Arbeit durch Herrn Th. v. Kármán erhalten habe, und daß ich bei den Entwicklungen der Abschnitte III und IV von Herrn L. Hopf bereitwillig und wirksam unterstützt worden bin.

I. Formulierung des Problems.

Mit Hilfe vereinfachender Überlegungen hat F. Noether die Frage nach der Instabilität der nichtstationären Bewegung in dem betrachteten Beispiele auf folgende Randwertaufgabe zurückgeführt:

Hat die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 \varphi}{d y^4} = - i R \left(y^3 \frac{d^2 \varphi}{d y^2} - 6 y \varphi \right) \tag{1}$$

für gewisse reelle, positive Werte von R ein Integral, das bei $y = \pm \frac{1}{2}$ samt seiner ersten Ableitung verschwindet? Dabei hängt die Größe R eng mit der Reynoldsschen Zahl zusammen.

Zur Lösung dieser Randwertaufgabe bedient sich Noether der Potenzreihenentwicklung der Integrale um $y = 0$. Nun findet er auf diese Weise für R einen sehr großen Wert (rund 45000). Für solche R sind aber die Potenzreihen schwierig zu handhaben, da ihre Glieder zunächst zunehmen. Herr v. Kármán hat mich darauf hingewiesen, daß die von mir mehrfach be-

nutzten Methoden der asymptotischen Integration[1]) hier nutzbar gemacht werden könnten. Diesen Gedanken führe ich im folgenden durch. Ich finde im Gegensatz zu Noether keinen Wert R, für den die Randwertaufgabe lösbar ist[2]). Dies ist das in der Einleitung ausgesprochene negative Ergebnis. An welcher Stelle sich bei Herrn Noether ein Fehler eingeschlichen hat, habe ich nicht zu ermitteln versucht, da ich sonst seine ganze mühsame, numerische Rechnung hätte wiederholen müssen. Es scheint mir aber, daß er die Schnelligkeit der Konvergenz seiner Potenzreihen überschätzt hat, so daß das Polynom 12. Grades, dessen Nullstellen er bestimmt (siehe S. 322, 323, Formeln (21)—(22)), noch keine Näherung an die Reihe darstellt[3]).

1. Ich habe für meine Untersuchungen vollständig andere Methoden anwenden müssen, als in meinen beiden oben erwähnten früheren Arbeiten. In der Tat ist die gestellte Randwertaufgabe der asymptotischen Behandlung nur schwer zugänglich. Dies liegt daran, daß die asymptotischen Entwicklungen am Punkte $y = 0$ ungültig werden. Nun lassen sich zwar die Entwicklungen formal ohne Schwierigkeit aufstellen, und es läßt sich auch jeder Entwicklung nach allgemeinen Methoden ein exaktes Integral der Differentialgleichung (1) zuordnen, das eine analytische Funktion von y und R ist, aber diese Zu-

---

[1]) Arch. f. Math. u. Phys. (3) 19 (1912), S. 136 ff.; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62 (1914), S. 343 ff.

[2]) Diese Ausdrucksweise ist nicht ganz exakt. Die genaue Angabe meiner Resultate gebe ich S. 587 und 592.

[3]) Herr Noether, dem das Manuskript dieser Arbeit zur Durchsicht vorgelegen hat, teilt diese Ansicht. Er ermächtigt mich zu erklären, daß er in meiner Arbeit keinen Fehler gefunden habe. Er nimmt daher an, daß die in seiner Arbeit auf S. 323 unten ausgesprochene Vermutung über den restlichen Verlauf der Potenzreihe für die Determinante (21) irrig ist. Ihr allgemeines Gesetz sei nur in sehr unübersichtlicher Form angebbar, während in der vorliegenden Untersuchung die Restabschätzung auf der strengen Darstellung der Determinante durch bestimmte Integrale beruhe. Dagegen hält Herr Noether die enger gefaßte Schlußfolgerung auf S. 329 seiner Arbeit aufrecht und beabsichtigt, dies an anderer Stelle auszuführen.

ordnung gilt nur auf einem Halbstrahle durch den Nullpunkt, genauer, in einem gewissen Winkelraum, dessen Scheitel der Nullpunkt ist. Ist also ψ_1 ein der asymptotischen Entwicklung Ψ_1 auf der positiven reellen Achse zugeordnetes Integral, so wird auf der negativen reellen Achse dieses Integral nicht mehr Ψ_1, sondern einer linearen Kombination aller vier asymptotischen Entwicklungen zugeordnet sein. Diese „Übergangssubstitutionen" aber braucht man gerade zur Lösung einer Randwertaufgabe an den Punkten $y = \pm \frac{1}{2}$. Um sie zu gewinnen, habe ich den allgemeinen Weg verlassen müssen und zu dem speziellen Verfahren der Integration von (1) durch bestimmte Integrale gegriffen, das ja auch bei der Besselschen Differentialgleichung zu dem gleichen Zwecke angewandt wird. Die Integraldarstellung wird mir durch die Laplacesche Transformation geliefert[1]). Es erscheint mir sehr beachtenswert, daß die Gleichung (1) ein Beispiel ist, wo diese im allgemeinen recht „theoretische" Methode vollständig durchgeführt werden kann.

Zunächst läßt sich die Variable mit dem Parameter R zusammenfassen. Wir setzen

(2′) $$\eta = R^{\frac{1}{5}} y$$

und erhalten:

$$\frac{d^4 \psi}{d \eta^4} + i \left(\eta^3 \frac{d^2 \psi}{d \eta^2} - 6 \eta \psi \right) = 0 .$$

Diese Differentialgleichung ist vom Range 3[2]) und daher der Laplaceschen Transformation nicht unmittelbar zugänglich[3]); sie läßt sich aber durch die einfache Substitution

(3′) $$\xi = \tfrac{2}{5} \eta^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5} \sqrt{R}\, y^{\frac{5}{2}}$$

auf den Rang 1 bringen und damit zugänglich machen.

---

[1]) Siehe z. B. Picard, Traité d'Analyse III, chap. XIV, 9—19 (2. Aufl.), S. 394—412.

[2]) Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I, S. 337—339.

[3]) Dies folgt aus den asymptotischen Entwicklungen der Integrale einer Gleichung vom Range $r > 1$; siehe Schlesinger, l. c., S. 355—356.

Man erhält die Gleichung

$$(3)\qquad \begin{aligned} &25\,\xi^3\psi'''' + 90\,\xi^2\psi''' + (25\,i\,\xi^3 + 39\,\xi)\,\psi'' \\ &\quad + (15\,i\,\xi^2 - \tfrac{3}{5})\,\psi' - 24\,i\,\xi\,\psi = 0, \end{aligned}$$

und die Randwertaufgabe formuliert sich wie folgt:

Gibt es ein Integral der Gleichung (3) und eine positive reelle Zahl x, so daß für $\xi = x$ und $\xi = x\cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ das Integral nebst seiner ersten Ableitung verschwindet?

II. Aufstellung der Integrale und der Übergangssubstitutionen.

2. Ein Integral der Gleichung (3) ist sofort bekannt. Es ist

$$\psi_0 = \xi^{\frac{6}{5}}.$$

Die übrigen werden mit Hilfe der Laplaceschen Transformation in Gestalt bestimmter Integrale dargestellt.

Der Ansatz der Laplaceschen Transformation besteht darin, eine Funktion $\nu(z)$ zu suchen, so daß

$$(4')\qquad \psi = \int e^{\varepsilon\,\xi\,z}\,\nu(z)\,dz, \qquad \varepsilon = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

bei geeigneter Bestimmung des Integrationsweges die Gleichung (3) befriedigt. Die linke Seite der Gleichung (3) wird, wenn man (4') einsetzt,

$$(4'')\qquad \begin{aligned} &[e^{\varepsilon\,\xi\,z}\,P(\xi, z, \nu)] \\ &-\int e^{\varepsilon\,\xi\,z}\left\{25\,z^2(1-z^2)\nu''' + z(135-210\,z^2)\nu'' + (96-399\,z^2)\nu' - \frac{693}{5}\,z\,\nu\right\}dz. \end{aligned}$$

$P(\xi, z, \nu)$ bedeutet ein Polynom in ξ und z, dessen Koeffizienten Ableitungen von ν bis zur zweiten Ordnung sind. Die eckigen Klammern bedeuten, daß dieser Ausdruck zwischen den Grenzen des Integrals (4') zu nehmen ist. Diese Grenzen sind so zu bestimmen, daß an ihnen $e^{\varepsilon\,\xi\,z}\cdot P$ verschwindet. Außerdem hat ν der Differentialgleichung zu genügen:

$$(4)\qquad 25\,z^2(1-z^2)\nu''' + z(135-210\,z^2)\nu'' + (96-399\,z^2)\nu' - \frac{693}{5}\,z\,\nu = 0.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist leicht zu finden, nämlich:

(4''') $$r_0 = z^{-\frac{11}{5}}.$$

Die Gleichung läßt sich damit in bekannter Weise reduzieren, indem man

(5') $$r = z^{-\frac{11}{5}} \int \omega \, dz$$

setzt. Es ergibt sich dann für ω die Gleichung zweiter Ordnung:

(5) $$25 z^2 (1 - z^2) \omega'' - (30 + 45 z^2) \omega' + (30 - 3 z^2) \omega = 0.$$

Es ist ein glücklicher Zufall, daß diese Gleichung sich auf eine hypergeometrische zurückführen läßt. Dazu dienen die beiden Substitutionen

(6') $$\omega = z \cdot w, \qquad z^2 = \zeta.$$

Sie ergeben:

(6) $$\zeta (1 - \zeta) \frac{d^2 w}{d \zeta^2} + \left(\frac{9}{10} - \frac{12}{5} \zeta \right) \frac{dw}{d\zeta} - \frac{12}{25} w = 0,$$

eine hypergeometrische Differentialgleichung mit

$$\alpha = \tfrac{4}{5}, \qquad \beta = \tfrac{3}{5}, \qquad \gamma = \tfrac{9}{10}.$$

Die Fundamentalintegrale um die beiden Stellen 0 und 1 sind die folgenden:

$$w_1^{(0)} = \mathfrak{P}(\zeta), \qquad w_2^{(0)} = \zeta^{\frac{1}{10}} \mathfrak{P}(\zeta)$$
$$w_1^{(1)} = \mathfrak{P}(1 - \zeta), \qquad w_2^{(1)} = (1 - \zeta)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}(1 - \zeta),$$

wo die $\mathfrak{P}$ mit dem konstanten Gliede 1 beginnende Potenzreihen mit reellen Koeffizienten bezeichnen und die Wurzeln für positive Werte des Arguments positiv gewählt werden sollen.

Es bestehen dann zwischen diesen Integralen die folgenden Fortsetzungsrelationen[1]):

[1]) Schlesinger, Handbuch I, S. 477—484.

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
w_1^{(1)} &= f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{3}{2})\, w_1^{(0)} + f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{3}{2})\, w_2^{(0)} \\
w_2^{(1)} &= f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{1}{2})\, w_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2})\, w_2^{(0)} \\
w_1^{(1)} &= f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{9}{10})\, w_1^{(1)} + f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{9}{10})\, w_2^{(1)} \\
w_2^{(0)} &= f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{11}{10})\, w_1^{(1)} + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{11}{10})\, w_2^{(1)},
\end{aligned}
$$

wo $f(a, b, c)$ ein Quotient von Gaußschen Π-Funktionen (Γ-Funktionen) ist[1]):

$$
(7') \qquad f(a, b, c) = \frac{\Pi(c-1)\,\Pi(c-a-b-1)}{\Pi(c-a-1)\,\Pi(c-b-1)}.
$$

Wir haben jetzt die Aufgabe, zu den Integralen $\omega(z)$ und $\nu(z)$ der Gleichungen (5) und (4) und den zwischen ihnen bestehenden Fortsetzungsrelationen zurückzukehren. Die Gleichung (5) hat in der z-Ebene die drei singulären Stellen $-1,\ 0,\ +1$. Wir legen durch jede von diesen als Querschnitt den unter $\frac{5\pi}{4}$ gegen die positive reelle Achse geneigten Strahl und geben in der aufgeschnittenen Ebene allen Wurzeln der Form

$$
z^a,\ (1+z)^a,\ (1-z)^a
$$

solche Vorzeichen, daß sie für positive, reelle Werte des Arguments positiv reell sind. Dann ist in dem reellen Intervalle (0, 1)

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{(0)}(z) &= z \cdot w_1^{(0)}(z^2); \quad & \omega_2^{(0)}(z) &= z \cdot w_2^{(0)}(z^2); \\
\omega_1^{(1)}(z) &= z \cdot w_1^{(1)}(z^2); \quad & \omega_2^{(1)}(z) &= z \cdot w_2^{(1)}(z^2),
\end{aligned}
$$

und daher bestehen die Fortsetzungsrelationen (7) auch zwischen den Funktionen $\omega^{(0)}$ und $\omega^{(1)}$. Dagegen ist in dem reellen Intervalle $(-1, 0)$

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{(0)}(z) &= z \cdot w_1^{(0)}(z^2); \quad & \omega_2^{(0)}(z) &= e^{\frac{\pi i}{5}} \cdot z \cdot w_2^{(0)}(z^2); \\
\omega_1^{(-1)}(z) &= z \cdot w_1^{(1)}(z^2); \quad & \omega_2^{(-1)}(z) &= z \cdot w_2^{(1)}(z^2),
\end{aligned}
$$

und die Fortsetzungsrelationen erleiden eine leichte Änderung:

---

1) Über Π-Funktionen findet man das Nötige bei Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 26—31.

$$\omega_1^{(-1)} = f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{3}{2})\,\omega_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{3}{2})\,\omega_2^{(0)}$$

$$\omega_2^{(-1)} = f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{1}{2})\,\omega_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2})\,\omega_2^{(0)}$$

$$\omega_1^{(0)} = f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{9}{10})\,\omega_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{9}{10})\,\omega_2^{(-1)}$$

$$e^{-\frac{i\pi}{5}}\,\omega_2^{(0)} = f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{11}{10})\,\omega_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{11}{10})\,\omega_2^{(-1)}.$$

Schließlich die Funktion ν. Den beiden Zweigen $w_1^{(0)}$ und $w_2^{(0)}$ entsprechen um den Nullpunkt Entwicklungen der Form

$$\text{(8 a)} \qquad \nu_1^{(0)} = \tfrac{1}{2} z^{-\frac{1}{5}} \mathfrak{P}(z), \qquad \nu_2^{(0)} = \tfrac{5}{11} \mathfrak{P}(z),$$

den beiden Zweigen $w_1^{(1)}$ und $w_2^{(1)}$ um die Punkte $z = \pm 1$ herum die Entwicklungen

$$\text{(8 b)} \qquad \begin{aligned} \nu_1^{(1)} &= -(1-z)\,\mathfrak{P}(1-z), & \nu_2^{(1)} &= -\sqrt{2}\,(1-z)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}(1-z) \\ & & &= i\sqrt{2}\,(z-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}(z-1) \\ \nu_1^{(-1)} &= -e^{-\frac{i\pi}{5}}(1+z)\,\mathfrak{P}(1+z), & \nu_2^{(-1)} &= -\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{5}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}(1+z). \end{aligned}$$

Daß von den beiden Entwicklungen um jeden Punkt immer eine regulär ist, entspricht einem Satze von Poincaré[1]).

Zwischen diesen Integralen bestehen die folgenden Relationen, die sich sofort aus den zwischen den ω bestehenden ablesen lassen:

$$\text{(9 a)} \qquad \begin{aligned} \nu_1^{(1)} &= C_1 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{3}{2})\,\nu_1^{(0)} + f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{3}{2})\,\nu_2^{(0)} \\ \nu_2^{(1)} &= C_2 \nu_0 + f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{1}{2})\,\nu_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2})\,\nu_2^{(0)} \\ \nu_1^{(-1)} &= C_3 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{3}{2})\,\nu_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{3}{2})\,\nu_2^{(0)} \\ \nu_2^{(-1)} &= C_4 \nu_0 + f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{1}{2})\,\nu_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2})\,\nu_2^{(0)}; \end{aligned}$$

[1]) Picard, Traité III, chap. XIV, 17 (2. Aufl.), S. 408.

$$
\begin{aligned}
\nu_1^{(0)} &= D_1\nu_0 + f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{9}{10})\,\nu_1^{(1)} \ + f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{9}{10})\,\nu_2^{(1)} \\
\nu_2^{(0)} &= D_2\nu_0 + f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{11}{10})\,\nu_1^{(1)} \ + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{11}{10})\,\nu_2^{(1)} \\
\text{(9 b)}\quad \nu_1^{(0)} &= D_3\nu_0 + f(\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{9}{10})\,\nu_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{9}{10})\,\nu_2^{(-1)} \\
e^{-\frac{i\pi}{5}}\,\nu_2^{(0)} &= D_4\nu_0 + f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{11}{10})\,\nu_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{11}{10})\,\nu_2^{(-1)}.
\end{aligned}
$$

Die Größen C und D sind Konstante, die sich durch bestimmte Integrale ausdrücken. Auf ihre Werte kommt es für das Folgende nicht an; von großer Wichtigkeit ist aber, daß

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Dies ergibt sich in folgender Weise. Setzen wir aus (9 a) in eine der beiden ersten Gleichungen (9 b) ein, so folgt z. B. aus der zweiten Gleichung die Beziehung:

$$D_2 + f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{11}{10})\,C_1 + f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{11}{10})\,C_2 = 0.$$

Ferner aber berücksichtigen wir, daß bei einem Umlaufe um den Punkt 1 die Funktionen $\nu_1^{(0)}$ und $\nu_2^{(0)}$ sich nur untereinander, nicht aber mit ν_0 kombinieren. Da bei einem Umlaufe um 1 zwar $\nu_1^{(1)}$ ungeändert bleibt, $\nu_2^{(1)}$ aber den Faktor -1 aufnimmt, so folgt in gleicher Weise wie oben

$$D_2 + f(\tfrac{9}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{11}{10})\,C_1 - f(\tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{11}{10})\,C_2 = 0$$

und also $C_2 = 0$. Für C_4 wird entsprechend geschlossen.

3. Wir bezeichnen mit E' die z-Ebene, aufgeschnitten längs der drei durch die singulären Punkte gehenden, unter $\frac{5\pi}{4}$ gegen die positive reelle Achse geneigten Halbstrahlen. Die Fortsetzungsrelationen (9) gelten zwischen den Zweigen der Funktion ν und ihren analytischen Fortsetzungen im ganzen Gebiete E'. Wir bezeichnen speziell mit ν denjenigen in E' eindeutig definierten Zweig, der als Ausgangselement um den Nullpunkt $\nu_1^{(0)}$ hat, und bilden das Integral (4′) längs dreier ins Unendliche gehender Schleifenwege $S^{(-1)}$, $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, die in positivem Sinne um die drei Querschnitte gelegt sind (siehe Fig. 1). Es sei zuerst der reelle Bestandteil von ξ

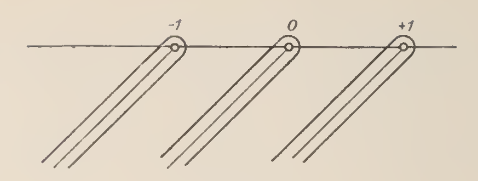


Fig. 1.

positiv. Dann sind, weil ν als Integral einer hypergeometrischen Funktion im Unendlichen sich bestimmt verhält, die drei Integrale konvergent und befriedigen die vorgelegte Differentialgleichung (3), denn das von den Grenzen herrührende Glied $[e^{\varepsilon\xi z} P(\xi, z, \nu)]$ des Ausdrucks (4'') verschwindet im Unendlichen.

In der Halbebene $\Re(\xi) > 0$ sind daher drei Integrale ψ der vorgelegten Differentialgleichung definiert:

$$(10)\quad \psi_1 = \int_{S^{(0)}} e^{\varepsilon\xi z}\,\nu(z)\,dz, \quad \psi_2 = \int_{S^{(-1)}} e^{\varepsilon\xi z}\,\nu(z)\,dz, \quad \psi_3 = \int_{S^{(+1)}} e^{\varepsilon\xi z}\,\nu(z)\,dz,$$

zu denen noch das bekannte Integral

$$(10')\qquad \psi_0 = \xi^{\mathfrak{g}}$$

hinzutritt.

Daß diese Integrale von Null verschieden und voneinander linear unabhängig sind und mit den asymptotischen Entwicklungen in engem Zusammenhange stehen, ist bekannt[1]), wir kommen darauf zurück. Wir besprechen zunächst die analytische Fortsetzung der Integrale aus der Halbebene der ξ mit positivem reellem Bestandteil, und zwar soll folgende Aufgabe gelöst werden, die durch das Noethersche Problem gestellt wird:

Die für positive, reelle ξ durch die Darstellungen (10) gegebenen Integrale sollen bis zu dem Halbstrahl ξ vom Argumente $\frac{5\pi}{2}$ fortgesetzt werden.

[1]) Picard, Traité III, chap. XIV, 11 (2. Aufl.), S. 397—398.

Die analytische Fortsetzung wird durch Drehung der Schleifenwege vorgenommen. Das Argument von ξ sei χ, das Argument von z sei φ. Die längs eines Schleifenweges vom Argument φ genommenen Integrale (10) sind konvergent in der Halbebene

$$\frac{3\pi}{4} - \varphi < \chi < \frac{7\pi}{4} - \varphi.$$

Diese Halbebene dreht sich in positivem Sinne, wenn die Wege in negativem Sinne gedreht werden. Solange bei der Drehung ein Weg keinen singulären Punkt überschreitet, ist das längs des gedrehten Weges genommene Integral die Fortsetzung des ursprünglichen. Bei Überschreitung eines singulären Punktes erfolgt lineare Zusammensetzung. Wir besprechen zuerst den Übergang über die negative reelle Achse (Fig. 2).

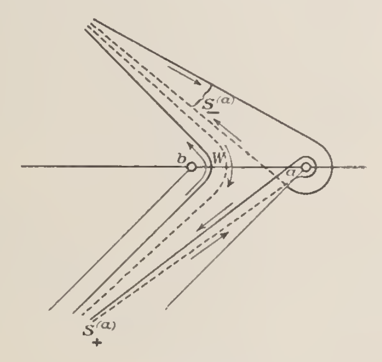


Fig. 2.

$S_+^{(a)}$ sei die Integrationsschleife um den singulären Punkt a längs eines unterhalb der Achse gelegenen Querschnitts, $S_-^{(a)}$ die Integrationsschleife längs eines darüber liegenden Querschnitts. Das Argument von ξ sei so gewählt, daß die Integrale $\int\limits_{S_+^{(a)}}$ und $\int\limits_{S_-^{(a)}}$ beide konvergieren. Auf der oberen Seite der Integrationswege in genügender Nähe des Punktes a stimmt die Funktion ν mit dem innerhalb der zerschnittenen Ebene (Fig. 1) definierten Zweige $\nu_1^{(0)}$ überein. Wir markieren an

beiden Querschnitten einen Erkennungsort, an dem die Übereinstimmung stattfindet. Es sei ν' der Zweig der Funktion ν, der aus $\nu_1^{(0)}$ durch einmaligen Umlauf in negativem Sinne um a hervorgeht. Wir denken ihn uns in einem unteren Blatte der Riemannschen Fläche und zeichnen in Figur 2 die dem oberen Blatte angehörigen Linien ausgezogen, die dem unteren angehörigen gestrichelt. Außerdem bezeichne W einen in positivem Drehsinne genommenen Weg, der zwischen a und dem nächsten singulären Punkt b die reelle Achse schneidet und sich den beiden Schleifen $S_+^{(a)}$ und $S_-^{(a)}$ asymptotisch nähert. Dann ist der in Figur 2 gezeichnete Weg auf der Riemannschen Fläche der Funktion ν geschlossen, und es ist

$$\int\limits_{S_+^{(a)}}(\nu) + \int\limits_{W}(\nu) - \int\limits_{S_-^{(a)}}(\nu) - \int\limits_{W}(\nu') = 0,$$ [1]

weil, nach Weghebung zweier in entgegengesetztem Sinne durchlaufener Kreise um a, die ausgezogenen und gestrichelten Wegteile der Figur einzeln keine singulären Punkte umschließen und sich also auf Null zusammenziehen lassen. Also ist

(S) $$\int\limits_{S_+^{(a)}} = \int\limits_{S_-^{(a)}} - \int\limits_{W}(\nu - \nu').$$

Bei wachsendem Argument von ξ wird das Integral links seinen Sinn verlieren, während die rechte Seite Bedeutung behält; sie liefert also für diese Werte von ξ die analytische Fortsetzung des linken Integrals.

Die Durchführung der Rechnung ist hiernach nicht schwierig.

Das Integral $\int\limits_{S^{(-1)}}$ ändert sich beim Überschreiten der negativen reellen Achse nicht, weil die Schleife $S^{(-1)}$ keinen singulären Punkt überstreicht.

1. $\int\limits_{S^{(0)}}$. Da am Erkennungsort $\nu = \nu_1^{(0)}$ ist, so ist

$$\nu' = e^{\frac{2i\pi}{5}}\nu_1^{(0)}, \qquad \nu - \nu' = \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\nu^{(0)}.$$

[1]) Die Abkürzungen sind wohl ohne weiteres verständlich.

Daher, da der Weg W nur den einen Punkt -1 umschließt,

$$\int\limits_{W}(\nu-\nu') = \int\limits_{S^{(-1)}}(\nu-\nu') = \left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\int\limits_{S^{(-1)}}(\nu_1^{(0)}) = \left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\int\limits_{S^{(-1)}},$$

also

(11) $$\int\limits_{S_+^{(0)}} = \int\limits_{S_-^{(0)}} - \left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\int\limits_{S^{(-1)}}.$$

2. $\int\limits_{S^{(+1)}}$. Um $\nu-\nu'$ zu berechnen, gehen wir aus von der Formel (9 b):

$$\nu = \nu_1^{(0)} = D_1\nu_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10})\nu_1^{(1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10})\nu_2^{(1)}.$$

Bei negativem Umlauf um $+1$ bleiben ν_0 und $\nu_1^{(1)}$ ungeändert, $\nu_2^{(1)}$ nimmt den Faktor -1 auf, daher ist

$$\nu-\nu' = 2f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10})\nu_2^{(1)}.$$

Also ist

(12') $$\int\limits_{W}(\nu-\nu') = 2f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10})\int\limits_{W}(\nu_2^{(1)}).$$

Zur Berechnung dieses Integrals dient Figur 3. Es bezeichne $\bar{\nu}_2^{(1)}$ den Zweig von ν, der aus $\nu_2^{(1)}$ durch einmalige Um-

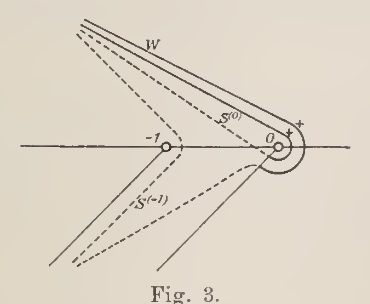


Fig. 3.

laufung des Punktes 0 im negativen Sinne hervorgeht. Auf dem in der positiven Halbebene verlaufenden Teile des Weges W markieren wir durch * den Erkennungsort, und führen den in

der Figur eingezeichneten Weg, bestehend aus einem genügend großen Stück einer in negativem Sinne um den Nullpunkt gelegten Schleife, und einem genügend großen Stück einer den Punkt -1 in negativem Sinne umlaufenden Schleife. Da W zusammen mit diesen beiden Schleifenstücken keinen singulären Punkt umschließt, so ist der Gesamtweg auf der Riemannschen Fläche der Funktion ν geschlossen und das über ihn erstreckte Integral ist gleich Null. Also:

$$\int_W (\nu_2^{(1)}) = \int_{S_-^{(0)}} (\nu_2^{(1)}) + \int_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(1)}).$$

Nun ist am Erkennungsort (Formel (9 a))

$$\nu_2^{(1)} = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\,\nu_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\,\nu_2^{(0)},$$

daher zunächst, da $\nu_2^{(0)}$ am Nullpunkte regulär ist,

$$(12'') \qquad \int_{S_-^{(0)}} (\nu_2^{(1)}) = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2}) \int_{S_-^{(0)}} (\nu_1^{(0)}).$$

Weiter ist

$$\nu_2^{(1)} = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\, e^{\frac{2i\pi}{5}}\, \nu_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\,\nu_2^{(0)}.$$

Werden hier $\nu_1^{(0)}$ und $\nu_2^{(0)}$ durch $\nu_1^{(-1)}$ und $\nu_2^{(-1)}$ ausgedrückt, so folgt nach einfacher Umrechnung der f-Funktionen

$$\nu_2^{(1)} = E\nu_0 + a\,\nu_1^{(-1)} + \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \nu_2^{(-1)};$$

die Koeffizienten E und a sind für das Folgende belanglos[1]).

[1]) Zur Umrechnung der f-Funktionen wird von der bekannten Formel

$$\Pi(-x)\,\Pi(x-1) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Gebrauch gemacht. Für den Koeffizienten a ergibt sich durch die Rechnung der folgende Wert:

$$a = \tfrac{1}{5} \sin\frac{2\pi}{5}\, f(-\tfrac{3}{10}, -\tfrac{4}{10}, -\tfrac{1}{10}) \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - e^{\frac{\pi i}{5}} \right).$$

Da ν_0 und $\nu_1^{(-1)}$ am Punkte -1 regulär sind, ist also

$$\int\limits_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(1)}) = \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(-1)}).$$

Da andererseits am Erkennungsort (Formel (9 b))

$$\nu = \nu_1^{(0)} = D_3 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}) \nu_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \nu_2^{(-1)},$$

so ist

$$\int\limits_{S^{(-1)}} (\nu) = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \int (\nu_2^{(-1)})$$

und also

$$(12''') \quad \int\limits_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(1)}) = \frac{1}{f(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{9}{10})} \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(-1)}} (\nu).$$

Werden (12″) und (12‴) in (12′) und (S) eingesetzt, so folgt nach der bereits besprochenen Umrechnung der f-Funktionen:

$$(12) \quad \begin{aligned} \int\limits_{S_+^{(1)}} &= \int\limits_{S_-^{(1)}} - 2 \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \int\limits_{S_-^{(0)}} \\ &- 2 \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(-1)}}. \end{aligned}$$

Die Formeln (11) und (12) enthalten die Übergangssubstitutionen bei Überschreitung der negativen reellen Achse. Wir brauchen aber noch die Formeln für den Übergang über die positive reelle Achse. Ihre Ableitung ist wesentlich die gleiche wie eben, verlangt aber in einem Punkte besondere Vorsicht. Ich erläutere die Schwierigkeit an dem Integrale $\int\limits_{S^{(0)}}$.

Es gilt zunächst genau wie oben

$$(13') \quad \int\limits_{S_+^{(0)}} (\nu) = \int\limits_{S_-^{(0)}} (\nu) - \int\limits_{W} (\nu - \nu') = \int\limits_{S_-^{(0)}} (\nu) - \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int\limits_{W} (\nu).$$

Jetzt aber ist der Weg W nicht gleich dem Weg $S^{(+1)}$, denn W verläuft in der oberen Halbebene in dem Blatte E', in der unteren Halbebene aber in demjenigen unteren Blatte, in das man durch Umlaufung des Punktes $+1$ gelangt; von $S^{(+1)}$ aber gilt genau das Umgekehrte. Mit anderen Worten:

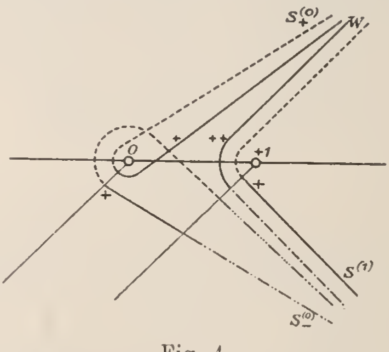


Fig. 4.

W hat seinen Erkennungsort ** in der oberen Halbebene, $S^{(+1)}$ den seinigen * in der unteren Halbebene (Fig. 4). Infolgedessen ist:

$$\int_W (\nu) = \int_{S^{(+1)}} (\bar{\nu}),$$

wo $\bar{\nu}$ denjenigen Zweig von ν bedeutet, zu dem man von dem Ausgangszweig $\nu_1^{(0)}$ durch einmalige Umlaufung von $+1$ in positivem Sinne gelangt. Da bei dieser Umlaufung ν_0 und $\nu_1^{(1)}$ ungeändert bleiben, $\nu_2^{(1)}$ aber den Faktor -1 aufnimmt, so ist

$$(13') \qquad \int_{S^{(+1)}} (\bar{\nu}) = -\int_{S^{(+1)}} (\nu),$$

und daher gilt für die Überschreitung der positiven reellen Achse die Übergangssubstitution

$$(13) \qquad \int_{S_+^{(0)}} = \int_{S_-^{(0)}} + \left(1 - e^{\frac{2 i \pi}{5}}\right) \int_{S^{(+1)}}.$$

Ebenso bei der Umrechnung des Integrales $\int\limits_{S_+^{(-1)}}$. Es ist gerade wie früher

$$(14') \qquad \int\limits_{S_+^{(-1)}} = \int\limits_{S_-^{(-1)}} - 2 f\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right) \int\limits_{W} (\nu_2^{(-1)}).$$

Da aber W im Gegensatze zu den Wegen $S^{(0)}$, $S^{(+1)}$ seinen

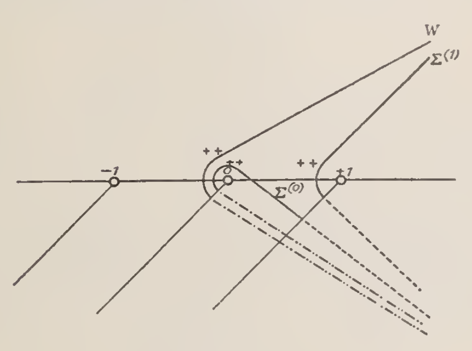


Fig. 5.

Erkennungsort ** in der oberen Halbebene hat, so ist aus Figur 5 folgendes abzulesen:

$$(14'') \quad \int\limits_{W} (\nu_2^{(-1)}) = \int\limits_{\Sigma^{(1)}} (\nu_2^{(-1)}) + \int\limits_{\Sigma^{(0)}} (\nu_2^{(-1)}) = \int\limits_{S^{(+1)}} (\nu_2^{(-1)}) + \int\limits_{S_-^{(0)}} (\bar{\nu}_2^{(-1)}),$$

wo $\bar{\nu}_2^{(-1)}$ derjenige Zweig von ν ist, der aus $\nu_2^{(-1)}$ durch einmalige positive Umlaufung von $+1$ hervorgeht, $\bar{\bar{\nu}}_2^{(-1)}$ derjenige, der durch einmalige positive Umlaufung von 0 entsteht. Die weitere Rechnung ist der früher vorgenommenen ganz analog. Es kommt schließlich:

$$(14) \quad \int\limits_{S_+^{(-1)}} = \int\limits_{S_-^{(-1)}} - 2 e^{-\frac{2 i \pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \int\limits_{S_-^{(0)}} + 2 \left\{ \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{-\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(+1)}}.$$

Die Formeln (11, (12), (13), (14) enthalten alles, was wir für unsere Fortsetzungsaufgabe brauchen. Sei nämlich φ ein Argument zwischen 0 und $-\pi$, und betrachten wir die Integrale über die unter diesem Argument verlaufenden Schleifenwege,

das Argument von ξ sei derart, daß die Integrale existieren. Wir fragen, wie sich die Funktionen ψ durch sie ausdrücken, und schreiben allgemein

$$(U') \qquad \begin{aligned} \psi'_1 &= A_1 \int\limits_{S^{(0)}} + B_1 \int\limits_{S^{(-1)}} + C_1 \int\limits_{S^{(+1)}} \\ \psi'_2 &= A_2 \int\limits_{S^{(0)}} + B_2 \int\limits_{S^{(-1)}} + C_2 \int\limits_{S^{(+1)}} \\ \psi_3 &= A_3 \int\limits_{S^{(0)}} + B_3 \int\limits_{S^{(-1)}} + C_3 \int\limits_{S^{(+1)}}, \end{aligned}$$

dann erhalten wir die Koeffizienten A, B, C dadurch, daß wir zuerst nach den Formeln (11) und (12) die Fortsetzungen der Funktionen ψ in das Gebiet $\pi > \varphi > 0$ bilden, und dann die erhaltenen Integralsummen nach den Formeln (13) und (14) durch Übergang über die positive reelle Achse in das betrachtete Gebiet $0 > \varphi > -\pi$ fortsetzen. Die Rechnung hat keine Schwierigkeiten und ergibt folgende Tabelle:

$$(U) \qquad \begin{aligned} A_1 &= 1 - 2\left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \\ B_1 &= -\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \\ C_1 &= \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(1 - 2\left\{1 + \cos\frac{\pi}{5} - e^{-\frac{i\pi}{5}}\cos\frac{\pi}{5}\right\}\right) \\ &= \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)(1 - C_2), \\ A_2 &= -2e^{-\frac{2i\pi}{5}}\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \\ B_2 &= 1 \\ C_2 &= 2\left\{1 + \cos\frac{\pi}{5} - e^{-\frac{i\pi}{5}}\cos\frac{\pi}{5}\right\}; \\ A_3 &= -2\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right)(1 - C_2) \\ B_3 &= -e^{\frac{2i\pi}{5}}C_2 \\ C_3 &= A_1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}C_2^2. \end{aligned}$$

Wir gebrauchen übrigens von dieser Tabelle im folgenden nur die Werte von A_1, A_2, C_1, C_2.

Zu denjenigen Werten ξ, denen sich Schleifensysteme des Argumentraumes $0 > \varphi > -\pi$ zuordnen lassen, gehören insbesondere diejenigen vom Argumente $\frac{5\pi}{2}$:

$$\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}.$$

Für sie existieren beispielsweise die Schleifenintegrale mit dem Argumente $\varphi = -\frac{7\pi}{8}$. Wir erhalten also in verständlicher Abkürzung:

$$\text{(F)} \quad \begin{aligned} \psi_1\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) &= A_1 \int_{s^{(0)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8}\right\} + B_1 \int_{s^{(-1)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8}\right\} \\ &+ C_1 \int_{s^{(+1)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8}\right\}, \end{aligned}$$

wo die A, B, C die Werte (U) haben, und entsprechend für $\psi_2\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right)$, $\psi_3\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right)$. Diese Formeln lösen die Fortsetzungsaufgabe, die wir uns gestellt haben.

III. Asymptotische Entwicklungen.

4. Die Integraldarstellungen (10) stehen in nahen, wohlbekannten Beziehungen zu den asymptotischen Entwicklungen[1]. Ich werde den Übergang hier in zwei Schritten vornehmen und zwei verschiedene Zeichen für asymptotische Näherungen einführen.

Seien $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ zwei Funktionen einer positiven, reellen Veränderlichen x, die sich für $x = \infty$ einem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerte nähern.

Wenn $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ sich mit wachsendem x nur um Größen unterscheiden, die von geringerer Ord-

[1] Picard, Traité III, chap. XIV, 18–19 (2. Aufl.), S. 409–412.

nung sind als *jede* Potenz $\frac{1}{x^n}$, so werde geschrieben:

$$\psi(x) \gtrsim \Psi(x).$$

Unterscheiden sich aber bei *gegebenem* positivem, ganzzahligem m die Funktionen $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ mit wachsendem x nur um Größen von geringerer Ordnung als $\frac{1}{x^m}$, so werde geschrieben:

$$\psi(x) \backsim \Psi(x).$$

Wir wenden zuerst das Zeichen $\gtrsim$ auf unsere Integraldarstellungen an.

5. Da sich die Funktion ν an den Punkten -1, 0, $+1$ integrabel verhält, lassen sich die Schleifenintegrale auf geradlinige zusammenziehen. Es ergibt sich mit Hilfe der Fortsetzungsrelationen (9b):

$$(15) \qquad \int\limits_{S^{(0)}} (\xi; \varphi) = \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int\limits_{0e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z} \nu_1^{(0)}(z)\, dz = J_1\{\xi, \varphi\}$$

$$\int\limits_{S^{(-1)}} (\xi; \varphi) = 2f \int\limits_{-1+0e^{i\varphi}}^{-1+\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z} \nu_2^{(-1)}(z)\, dz$$

$$= 2fe^{-\varepsilon\xi} \int\limits_{0e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z'} \nu_2^{(-1)}(z'-1)\, dz' = e^{-\varepsilon\xi} J_2(\xi, \varphi) \qquad (z' = z+1)$$

$$\int\limits_{S^{(+1)}} (\xi; \varphi) = 2f \int\limits_{+1+0e^{i\varphi}}^{+1+\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z} \nu_2^{(1)}(z)\, dz$$

$$= 2fe^{\varepsilon\xi} \int\limits_{0e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z'} \nu_2^{(1)}(z'+1)\, dz' = e^{\varepsilon\xi} J_3(\xi, \varphi) \qquad (z' = z-1)$$

$$f = f\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right).$$

Wir benutzen diese Darstellungen, um eine einfache Beziehung zwischen den Werten der Integrale für $\xi = x$ (reell positiv) und $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ aufzustellen. Für reelle, positive ξ

hatten wir den Schleifen das Argument $\frac{5\pi}{4}$ erteilt, für $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ das Argument $-\frac{7\pi}{8}$. Ich behaupte zunächst: für $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ sind die Integrale mit dem Argumente $-\frac{7\pi}{8}$ asymptotisch gleich nach dem Zeichen $\approx$ den Integralen mit dem Argumente $-\frac{5\pi}{4}$.

In der Tat konvergieren für $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ sowohl die Integrale mit Argument $-\frac{7\pi}{8}$ wie die Integrale mit Argument $-\frac{5\pi}{4}$. Um von einem Argumente zu dem anderen zu gelangen, hat man die negative reelle Achse zu überschreiten. Es bestehen also für die beiden Argumente Beziehungen von der Form der Übergangsrelationen (11) und (12):

$$\int_{s^{(0)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8}\right\} = \int_{s^{(0)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\} + \alpha\int_{s^{(-1)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\}$$

$$(16') \qquad \int_{s^{(-1)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8}\right\} = \int_{s^{(-1)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\}$$

$$\int_{s^{(+1)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8}\right\} = \int_{s^{(+1)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\} + \beta\int_{s^{(0)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\} + \gamma\int_{s^{(-1)}}\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\}$$ [1].

Nun hat

$$\varepsilon\xi = e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot xe^{\frac{5i\pi}{2}} = xe^{\frac{9i\pi}{4}}$$

den positiven reellen Bestandteil $\frac{x}{\sqrt{2}}$, ferner werden wir in 6.

---

[1]) Die Koeffizienten α, β, γ sind nicht die gleichen wie in den Formeln (11) und (12). Es ist natürlich nicht schwer, sie anzugeben, ich will aber überflüssige Rechnung vermeiden.

zeigen, daß die Integrale auf der rechten Seite der Formeln (15) mit wachsendem x gegen Null gehen wie gewisse negative Potenzen von x, daher verschwinden in (16') auf der rechten Seite alle Glieder exponentiell wie e^{-ax} gegen das vorderste Glied. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Weiter besteht die Tatsache: Die Integrale

$$\int_s \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\}$$

sind bis auf konstante Faktoren konjugiert komplex zu den Integralen

$$\int_s \left\{ x;\ +\frac{5\pi}{4} \right\}.$$

Dies folgt unmittelbar aus den Darstellungen (15). Denn erstens ist εx konjugiert komplex zu $\varepsilon x e^{\frac{5\pi i}{2}}$, zweitens haben die Variablen z bzw. z' auf den beiden Strahlen konjugiert komplexe Werte, und drittens sind die unter den Integralen auftretenden Funktionen ν Produkte aus konstanten Faktoren in Funktionen, die für reelle, positive Werte von z bzw. z' reell sind, und demgemäß für konjugiert komplexe Werte der Argumente sich konjugiert komplex verhalten. Die konstanten komplexen Faktoren sind, mit Ausnahme des in Evidenz stehenden Faktors $1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}$ des ersten Integrals, aus (8 b) abzulesen. Sie sind $e^{-\frac{i\pi}{5}}$ bei $\nu_2^{(-1)}$, i bei $\nu_2^{(1)}$. Mit ihrer Berücksichtigung findet sich

$$\int_{s^{(0)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} = -e^{\frac{2i\pi}{5}} \text{ conj.} \int_{s^{(0)}} \left\{ x;\ +\frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$\int_{s^{(-1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} \text{ conj.} \int_{s^{(-1)}} \left\{ x;\ +\frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$\int_{s^{(+1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} = -\text{ conj.} \int_{s^{(+1)}} \left\{ x;\ +\frac{5\pi}{4} \right\}.$$

Die nämlichen Überlegungen gelten für die Ableitungen

$$\frac{d}{d\xi}\int_S e^{\varepsilon\xi z}\,\nu(z)\,dz = \varepsilon\int_S e^{\varepsilon\xi z}\cdot z\cdot\nu(z)\,dz;$$

es ist nur noch der komplexe Faktor ε zu berücksichtigen.

Es mögen noch folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\frac{d}{d\xi}\int_{S^{(0)}}\{\xi;\varphi\} = K_1(\xi,\varphi)$$

(15 b) $$\frac{d}{d\xi}\int_{S^{(-1)}}\{\xi;\varphi\} = e^{-\varepsilon\xi}K_2\{\xi,\varphi\}$$

$$\frac{d}{d\xi}\int_{S^{(+1)}}\{\xi;\varphi\} = e^{\varepsilon\xi}K_3\{\xi,\varphi\},$$

und es werde zur Abkürzung

(15 c) $$J\left\{x;\,+\frac{5\pi}{4}\right\} = J(x),\quad K\left\{x;\,+\frac{5\pi}{4}\right\} = K(x)$$

$$J\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\,-\frac{7\pi}{8}\right\} = J\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right),\quad K\left\{xe^{\frac{5i\pi}{2}};\,-\frac{7\pi}{8}\right\} = K\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right)$$

geschrieben. Dann lassen sich die Ergebnisse dieser Nummer auf folgende einfache, zusammenfassende Form bringen, wo überstrichene Größen konjugiert komplexe bedeuten:

$$J_1\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx -e^{\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{J}_1(x);\quad J_2\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx e^{-\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{J}_2(x);$$

(16) $$J_3\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx -J_3(x)$$

$$K_1\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx i\,e^{\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{K}_1(x);\quad K_2\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx -i\,e^{-\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{K}_2(x);$$

$$K_3\left(xe^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx i\,\overline{K}_3(x).$$

6. Die asymptotischen Entwicklungen nach dem Zeichen $\backsim$ der Funktionen J und K werden formal in der Weise gewonnen, daß man die unter dem Integralzeichen auftretenden

Funktionen $\nu(z)$ nach Potenzen der Variabeln z bzw. z' entwickelt und gliedweise integriert. Die Ergebnisse der vorigen Nummer erlauben uns, die Entwicklungen nur für positive, reelle $\xi = x$ durchzuführen. Man erhält nach den Formeln (8) die folgenden ersten Glieder:

$$J_1(x) \sim \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int\limits_{0e^{\frac{5i\pi}{4}}}^{\infty e^{\frac{5i\pi}{4}}} e^{\varepsilon x z} z^{-\frac{1}{5}}\, dz$$

(17′)

$$J_3(x) \sim 2f \cdot \sqrt{2i} \int\limits_{0e^{\frac{5i\pi}{4}}}^{\infty e^{\frac{5i\pi}{4}}} e^{\varepsilon x z} z^{\frac{1}{2}}\, dz.$$

$J_2(x)$ ist weggelassen, weil es im folgenden nicht gebraucht wird.

Die durch die Gleichung

(17″) $$\varepsilon x z = e^{i\pi}\zeta$$

definierte Variable ζ ist reell positiv mit Argument Null. Führen wir sie in (17′) ein, so kommt

$$J_1(x) \sim -\tfrac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) x^{-\frac{4}{5}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{-\frac{1}{5}}\, d\zeta$$

(17‴) $$= -\tfrac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \Pi(-\tfrac{1}{5}) x^{-\frac{4}{5}}$$

$$J_3(x) \sim 2f \cdot \sqrt{2i}\, e^{-\frac{i\pi}{8}} x^{-\frac{3}{2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{\frac{1}{2}}\, d\zeta = f\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Weitere Glieder der asymptotischen Entwicklungen kann man dadurch erhalten, daß man die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen ν unter dem Integralzeichen weiter verfolgt, oder bequemer auf direktem Wege, indem man Ausdrücke von der Form

$$x^{-\frac{4}{5}}\left(1+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right) \quad \text{und} \quad c^{\varepsilon x}\, x^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}\cdots\right)$$

in die Differentialgleichung (3) für ψ mit $\xi = x$ einsetzt und die Koeffizienten so bestimmt, daß sie formal befriedigt wird. Man erhält so bis zu quadratischen Gliedern:

$$\text{(17 a)} \quad \begin{aligned} J_1(x) &\sim -\tfrac{1}{2}\,\Pi(-\tfrac{1}{5})\left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)x^{-\frac{4}{5}}\left[1+0.384\,i\,\frac{1}{x^2}\right] \\ J_3(x) &\sim f\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\,x^{-\frac{3}{2}}\left[1+2.985\,c^{\frac{i\pi}{4}}\,\frac{1}{x}+11.32\,i\,\frac{1}{x^2}\right]. \end{aligned}$$

Die asymptotischen Ausdrücke der K_1 und K_3 erhält man durch gliedweise Differentiation der Ausdrücke für J_1 und $e^{\varepsilon x} J_3$. Sie sind:

$$\text{(17 b)} \quad \begin{aligned} K_1(x) &\sim -\tfrac{1}{2}\,\Pi(-\tfrac{1}{5})\left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)x^{-\frac{9}{5}}\left[-0.8-1.075\,\frac{i}{x^2}\right] \\ K_3(x) &\sim f\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{i\pi}{8}}\,x^{-\frac{3}{2}}\left[1+1.485\,e^{\frac{i\pi}{4}}\,\frac{1}{x}+3.86\,i\,\frac{1}{x^2}\right]. \end{aligned}$$

IV. Die Unmöglichkeit der Randwertaufgabe.

7. Soll die am Schlusse des Abschnitts I gestellte Randwertaufgabe eine Lösung haben, so muß es eine reelle, positive Zahl x geben, für welche die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_0(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \psi_0'(x) & \psi_1'(x) & \psi_2'(x) & \psi_3'(x) \\ \psi_0\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_1\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_2\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_3\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \\ \psi_0'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_1'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_2'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_3'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Wir werden aber zeigen, daß sie für alle Werte $x > 10$ sicher von Null verschieden ist. Daß dies im Widerspruch zu Herrn Noethers Resultat steht, wird in der nächsten Nummer begründet.

Folgende Vorbemerkung ist wichtig: Unsere Determinante unterscheidet sich nur durch die Auswahl des Fundamentalsystems von der von Herrn Noether betrachteten (die bei ihm nur in der reduzierten Form $F(\eta)$ (Gleichung (21)) hingeschrieben ist). Diese Determinante ist aber reell, weil die Noetherschen Fundamentalintegrale sich für

$$\xi = x \quad \text{und} \quad \xi = x e^{\frac{5 i \pi}{2}}$$

(y reell positiv und y reell negativ) konjugiert komplex verhalten. Daher muß auch unsere Determinante das Produkt einer reellen Funktion in einen konstanten komplexen Faktor sein. Aus dieser Bemerkung wird eine empfindliche Probe für die Richtigkeit unserer ganzen Rechnung fließen.

Es werde in der Folge zur Abkürzung

$$x e^{\frac{5 i \pi}{2}} = \xi$$

gesetzt. Wir führen in die Determinante $\varDelta$ den Wert $\psi_0(x) = x^{\frac{6}{5}}$ ein, schreiben für die übrigen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ ihre Produktform gemäß den Formeln (15) und drücken die $\psi(\xi)$ und $\psi'(\xi)$ nach den Fortsetzungsformeln (F) aus. Durch übliche Zeilenaddition vereinfacht sich dann die Determinante $\varDelta$ in

$$\varDelta = \tfrac{6}{5} x^{\frac{1}{5}} \varDelta_1,$$

wo $\varDelta_1$ eine dreireihige Determinante ist. Diese werde nach Potenzen von

$$\Re(e^{\varepsilon x}) = \Re(e^{\varepsilon \xi}) = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

geordnet. Sie enthält Glieder mit

$$e^{\frac{3x}{\sqrt{2}}},\quad e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}},\ \ldots,\ e^{-\frac{3x}{\sqrt{2}}}.$$

Die Glieder mit $e^{\frac{3x}{\sqrt{2}}}$ aber heben sich identisch weg,

und wir erhalten also, indem wir die Glieder mit $e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}}$ explizit hinschreiben:

$$\begin{aligned}\Delta_1 \approx e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}}\,[C_2\{J_1(x) - \tfrac{5}{6}xK_1(x)\}\{-iJ_3(\xi)K_3(x) - J_3(x)K_3(\xi)\}\\ + \{J_3(x) - \tfrac{5}{6}xK_3(x)\}\{C_2(J_1(x)K_3(\xi) + iJ_3(\xi)K_3(x))\\ + (A_1C_2 - C_1A_2)(J_1(\xi)K_3(\xi) - J_3(\xi)K_1(\xi))\}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}}\,[C_2\{-iJ_3(\xi) - \tfrac{5}{6}xK_3(\xi)\}\{J_1(x)K_3(x) - J_3(x)K_1(x)\}\\ + (A_1C_2 - C_1A_2)\{J_3(x) - \tfrac{5}{6}xK_3(x)\}\{J_1(\xi)K_3(\xi) - J_3(\xi)K_1(\xi)\}].\end{aligned}$$

Die asymptotische Gleichheit nach dem Zeichen $\approx$ bleibt erhalten, wenn wir die Größen $J(\xi)$ und $K(\xi)$ durch die nach diesem Zeichen gleichen Werte (16) ersetzen. Dann aber vereinfacht sich der Ausdruck bedeutend und erhält die Form:

(18)
$$\begin{aligned}\Delta_1 \approx e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}}\,i\,[C_2\{\bar{J}_3(x) - \tfrac{5}{6}x\bar{K}_3(x)\}\{J_1(x)K_3(x) - J_3(x)K_1(x)\}\\ - (A_1C_2 - C_1A_2)e^{\frac{2i\pi}{5}}\{J_3(x) - \tfrac{5}{6}xK_3(x)\}\\ \{\bar{J}_1(x)K_3(x) - \bar{J}_3(x)\bar{K}_1(x)\}].\end{aligned}$$

Δ_1 muß ja nun mit Ausnahme eines etwaigen konstanten Faktors reell sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $A_1C_2 - C_1A_2$ gleichen absoluten Betrag hat wie C_2. Hierin liegt die angekündigte Probe auf die Richtigkeit unserer Rechnung. In der Tat ergibt sich[1])

(18′) $$e^{\frac{2i\pi}{5}}(A_1C_2 - C_1A_2) = C_2.$$

---

[1]) Ich habe mich zur Durchführung der Rechnung der Tatsache bedient, daß $s = \sin\frac{\pi}{10}$ eine quadratische Irrationalität ist, und habe die reellen Bestandteile aller Größen A und C als lineare Funktionen von s, die imaginären als Produkte solcher linearen Funktionen in den Faktor $c = \cos\frac{\pi}{10}$ ausgedrückt.

Daher ist recht einfach

$$\text{(19)} \qquad \Delta_1 \approx - e^{x \cdot \sqrt{2}} \cdot 2$$
$$\cdot \mathfrak{Im}\left[C_2 \{J_3(x) - \tfrac{5}{6} x K_3(x)\} \{J_1(x) K_3(x) - J_3(x) K_1(x)\}\right],$$

wo $\mathfrak{Im}$ den imaginären Bestandteil bedeutet. Hierin setzen wir die asymptotischen Entwicklungen (17) für die J und K ein und erhalten nach kurzer Rechnung:

$$J_3(x) - \tfrac{5}{6} x \overline{K}_3(x) \backsim -f \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{8}} x^{-\frac{1}{2}} \left[0.833 + 0.238\, e^{-\frac{i\pi}{4}} \frac{1}{x} + 0.232\, e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\right]$$

$$J_1(x) K_3(x) - J_3(x) K_1(x) \backsim \tfrac{1}{2} \Pi(-\tfrac{1}{5}) f \cdot \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{i\pi}{8}} \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) x^{-\frac{3}{2} - \frac{4}{5}} \cdot \left[1 + 2.285\, e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{1}{x} + 6.632\, e^{\frac{i\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\right],$$

$$\text{(20)} \qquad \Delta_1 \backsim - e^{x \cdot \sqrt{2}} f^2\, 2\pi\, \Pi(-\tfrac{1}{5})\, x^{-2-\frac{4}{5}}$$
$$\cdot \mathfrak{Im}\left[C_2 \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left\{0.833 + (1.52 + i\, 1.17) \frac{1}{x} + (0.542 + i\, 5.30) \frac{1}{x^2}\right\}\right]$$
$$\backsim e^{x \cdot \sqrt{2}} f^2\, 2\pi\, \Pi(-\tfrac{1}{5})\, x^{-2-\frac{4}{5}} \left[1.28 - 0.617 \frac{1}{x} - 12.4 \frac{1}{x^2}\right].$$

Dies ist unser Endresultat, das wir zu diskutieren haben. Die Klammer auf der rechten Seite ist für $x \geq 10$ größer als 1.1, verschwindet also sicher für diese Werte von x nicht. Daraus allein ist aber kein sicherer Schluß zu ziehen, daß Δ_1 selbst dort nicht verschwindet, denn Δ_1 könnte ja erheblich von seinem asymptotischen Werte abweichen. Wahrscheinlich wird dies schon durch den Wert des nächsten Gliedes der asymptotischen Entwicklung, der sich zu $-58.3 \cdot \frac{1}{x^3}$ rechnet und also für $x \geq 10$ erheblich kleiner ist als das letzte in (20) angeschriebene Glied.

Um aber streng zu zeigen, daß Δ_1 für $x \geq 10$ keine Wurzel besitzt, habe ich noch die Fehler der asymptotischen Darstellung abgeschätzt. Diese Fehler sind zweierlei Art:

1. Abweichung der Klammern in (20) von den Klammern in (19) [Fehler nach dem Zeichen $\backsim$]. Ich habe mit Hilfe allerdings nicht leichter Betrachtungen nachweisen können, daß für $x \geqq 10$ diese Abweichung den Betrag 0.18 nicht übersteigt. Die hierzu führenden Überlegungen und Rechnungen möchte ich aber ihrer Länge wegen hier nicht geben.

2. Abweichung der Determinante $\varDelta_1$ von dem Ausdrucke (19) [Fehler nach dem Zeichen $\approx$]. Man sieht sofort, daß diese Abweichung nur unbeträchtlich sein kann. Ich habe sie nur roh überschlagen, indem ich noch das nächste Glied der Determinante mit dem Fehler $e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$ formelmäßig ausgerechnet und eine obere Grenze dafür bestimmt habe. Dieses Glied liefert für $x \geqq 10$ zu der Klammer einen Beitrag von höchstens 0.005, der bereits unter der Genauigkeit unserer Rechnung liegt. Dasselbe gilt erst recht von den drei übrigen Gliedern der Determinante[1]).

Damit ist die im Anfang dieses Abschnittes über die Determinante $\varDelta$ behauptete Tatsache vollständig bewiesen[2]).

8. Es bleibt noch übrig, dieses Resultat mit demjenigen Herrn Noethers zu vergleichen. Noether führt eine Größe ein, hier ξ_N genannt, die folgendermaßen definiert ist:

$$\xi_N = 10^{-5}\, R^2 y^{10}.$$

Es ist also nach Gleichung (3′) im Vergleich mit unserem $x = |\xi|$

$$\xi_N = (\tfrac{5}{2})^4\, 10^{-5}\, x^4 \qquad \text{oder} \qquad x = \tfrac{2}{5} \cdot 10 \cdot 10^{\frac{1}{4}}\, \xi_N^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2560}\, x^4 \qquad\qquad = 7.11\, \xi_N^{\frac{1}{4}}.$$

Noether gibt für die von ihm behauptete Wurzel den Wert

$$\xi_N = 20.9.$$

---

1) Das letzte verschwindet identisch.

2) Die untere Grenze für etwaige Wurzeln der Determinante würde sich mit den gleichen Abschätzungsmethoden übrigens noch erheblich herunterdrücken lassen, etwa bis $x = 7$.

Das wäre

$$x = 15.2.$$

Dies ist aber im Widerspruch mit unserem Resultate.

Andererseits ist für $x < 10$

$$\xi_N < 3.9,$$

und für diese kleinen Werte von ξ_N konvergieren die Noetherschen Reihen recht gut. Herr Noether hat aber für $\xi_N \leq 3.9$ keine Wurzel seiner Gleichung gefunden[1]).

Wir können daher annehmen, daß die Gleichung überhaupt keine Wurzel hat.

Das ist das Resultat, das ich ableiten wollte.

Ich möchte aber noch folgendes bemerken: Die von uns im Anschluß an Herrn Noether untersuchte Gleichung (1) bezieht sich nur auf ganz spezielle Störungsbewegungen, die sich über die Noethersche Laminarströmung überlagern könnten, nämlich sehr langwellige von bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Für Störungsbewegungen von endlicher Wellenlänge oder zeitlich periodische Bewegungen hat Noether gleichfalls die Differentialgleichungen aufgestellt, die noch als Parameter die reziproke Wellenlänge α und die reziproke Periode β enthalten. Auf diese Gleichungen scheint sich die von uns befolgte Methode der Laplaceschen Transformation nur mit erheblicher Schwierigkeit anwenden zu lassen, weil sie sich nicht in einfacher Weise auf den Rang 1 reduzieren. Ich habe also keinen Einblick in die dort auftretenden Verhältnisse, und möchte nicht ausschließen, daß Störungsbewegungen dieser allgemeinen Art existieren können. Ich glaube allerdings, daß zu ihrer sicheren Beherrschung auch wieder asymptotische Methoden notwendig sein werden.

---

[1]) Ich habe diese Rechnung nicht nachgeprüft.

Anhang.

9. Die Restabschätzung der asymptotischen Reihen (20) erfordert einige Kunstgriffe. Ich gebe daher die Hauptzüge meiner Rechnung an. Wir setzen

$$\Phi = \psi - \tfrac{5}{6}\,\xi\,\psi' \tag{21}$$

und können die Formel (19) so umschreiben:

$$\Delta_1 \approx \frac{12}{5}\,\frac{1}{x}\,\mathfrak{Im}\,[C_2\,\overline{\Phi}_3(x)\{\psi_1(x)\,\Phi_3(x) - \psi_3(x)\,\Phi_1(x)\}]. \tag{22}$$

Die Funktionen Φ haben nun eine einfachere Integraldarstellung als die ψ. Setzen wir in der Tat in (21) für die ψ die Integralwerte (12) ein, so folgt mit Hilfe einer Produktintegration

$$\Phi = \int\limits_{(S)} e^{\varepsilon\xi z}\left(\tfrac{11}{6}\nu + \tfrac{5}{6} z\,\nu'\right) dz.$$

Aus der Gleichung

$$\nu = z^{-\frac{11}{5}} \int \omega\, dz \tag{5'}$$

ergibt sich aber

$$\tfrac{11}{6}\,\nu + \tfrac{5}{6}\,z\,\nu' = \tfrac{5}{6}\,z^{-\frac{6}{5}}\,\omega(z) = \tfrac{5}{6}\,z^{-\frac{1}{5}}\,w(z^2),$$

wo w die durch (6) definierte hypergeometrische Funktion von z^2 ist. Also im ganzen:

$$\Phi = \tfrac{5}{6}\int\limits_{(S)} e^{\varepsilon\xi z}\,z^{-\frac{1}{5}}\,w(z^2)\,dz, \tag{23}$$

und speziell, indem wir, wie in **5.** und **6.**, die Schleifenintegrale durch geradlinige Integrale über die positive reelle Achse ausdrücken:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= -\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \tfrac{5}{6}\,x^{-\frac{4}{5}} \int\limits_0^\infty e^{-\zeta}\,\zeta^{-\frac{1}{5}}\,w_1^{(0)}\!\left(e^{\frac{5i\pi}{2}}\frac{\zeta^2}{x^2}\right) d\zeta, \\ \Phi_3(x) &= \tfrac{5}{3} f e^{\frac{5i\pi}{4}}\,\frac{1}{x}\,e^{\varepsilon x} \int\limits_0^\infty e^{-\zeta}\left(1 + e^{\frac{5i\pi}{4}}\frac{\zeta}{x}\right)^{-\frac{1}{5}} w_2^{(1)}\!\left(\left(1 + e^{\frac{5i\pi}{4}}\frac{\zeta}{x}\right)^2\right) d\zeta. \end{aligned} \tag{23_1}$$

Ich will die Art, wie weiter verfahren wird, an dem ersten Integral erläutern, für das zweite gilt gedanklich das gleiche, während die Ausführung schwerer ist.

Wir zerlegen das Integral in (23_1) in zwei Teile, $\int\limits_0^x$ und $\int\limits_x^\infty$. In dem ersten Teilintegral ist das Argument von $w_1^{(0)}$ immer < 1 und daher wird hier $w_1^{(0)}$ durch die hypergeometrische Reihe

$$w_1^{(0)}(u) = F(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}, u)$$

dargestellt. In dem zweiten Teilintegral aber gilt diese Darstellung nicht, sondern muß durch die Fortsetzung von $F(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, u)$ um den Punkt ∞ ersetzt werden. Diese steht bei Schlesinger (Handbuch I, S. 484, Formel $S_{0\infty}$).

Wir erhalten die asymptotische Entwicklung des Integrals in (23_1), wenn wir in dem Teilintegral $\int\limits_0^x$ die Reihe $w_1^{(0)}$ nach dem zweiten Gliede abbrechen, über die beiden ersten Glieder aber nicht von 0 bis x, sondern von 0 bis ∞ integrieren. Der Rest der asymptotischen Darstellung des Integrals setzt sich also aus drei Teilen zusammen: 1. den negativ genommenen, zwischen x und ∞ erstreckten Integralen über die beiden herausgezogenen Glieder von $w_1^{(0)}$; 2. dem zwischen 0 und x erstreckten Integral über den Rest der Reihe $w_1^{(0)}$; 3. dem Integral $\int\limits_x^\infty$.

Auf die Abschätzung im einzelnen gehe ich nicht ein, sie erfordert recht genaue Auswertungen der hypergeometrischen Reihen für gewisse komplexe Werte der Veränderlichen. Man findet z. B., daß für $x > 10$ der Gesamtfehler des Integrals in (23_1) gegen seine asymptotische Darstellung weniger als $\Pi(-\frac{1}{5}) \cdot 8.4 \cdot \frac{1}{x^4}$ beträgt.

Nachdem in der geschilderten Weise die Funktionen Φ_1 und Φ_3 berechnet und ihre Reste abgeschätzt sind, erhält man die Funktionen ψ_1 und ψ_3 durch Integration. In der Tat ist

$$-\tfrac{6}{5}\,\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi = \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{-\frac{6}{5}}\,\psi\right).$$

Um hieraus ψ zu finden, hat man zu berücksichtigen, daß $\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_1$ sich im Unendlichen integrabel verhält und daß $\psi_1(\xi)$ im Unendlichen verschwindet. Daher ist

$$(24_1) \qquad \psi_1(x) = -\tfrac{6}{5}\,x^{\frac{6}{5}} \int_{\infty}^{x} \xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_1(\xi)\,d\xi,$$

das Integral über die positive reelle Achse der ξ-Ebene erstreckt.

Etwas schwieriger liegen die Verhältnisse bei ψ_3. Man bemerke, daß $\psi_3(\xi)$ im Unendlichen sicher für solche Werte von ξ verschwindet, deren Argument zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Für dieselben Argumente ist $\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_3$ im Unendlichen integrabel. Ziehen wir also aus dem Unendlichen unter einem Argument χ

$$-\frac{\pi}{4} > \chi \geq -\frac{\pi}{2}$$

den geradlinigen Weg X, der im Punkte x auf der reellen Achse einmündet, so ist

$$(24_2) \qquad \psi_3(x) = -\tfrac{6}{5}\,x^{\frac{6}{5}} \int_{X} \xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_3(\xi)\,d\xi.$$

Setzt man unter die Integrale (24) die asymptotischen Entwicklungen der Φ nebst ihren Resten ein, so erhält man ohne erhebliche Schwierigkeiten die Reste der Funktionen ψ[1]).

[1]) Man beachte, daß man die Reste von Φ_3 nicht nur längs der reellen Achse, sondern zum Zwecke der Integration auch längs aller Wege X von genügend großem x kennen muß.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

